数 学

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案写在答题卡上指定位置上，在其他位置作答一律无效.

3.本卷满分为 150 分，考试时间为 120 分钟.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{(x,y)|y=x^3\},B=\{(x,y)|y=x\}$，则 $A\cap B$ 的元素个数是

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】首先求解方程组 $\begin{cases}y=x^3\\y=x\end{cases}$，得到两曲线的交点坐标，进而可得答案.

【详解】联立 $\begin{cases}y=x^3\\y=x\end{cases}$，解得 $x=-1,0,1$

即 $y=x^3$ 和 $y=x$ 的图象有 3 个交点 $(-1,-1)$，$(0,0)$，$(1,1)$，

$\therefore$集合 $A\cap B$ 有 3 个元素，故选 B.

【点睛】本题考查了交集及其运算，考查了方程组的解法，是基础题.

2. 已知函数 $f(x)=\ln|x-1|$，则 $f(x+1)$（　）

A. 是奇函数且在 $(0,+\infty)$ 上递减　　B. 是奇函数且在 $(0,+\infty)$ 上递增

C. 是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上递减　　D. 是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上递增

【答案】D

【解析】

【分析】先求出 $f(x+1)$，再根据函数奇偶性、单调性的定义判断即可.

【详解】$\because f(x)=\ln|x-1|$，

$\therefore f(x+1)=\ln|x|$，定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

$f(-x+1)=\ln|-x|=\ln|x|=f(x+1)$，$\therefore f(x+1)$是偶函数，

当$x>0$时，$f(x+1)=\ln x$，在$(0,+\infty)$上是单调增函数.

故选：D.

3. 若α，β是两个不同的平面，直线$m\perp\alpha$，则“$m\,/\!/\,\beta$”是“$\alpha\perp\beta$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】由面面垂直的判定定理得到充分性成立，再举出反例得到必要性不成立，得到答案.

【详解】$m\perp\alpha$，$m\,/\!/\,\beta$，由面面垂直的判定定理可知，$\alpha\perp\beta$，充分性成立，

$m\perp\alpha$，$\alpha\perp\beta$，则$m\,/\!/\,\beta$或$m\subset\beta$，必要性不成立，

则“$m\,/\!/\,\beta$”是“$\alpha\perp\beta$”的充分不必要条件.

故选：A

4. 过$P(1,1)$的直线交圆O：$x^2+y^2=9$于M，N两点，若$2\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，则$|MN|=$（　）

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{7}$　　C. $2\sqrt{7}$　　D. $\sqrt{14}$

【答案】C

【解析】

【分析】由题目条件得到P为MN的中点，由垂径定理得到答案.

【详解】$2\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$，故$P$为$MN$的中点，

$|OP|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，由垂径定理得$|MN|=2\sqrt{9-|OP|^2}=2\sqrt{7}$.

故选：C

5. 若$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=1+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，则$\sin 2\alpha=$（　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用三角恒等变换得到$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，两边平方求出$\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$.

【详解】$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=1+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，

即$\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=1+\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}$，$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

两边平方得$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}$，即$1-\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$，

解得$\sin 2\alpha=\frac{1}{2}$.

故选：B

6. 若正数a，b，c满足$e^a+2a=e^b+3b=e^c+c$（e为自然对数底数），则（　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

【答案】D

【解析】

【分析】令$f(x)=e^x+x$可知$f(x)$在R上单调递增，即可判断$c>a$，再令$g(x)=e^x+2x$，即可判断$a>b$.

【详解】令$f(x)=e^x+x$，显然$f(x)$在R上单调递增，

又a，b，c为正数，所以$e^c+c=e^a+2a>e^a+a$，即$f(c)>f(a)$，所以$c>a$，

令$g(x)=e^x+2x$，则$g(x)$在R上单调递增，又$e^a+2a=e^b+3b>e^b+2b$，即$g(a)>g(b)$，所以$a>b$，

综上可得$c>a>b$.

故选：D

7. 椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的上顶点为$A$，左、右焦点为$F_1$、$F_2$，若$AF_2$上任一点$P$到直线$AF_1$的距离与到$x$轴的距离之和为$b$，则（　）

A. $a=2b$　　B. $\sqrt{3}a=2b$　　C. $a=\sqrt{3}b$　　D. $2a=3b$

【答案】B

【解析】

【分析】表达出直线 AF_1 和 AF_2 的方程，设 $P\left(m,\frac{bc-bm}{c}\right)$，$0\le m\le c$，由点到直线距离公式列出方程，求出 $a=2c$，进而得到 $\sqrt{3}a=2b$.

【详解】由题意得 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，$A(0,b)$，

直线 AF_1 的方程为 $y=\frac{b}{c}x+b$，即 $bx-cy+bc=0$，

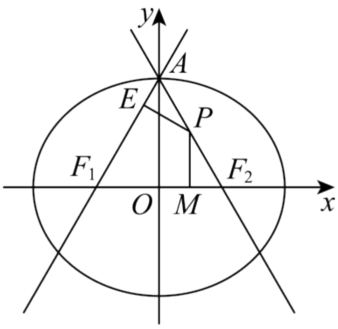
直线 AF_2 的方程为 $y=-\frac{b}{c}x+b$，即 $bx+cy-bc=0$，

设 $P\left(m,\frac{bc-bm}{c}\right)$，$0\le m\le c$，

则 $P\left(m,\frac{bc-bm}{c}\right)$ 到直线 AF_1 的方程为 $\frac{\left|bm-c\cdot\frac{bc-bm}{c}+bc\right|}{\sqrt{b^2+(-c)^2}}=\frac{2bm}{a}$，

则 $\frac{2bm}{a}+\frac{bc-bm}{c}=b$，解得 $a=2c$，

故 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}c$，故 $\sqrt{3}a=2b$.



故选：B

8. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)+f(x)=4(x\in\mathbf{R})$，且 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,2)$ 对称，则（　）

A. $f(-1)=-2$　　B. $f(2)=0$　　C. $f(1)=6$　　D. $f(6)=2$

【答案】D

【解析】

【分析】依题意可得 $f(x)+f(-x)=4$，即可得到 $f(x+2)=f(-x)$，从而求出 $f(0)$、$f(2)$、$f(6)$ 的值.

【详解】因为 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,2)$ 对称，所以 $f(x)+f(-x)=4$，$f(0)=2$，

又 $f(x+2)+f(x)=4(x\in\mathbf{R})$，所以 $f(x+2)=f(-x)$，则 $f(2)=f(0)=2$，故 B 错误；

由 $f(2)+f(-2)=4$，所以 $f(-2)=2$，所以 $f(4)=f(-2)=2$，

又 $f(4)+f(-4)=4$，所以 $f(-4)=2$，则 $f(6)=f(-4)=2$，故 D 正确；

由于只有 $f(1)+f(-1)=4$，无法得知 $f(1)$、$f(-1)$ 的值，故 A、C 错误.

故选：D

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知复数 z_1， z_2，则下列说法正确的是（　　）

A. 若 $|z_1|=1$，则 $z_1=\mathrm{i}$

B. 若 $|z_1|=0$，则 $z_1=0$

C. 若 z_1， z_2 互为共轭复数，则 $|z_1|=|z_2|$

D. $\forall z_1$， $z_2\in\mathrm{C}$，$|z_1z_2|=|z_1||z_2|$

【答案】BCD

【解析】

【分析】利用特殊值判断 A，根据复数的模、共轭复数及复数代数形式的乘法运算判断 B、C、D.

【详解】对于 A：若 $z_1=-\mathrm{i}$，则 $|z_1|=1$，故 A 错误；

对于 B：设 $z_1=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathrm{R})$，因为 $|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}=0$，所以 $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$，则 $z_1=0$，故 B 正确；

对于 C：设 $z_1=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathrm{R})$，因为 z_1， z_2 互为共轭复数，则 $z_2=a-b\mathrm{i}$，

所以 $|z_1|=\sqrt{a^2+b^2}$， $|z_2|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$，即 $|z_1|=|z_2|$，故 C 正确；

对于 D：设 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i},z_2=x_2+y_2\mathrm{i}(x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathrm{R})$，

则 $z_1\cdot z_2=(x_1+y_1\mathrm{i})(x_2+y_2\mathrm{i})=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)\mathrm{i}$， $|z_1|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$， $|z_2|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

所以 $|z_1\cdot z_2|=\sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2}=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}=|z_1||z_2|$，

即 $\forall z_1$， $z_2\in\mathrm{C}$， $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，故 D 正确.

故选：BCD

10. 若把曲线 $y=\cos x$ 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$

个单位长度，得到曲线 $y=f\left(x\right)$，则（　）

A. $f(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$　　B. $f\left(x\right)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减

C. $f\left(x\right)$图象关于 $x=-\frac{\pi}{12}$ 对称　　D. $y=f\left(x\right)$与 $y=2x+\frac{\pi}{6}$ 有 2 个交点

【答案】AC

【解析】

【分析】根据三角函数的变换得到 $f\left(x\right)$ 的解析式，利用诱导公式判断 A，根据余弦函数的性质判断 B、C，画出$y=f(x)$与 $y=2x+\frac{\pi}{6}$ 的图象，即可判断 D.

【详解】把曲线 $y=\cos x$ 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变得到 $y=\cos 2x$，

再把 $y=\cos 2x$ 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到 $y=f\left(x\right)=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

又 $\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left[\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$，故 A 正确；

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$，因为 $y=\cos x$ 在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$上不单调，

所以 $f\left(x\right)$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上不单调，故 B 错误；

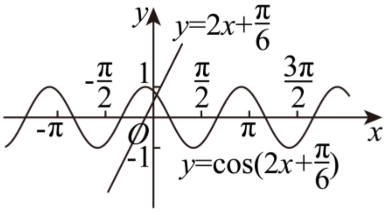
因为 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=1$，所以 $f\left(x\right)$ 图象关于 $x=-\frac{\pi}{12}$ 对称，故 C 正确；

令 $-\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 0$，解得 $-\frac{7\pi}{12}\le x\le-\frac{\pi}{12}$，所以 $f\left(x\right)$ 在$\left[-\frac{7\pi}{12},-\frac{\pi}{12}\right]$上单调递增，且 $f\left(-\frac{7\pi}{12}\right)=-1$，

令 $0\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\pi$，解得 $-\frac{\pi}{12}\le x\le\frac{5\pi}{12}$，所以 $f\left(x\right)$ 在$\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$上单调递减，且 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=-1$，

因为函数 $y=2x+\frac{\pi}{6}$ 在定义域 R 上单调递增，当 $x=-\frac{7\pi}{12}$ 时 $y=-\pi$，令 $y=1$，解得 $x=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{12}$，

在同一平面直角坐标系中画出 $y=2x+\frac{\pi}{6}$ 与 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象如下所示：



由图可知 $y=2x+\frac{\pi}{6}$ 与 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 有且仅有一个交点，故 D 错误.

故选：AC

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，到定点 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)(c>0)$ 距离之积等于 c^2 的动点的轨迹称为伯努利双纽线，F_1，F_2 为该曲线的两个焦点.已知曲线 C：$\left(x^2+y^2\right)^2=8\left(x^2-y^2\right)$ 是一条伯努利双纽线，点 $P\left(x_p,y_p\right)$ 是曲线 C 上一点，则（　　）

A. $c=2$

B. $\sqrt{2}\in\left\{y_p \mid \left(x_p,y_p\right)\in C\right\}$

C. 当 $\angle F_1PF_2=60°$ 时，$|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{7}$

D. C 上存在两个点 A，B，使得 $OA\perp OB$

【答案】AC

【解析】

【分析】对 A：通过赋值求得曲线上一个特殊点 $\left(2\sqrt{2},0\right)$，根据其定义，即可求得 c；对 B：对曲线方程，令 $y=\sqrt{2}$，求解可知方程无解，即可判断；对 C：$\triangle PF_1F_2$ 中，由曲线定义，结合余弦定理，即可求得结果；对 D：设出 OA 方程，联立曲线方程，求得 OA 斜率范围，同理可得 OB 斜率范围，即可判断.

【详解】对 A：对伯努利双纽线 $\left(x^2+y^2\right)^2=8\left(x^2-y^2\right)$，令 $y=0$，则 $x^4=8x^2$，即 $x^2\left(x^2-8\right)=0$，解得$x=0$或$\pm2\sqrt{2}$，

故点 $\left(2\sqrt{2},0\right)$ 在该曲线上，根据双纽线定义 $|PF_1||PF_2|=c^2$ 可得：$\left|2\sqrt{2}+c\right|\left|2\sqrt{2}-c\right|=c^2$，

故可得 $\left|8-c^2\right|=c^2$，则 $8-c^2=c^2$，或 $c^2-8=c^2$（无解，舍去），故 $c^2=4$，又 $c>0$，故 $c=2$，故 A 正确；

对 B：对伯努利双纽线 $\left(x^2+y^2\right)^2=8\left(x^2-y^2\right)$，令 $y=\sqrt{2}$，则 $\left(x^2+2\right)^2=8\left(x^2-2\right)$，即

$x^4-4x^2+20=0$，

也即$\left(x^2-2\right)^2=-16<0$，该方程无解，$\sqrt{2}\notin\left\{y_p \mid \left(x_p,y_p\right)\in C\right\}$，故 B 错误；

对 C：在$\triangle PF_1F_2$中，不妨设$\left|PF_1\right|=m,\left|PF_2\right|=n$，

由 A 可知，$\left|F_1F_2\right|=2c=4$；由据双纽线定义可得：$mn=c^2=4$；

则由余弦定理可得：$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{m^2+n^2-\left|F_1F_2\right|^2}{2mn}=\dfrac{1}{2}$，即$m^2+n^2-16=mn$，

$\left(m+n\right)^2=3mn+16=28$，

故可得：$m+n=-2\sqrt{7}$（舍），或$m+n=2\sqrt{7}$，即当$\angle F_1PF_2=60°$时，$|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{7}$，故 C 正确；

对 D：对方程$\left(x^2+y^2\right)^2=8\left(x^2-y^2\right)$，令$x=0$，则$y^4+8y^2=0$，解得$y=0$，

故OA,OB斜率存在，设为k_1,k_2，则直线OA,OB对应方程为$y=k_1x,y=k_2x$；

联立$y=k_1x$与$\left(x^2+y^2\right)^2=8\left(x^2-y^2\right)$可得：$\left(x^2+k_1^2x^2\right)^2=8\left(x^2-k_1^2x^2\right)$，

即$\left(1+k_1^2\right)^2x^4-8\left(1-k_1^2\right)x^2=0$，因为$A,B$异于$O$，故$x\neq0$，

则$x^2=\dfrac{8\left(1-k_1^2\right)}{\left(1+k_1^2\right)^2}>0$，则$1-k_1^2>0$，解得$k_1\in\left(-1,1\right)$，同理$k_2\in\left(-1,1\right)$；

若$OA\perp OB$，则$k_1k_2=-1$，由k_1,k_2范围可知，显然不成立，故 D 错误；

故选：AC.

【点睛】关键点点睛：处理本题的关键是，充分利用其定义，以及结合圆锥曲线中对曲线的研究方法，进而解决问题，属困难题.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 设等比数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，若$4S_2=3S_1+S_3$，则$\dfrac{a_2}{a_1}=$________.

【答案】3

【解析】

【分析】根据已知条件$4S_2=3S_1+S_3$，通过等比数列的前n项和公式求出公比q，进而求出$\dfrac{a_2}{a_1}$，$\dfrac{a_2}{a_1}$的值就是公比q.

【详解】当$n=1$时，$S_1=a_1$.

当$n=2$时，对于等比数列$S_2=a_1+a_2=a_1+a_1q=a_1(1+q)$（因为$a_2=a_1q$）.

当$n=3$时，$S_3=a_1+a_2+a_3=a_1+a_1q+a_1q^2=a_1(1+q+q^2)$.

已知$4S_2=3S_1+S_3$，将S_1，S_2，S_3的值代入可得：

$4a_1(1+q)=3a_1+a_1(1+q+q^2)$.

因为$a_1\neq 0$（等比数列首项不为0），等式两边同时除以a_1得$4(1+q)=3+(1+q+q^2)$.

展开式子得$4+4q=3+1+q+q^2$，即$q^2-3q=0$，解得$q=0$或$q=3$.

因为等比数列公比$q\neq 0$，所以$q=3$. 所以$\dfrac{a_2}{a_1}=q=3$.

故答案为：3.

13. 已知向量$\vec{a}=(2,2)$，向量$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量的坐标为$(1,t)(t\in\mathbf{R})$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$________.

【答案】4

【解析】

【分析】首先求出$|\vec{a}|$，再由向量$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量为$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$计算可得.

【详解】因为$\vec{a}=(2,2)$，则$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

则向量$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量为$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{8}(2,2)$，

又向量$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影向量的坐标为$(1,t)(t\in\mathbf{R})$，

所以$\begin{cases}\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{8}\times 2=1\\ t=1\end{cases}$，即$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$.

故答案为：4

14. 如图，在直角梯形$ABCD$中，$AD\,/\!/\,BC$，$AB\perp AD$，E是AD中点，且$AB=BC=AE=a$，设$AC\cap BE=O$，将$\triangle ABE$沿BE折起向C点旋转（旋转过程中A点记为A_1，且A_1与C不重合），则CD与平面A_1OC所成角的大小为________，点C到平面A_1OD的距离的最大值是________.