5.1.2 导数的概念及其几何意义（1）

《选择性必修》（第二册）$P_{64} \sim P_{66}$

复习引入

问题1：高台跳水运动员的速度 问题2：抛物线的切线斜率

$$h(t) = -4.9t^2 + 4.8t + 11 \qquad f(x) = x^2$$

平均速度——平均变化率

$$\bar{v} = \frac{h(1+\Delta t) - h(1)}{\Delta t} = -4.9\Delta t - 5$$

割线斜率——平均变化率

$$k = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \Delta x + 2$$

瞬时速度——瞬时变化率

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(1+\Delta t) - h(1)}{\Delta t} = -5$$

切线斜率——瞬时变化率

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = 2$$

思考1：解决这两类问题时有什么共性？

这两类问题都采用了由“平均变化率”逼近“瞬时变化率”的思想方法.

探究：平均变化率

思考2：一般地，对于函数 $y=f(x)$，你能用“平均变化率”逼近“瞬时变化率”的思想方法研究其在某点 (如 $x=x_0$）处的瞬时变化率吗？

追问1：为了研究函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率，我们可以研究哪个范围内函数值的平均变化率呢

为了研究函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率，我们可以选取自变量 x 的一个改变量 Δx（可以是正值，也可以是负值，但不为 0）. 计算自变量 x 从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$ 这个过程中函数值的平均变化率.

追问2：函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$ 这个过程中，函数值的平均变化率如何表示呢？

自变量 x：$x_0 \xrightarrow{\Delta x} x_0+\Delta x$

函数值 y：$f(x_0) \xrightarrow{\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)} f(x_0+\Delta x)$

函数 $y=f(x)$ 从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 的平均变化率：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

归纳总结

平均变化率

对于函数$y=f(x)$，设自变量x从x_0变化到$x_0+\Delta x$，相应地，函数值y就从$f(x_0)$变化到$f(x_0+\Delta x)$．这时，x的变化量为Δx，y的变化量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

我们把比值$\frac{\Delta y}{\Delta x}$，即

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

叫做函数$y=f(x)$从x_0到$x_0+\Delta x$的平均变化率.

探究2：导数的概念

追问3：函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率该如何表示呢？

$$\Delta x \xrightarrow{\text{无限趋近于}} 0$$

$$x_0+\Delta x \xrightarrow{\text{无限趋近于}} x_0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \xrightarrow[\text{取极限}]{\text{无限趋近于}} ?$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

归纳总结

导数的概念

如果当$\Delta x\to 0$时，平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$无限趋近于一个确定的值，即$\frac{\Delta y}{\Delta x}$有极限，则称$y=f(x)$在$x=x_0$处可导，并把这个确定的值叫做$y=f(x)$在$x=x_0$处的导数(也称为瞬时变化率)，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

说明：

1. $f'(x_0)$与x_0的值有关，不同的x_0其导数值一般也不相同；
2. $f'(x_0)$与Δx的具体取值无关；
3. 瞬时变化率与导数是同一概念的两个名称.

思考3： 根据导数的定义，你能用导数来重述跳水运动员速度问题和抛物线切线问题的结论吗？

问题1　高台跳水运动员的速度

$$h(t)=-4.9t^2+4.8t+11$$

平均速度——平均变化率

$$\bar{v}=\frac{h(1+\Delta t)-h(1)}{\Delta t}=-4.9\Delta t-5$$

瞬时速度 ——瞬时变化率

$$h'(1)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(1+\Delta t)-h(1)}{\Delta t}=-5$$

问题2　抛物线的切线斜率

$$f(x)=x^2$$

割线斜率——平均变化率

$$k=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\Delta x+2$$

切线斜率 ——瞬时变化率

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2$$

实际上，导数可以描述任何运动变化事物的瞬时变化率，比如效率、国内生产总值的增长率等.

例题

课本P65

例1：设$f(x)=\dfrac{1}{x}$，求$f'(1)$.

解：$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{1+\Delta x}-1}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{1+\Delta x}\right)=-1.$$

为了便于计算，我们可以按下述步骤进行：

解：$$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=\frac{1}{1+\Delta x}-\frac{1}{1}=-\frac{\Delta x}{1+\Delta x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{-\frac{\Delta x}{1+\Delta x}}{\Delta x}=-\frac{1}{1+\Delta x}.$$

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{1+\Delta x}\right)=-1.$$

反思归纳

求函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数的步骤:

（1）求函数值的增量：$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$;

（2）求平均变化率：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

（3）取极限，得导数：$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

简记：一差、二比、三极限.

练习

1.设函数$f(x)$在x_0处可导,则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$=(C)

A.$f'(x_0)$　　B.$f'(-x_0)$

C.$-f'(x_0)$　　D.$-f'(-x_0)$

解析：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$.

选C.

课本P66

2. 设$f(x)=x$，求$f'(1)$.

解：$\because \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\dfrac{(1+\Delta x)-1}{\Delta x}=1.$

$\therefore f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}1=1.$