

教资高中数学科目三-真题
(2019)

1. 若函数 $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x < 0, \\ b + \sin 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导, 则 a, b 的值是 ()。

A. $a = 2, b = 1$

B. $a = 1, b = 2$

C. $a = -2, b = 1$

D. $a = 2, b = -1$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}。$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}。$$

知识链接

1. 证明或判断函数在某点处可导性

$f(x)$ 在点 x_0 处的左导数记为 $f'_-(x_0)$ 。

$$\text{规定: } f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}。$$

$f(x)$ 在点 x_0 处的右导数记为 $f'_+(x_0)$ 。

$$\text{规定: } f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}。$$

注意:

① $f(x)$ 在点 x_0 处可导 ($f'(x_0)$ 存在) $\Leftrightarrow f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等。

2. 证明或判断函数可导性

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}。$$

知识链接

函数在一点连续

对于分段函数在分段点处的连续性的讨论，应根据函数连续的定义，满足：

- ① 函数在该点有定义；
- ② 函数在该点的左极限=右极限=该点的函数值。

2. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的一阶导函数在 $x = 0$ 处连续, 则正整数 n 的取值

范围是 ()。

A. $n \geq 3$

B. $n = 2$

C. $n = 1$

D. $n = 0$

知识链接

1. 判断函数在某点处连续

注意：对于分段函数在分段点处的连续性的讨论，应根据函数连续的定义，满足：

- ① 函数在该点有定义；
- ② 函数在该点的左极限 = 右极限 = 该点的函数值。

2. 辅助角公式

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi), \quad \varphi = \arctan \frac{b}{a}, \quad \text{即} \tan \varphi = \frac{b}{a}.$$

3. 可导与连续的关系

可导必连续，连续不一定可导，不连续一定不可导

3. 已知点 $M_1(1, 2, -1)$, $M_2(1, 3, 0)$, 若平面 π_1 过点 M_1 且垂直于直线 M_1M_2 , 则平面 $\pi_2: 6x + y + 18z - 18 = 0$ 与平面 π_1 的夹角是 ()。

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{\pi}{2}$

知识链接

点法式

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0,$$

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

4. 已知向量 a, b, c 满足 $a+b+c=0$, 那么 $a \times b =$ ()。

A. $b \times a$

B. $c \times b$

C. $b \times c$

D. $a \times c$

知识链接

① $a \times a = 0$ 。

① 反交换律: $a \times b = -b \times a$ 。

② 分配律: $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$ 。

③ $\lambda a \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b)$, λ 为常数。

5. 设 n 阶方阵 M 的秩 $r(M) = r < n$, 则在 M 的 n 个行向量中 ()。

A. 任意一个行向量均可由其他 r 个行向量线性表示

B. 任意 r 个行向量均可构成极大线性无关组

C. 任意 r 个行向量均线性无关

D. 必有 r 个行向量线性无关

知识链接

极大线性无关向量组

设有向量组 A ，如果在 A 中能选出 r 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ ，满足：

(1) 向量组 $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关；

(2) 向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量（如果有的话）都线性相关，

则称向量组 $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量组 A 的一个极大线性无关向量组。

向量组 A 中任何一个（其他）向量可由它的极大线性无关向量组 $A_0: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示。

6. 下列变换中关于直线 $y = x$ 的反射变换是 ()。

A. $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

B. $M_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

C. $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

D. $M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = ax + by, \\ y_1 = cx + dy, \end{cases}$$

知识链接

旋转变换 $\begin{cases} x_1 = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y_1 = x \sin \varphi + y \cos \varphi, \end{cases}$ 对应的二阶矩阵为 $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ 。

伸缩变换 $\begin{cases} x' = k_1 x, \\ y' = k_2 y, \end{cases}$ 则对应的二阶矩阵为 $\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ 。

投影变换: $\begin{cases} x' = x, \\ y' = 0, \end{cases}$ 则对应的二阶矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

平行于 y 轴的切变变换 $\begin{cases} x' = x, \\ y' = kx + y, \end{cases}$ 则对应的二阶矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ 。

7. 下列对向量学习意义的描述：

- ①有助于学生体会数学与现实生活和其他学科的联系；
- ②有助于学生理解数学运算的意义及价值，发展运算能力；
- ③有助于学生掌握处理几何问题的一种方法，体会数形结合思想；
- ④有助于学生理解数学不同内容之间存在广泛的联系。

其中正确的共有（ ）。

A. 1 条

B. 2 条

C. 3 条

D. 4 条

8. 数学归纳法的推理方式属于 ()。

A. 归纳推理

B. 演绎推理

C. 类比推理

D. 合情推理

9. 已知变换 $Y=AX+B$, 其中变换矩阵 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ 。

(1) 写出椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 在该变换下的曲线方程; (5分)

(2) 举例说明在该变换下什么性质保持不变, 什么性质发生变化 (例如距离, 斜率, 相交等)。 (2分)

(1) 由已知条件, 设椭圆上的点 (x_1, y_1) 在变换 $Y=AX+B$ 的作用下得到 (x, y) ,

$$\text{则 } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + 3 \\ \frac{1}{3}y_1 + 5 \end{pmatrix}, \text{ 即 } \begin{cases} x = \frac{1}{2}x_1 + 3, \\ y = \frac{1}{3}y_1 + 5, \end{cases} \text{ 故 } \begin{cases} x_1 = 2x - 6, \\ y_1 = 3y - 15, \end{cases} \text{ 代入椭圆方程}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \text{ 得 } (x-3)^2 + (y-5)^2 = 1.$$

(2) 在该变换下, 不变的性质有: 都是轴对称图形和中心对称图形, 依旧是封闭的曲线图形。变化的性质有: 图形形态发生变化, 中心点发生变化, 原图形与坐标轴相交, 变换后的图形与坐标轴不相交, 变换后的图形上的点距离中心点的距离都相等。

10. 已知 $f(x) = \ln x (x > 0)$, $g(x) = \frac{\ln 5}{4}(x-1)$ 。

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 所围平面图形的面积; (4分)

(2) 求平面图形 $0 \leq y \leq f(x)$, $1 \leq x \leq 3$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转体体积。(3分)

知识链接

$$A = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx。$$

10. 已知 $f(x) = \ln x (x > 0)$, $g(x) = \frac{\ln 5}{4}(x-1)$ 。

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 所围平面图形的面积;(4分)

(2) 求平面图形 $0 \leq y \leq f(x)$, $1 \leq x \leq 3$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转体体积。(3分)

知识链接

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx。$$

$$V = \int_c^d \pi [\varphi(y)]^2 dy。$$

(1) 令 $f(x) = g(x)$, 即 $\ln x = \frac{\ln 5}{4}(x-1)$, 解得 $x=5$ 或 $x=1$ 。则曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 所围平面图形的面积为 $S = \int_1^5 [f(x) - g(x)] dx = \int_1^5 \left[\ln x - \frac{\ln 5}{4}(x-1) \right] dx = \left[x(\ln x - 1) - \frac{\ln 5}{4} \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \right] \Big|_1^5 = 3\ln 5 - 4$ 。

(2) 题干所求旋转体体积即为以 3 为底面半径, 以 $\ln 3$ 为高的圆柱体体积与由曲线 $f(x) = \ln x$, $x=0$, $y=0$, $y=\ln 3$ 围成的图形绕 y 轴旋转一周所构成的旋转体体积的差, 即

$$V = 9\pi \ln 3 - \int_0^{\ln 3} \pi x^2(y) dy = 9\pi \ln 3 - \int_0^{\ln 3} \pi e^{2y} dy = 9\pi \ln 3 - \frac{\pi e^{2y}}{2} \Big|_0^{\ln 3} = 9\pi \ln 3 - 4\pi。$$

11. 一个袋子里有 8 个黑球，8 个白球，随机不放回地连续取球 5 次，每次取出 1 个球，求最多取到 3 个白球的概率。

11.【参考答案】

由题意可知，随机不放回地连续取球 5 次。设“最多取到 3 个白球”为事件 A ，“取到 4 个白球”为事件 B ，“取到 5 个白球”为事件 C ，则 $P(B) = \frac{C_8^4 C_8^1}{C_{16}^5} = \frac{5}{39}$ ，
 $P(C) = \frac{C_8^5}{C_{16}^5} = \frac{1}{78}$ ，所以事件“最多取到 3 个白球”的概率为 $P(A) = 1 - P(B) - P(C) = \frac{67}{78}$ 。

12. 数学文化是指数学的思想、精神、语言、方法、观点，以及它们的形成和发展；还包括数学在人类生活、科学技术、社会发展中的贡献和意义，以及与数学相关的人文活动，请你给出数学教学中融入数学文化的两个事例。

“导数及其应用”这节课学习的过程中向学生渗透的数学思想有数形结合思想和极限思想。通过这节课的学习能够引导学生对教材知识进行观察，对相关例子进行归纳，培养学生的观察能力和总结归纳能力，进一步解决实际问题。另外通过告诉学生导数的由来、发展和在实际生活、工作中的作用，不仅让学生感知古老的故事中蕴含的数学精神，而且会使课堂更加生动有趣。

“勾股定理”这节课包含的数学思想有数形结合思想、转化思想和从特殊到一般的数学思想。先从特殊的直角三角形——等腰直角三角形入手，观察分析以腰为边的正方形与以斜边为边的正方形的面积之间的关系，得出等腰直角三角形的三边之间的数量关系，这其中借助了数形结合的思想；进而研究普通直角三角形，通过运用赵爽弦图对勾股定理进行证明，由求边的关系转化为求面积的关系，这其中渗透了转化的思想方法。在用面积证明勾股定理的过程中，通过移、补、凑、合而保持面积不变，向学生展示割补原理并渗透数形结合思想；同时能够培养学生的民族自豪感。“勾股定理”的学习过程中教师会不断引导学生对教材知识进行观察，对得出的结论进行归纳，在这个过程中学生的观察能力和总结归纳能力都会得到培养。另外通过分享学生收集的资料引出数学史中毕达哥拉斯在朋友家做客时发现地板中三角形的三边关系，让学生感受数学文化的魅力，了解勾股定理的发展历史。

13. 简述数学建模的主要过程。

（三）数学建模

1. 含义

数学建模是对现实问题进行数学抽象，用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题的素养。

2. 内容

数学建模过程主要包括：在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题，分析问题、建立模型，确定参数、计算求解，检验结果、改进模型，最终解决实际问题。

数学模型搭建了数学与外部世界联系的桥梁，是数学应用的重要形式。数学建模是应用数学解决实际问题的基本手段，也是推动数学发展的动力。

3. 表现

数学建模主要表现为：发现和提出问题，建立和求解模型，检验和完善模型，分析和解决问题。

13. 简述数学建模的主要过程。

数学建模是对现实问题进行数学抽象，用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题的素养。数学建模过程主要包括：在实际情境中从数学的视角提出问题，建立模型，求解模型，检验结果，完善模型，最终解决实际问题。

例如，建立模型：在假设的基础上，利用适当的数学工具来刻画各变量、常量之间的数学关系，建立相应的数学结构（尽量用简单的数学工具）。

求解模型：利用获取的数据资料，对模型的所有参数做出计算（或近似计算）。

检验结果：对所要建立模型的思路进行阐述，对所得的结果进行数学上的分析。

完善模型：将模型分析结果与实际情形进行比较，以此来验证模型的准确性、合理性和适用性。如果模型与实际较吻合，则要根据计算结果给出其实际含义，并进行解释。如果模型与实际吻合度较差，则应该修改假设，再次重复建模过程。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/657115041161006116>