第三章　函　数

第13课时　二次函数的图像与性质(1)

课前热身

1. (2023·安徽)下列函数中,y随x的增大而减小的是 (**D**)

A. $y=x^2+1$　　B. $y=-x^2+1$

C. $y=2x+1$　　D. $y=-2x+1$

2. (2023·兰州)已知二次函数$y=-3(x-2)^2-3$,下列说法正确的是 (**C**)

A. 其图像的对称轴为直线$x=-2$

B. 其图像的顶点坐标为(2,3)

C. 函数的最大值是-3

D. 函数的最小值是-3

3. (2023·内蒙古)已知二次函数$y=-ax^2+2ax+3(a>0)$,若点$P(m,3)$在该函数的图像上,且$m\neq0$,则m的值为____**2**____.

4. (2022·连云港东海一模)若二次函数$y=ax^2-2ax+6-b$的图像不经过第三象限,则实数b的取值范围是____$\boldsymbol{b\leq 6}$____.

5. 如图,抛物线$y=-x^2+bx+c$交x轴于$A(-1,0)$,B两点,交y轴于点$C(0,3)$,点P在抛物线上,横坐标为m.

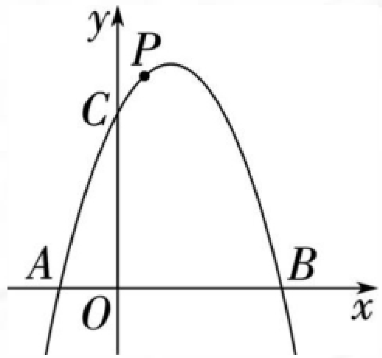
(1) 求抛物线对应的函数表达式;

(2) 当点P在x轴的上方时,直接写出m的取值范围;

(3) 若抛物线在点P右侧部分(含点P)的最高点的纵坐标为$-1-m$,求m的值.

(1) 将$(-1,0)$,$(0,3)$代入$y=-x^2+bx+c$,得$\begin{cases}-1-b+c=0,\\ c=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=2,\\ c=3.\end{cases}$ ∴ 抛物线对应的函数表达式为$y=-x^2+2x+3$

(2) $-1<m<3$



第5题

(3) 抛物线$y=-x^2+2x+3$的对称轴为直线$x=1$.当$m\leq 1$时,抛物线的顶点为点P右侧部分(含点P)的最高点,∴ $-1-m=-1^2+2\times 1+3=4$. ∴ $m=-5$.当$m>1$时,P为点P右侧部分(含点P)的最高点,∴ $-1-m=-m^2+2m+3$,解得$m_1=-1$(舍去),$m_2=4$.综上所述,m的值为-5或4

知识整理

1. 二次函数的定义

一般地,形如 $y=ax^2+bx+c$(a,b,c为常数,且$a\neq0$) 的函数叫做二次函数.当a $=0$,b $\neq0$ 时是一次函数.

2. 二次函数的图像与性质

(1) 二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像是一条 抛物线 ,对称轴是 直线$x=-\frac{b}{2a}$,顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

(2) 抛物线的开口方向由a确定,当$a>0$时,开口__向上__;当$a<0$时,开口__向下__.$|a|$越大,开口越__小__.

(3) 抛物线与y轴的交点坐标为__$(0,c)$__.当$c>0$时,抛物线与y轴的__正__半轴有交点;当$c<0$时,抛物线与y轴的__负__半轴有交点;当$c=0$时,抛物线经过__原点__.

(4) 若a__$>$__0,当$x=-\frac{b}{2a}$时,y有最小值,为__$\frac{4ac-b^2}{4a}$__;若a__$<$__0,当$x=-\frac{b}{2a}$时,y有最大值,为__$\frac{4ac-b^2}{4a}$__.

(5) 当$a>0$时,在对称轴的左侧,y随x的增大而__减小__,在对称轴的右侧,y随x的增大而__增大__;当$a<0$时,在对称轴的左侧,y随x的增大而__增大__,在对称轴的右侧,y随x的增大而__减小__.

(6) 当$m>0$时,二次函数$y=ax^2$的图像向__左__平移__m__个单位长度得到二次函数$y=a(x+m)^2$的图像;当$k>0$时,二次函数$y=ax^2$的图像向__上__平移__k__个单位长度得到二次函数$y=ax^2+k$的图像.

考点一 二次函数的图像和性质

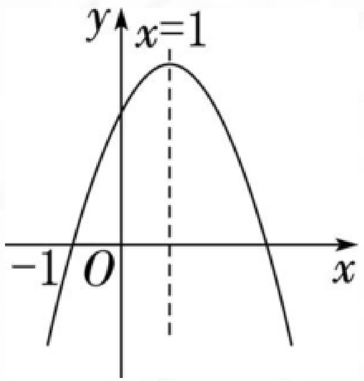
例1 (2023·鄂州)如图,抛物线$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的对称轴是直线$x=1$,抛物线过点(-1,0),顶点在第一象限.给出下列结论:① $ab<0$;② $4a+2b+c>0$;③ $3a+c>0$;④ 若$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$(其中$x_1<x_2$)是抛物线上的两点,且$x_1+x_2>2$,则$y_1>y_2$.其中,正确的是 (**D**)

A. ①②③

B. ①③④

C. ②③④

D. ①②④



例1图

例2 已知抛物线$y=x^2-(m+1)x+2m+3$.

(1) 当$m=0$时,请判断点(2,4)是否在该抛物线上;

(2) 该抛物线的顶点随着m的变化而移动,当顶点移动到最高处时,求该抛物线的顶点坐标;

(3) 已知点$E(-1,-1)$,$F(3,7)$,若该抛物线与线段EF只有一个交点,求该抛物线顶点横坐标的取值范围.

(1) 当$m=0$时,抛物线对应的函数表达式为$y=x^2-x+3$.将$x=2$代入,得$y=4-2+3=5\neq 4$.∴ 点(2,4)不在该抛物线上

(2) 抛物线$y=x^2-(m+1)x+2m+3$的顶点坐标为$\left(\frac{m+1}{2},\frac{4(2m+3)-[-(m+1)]^2}{4}\right)$,化简,得$\left(\frac{m+1}{2},\frac{-m^2+6m+11}{4}\right)$.顶点移动到最高处,即顶点的纵坐标最大,而$\frac{-m^2+6m+11}{4}=-\frac{1}{4}(m-3)^2+5$,∴ 当$m=3$时,纵坐标最大,即顶点移动到了最高处.

此时$\frac{m+1}{2}=2$,$\frac{-m^2+6m+11}{4}=5$,∴ 顶点坐标为(2,5)

(3) 设直线EF对应的函数表达式为$y=kx+b$. 将$(-1,-1)$,$(3,7)$代入,得$\begin{cases}-k+b=-1,\\3k+b=7,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=2,\\b=1.\end{cases}$∴直线$EF$对应的函数表达式为$y=2x+1$.联立$\begin{cases}y=2x+1,\\y=x^2-(m+1)x+2m+3,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=2,\\y_1=5,\end{cases}\begin{cases}x_2=m+1,\\y_2=2m+3.\end{cases}$∴直线$EF$与抛物线$y=x^2-(m+1)x+2m+3$的交点坐标为$(2,5)$,$(m+1,2m+3)$. ∵点$(2,5)$在线段$EF$上,∴若该抛物线与线段$EF$只有一个交点,则点$(m+1,2m+3)$不在线段$EF$上,或点$(2,5)$与点$(m+1,2m+3)$重合. ∴$m+1<-1$或$m+1>3$或$m+1=2$(此时$2m+3=5$). ∴$\frac{m+1}{2}<-\frac{1}{2}$或$\frac{m+1}{2}>\frac{3}{2}$或$\frac{m+1}{2}=\frac{2}{2}=1$,即该抛物线顶点横坐标的取值范围是横坐标小于$-\frac{1}{2}$或等于1或大于$\frac{3}{2}$

[跟踪训练]

1. (2023·营口)如图,抛物线$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$与x轴交于点$A(-3,0)$和点$B(1,0)$,与y轴交于点C.有下列说法:① $abc<0$;② 抛物线的对称轴为直线$x=-1$;③ 当$-3<x<0$时,$ax^2+bx+c>0$;④ 当$x>1$时,y随x的增大而增大;⑤ $am^2+bm\leq a-b$(m为任意实数).其中,正确的个数是 C

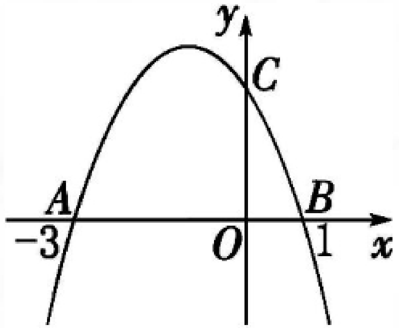
( )

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4



第 1 题

2. 已知$A(-3,y_1)$,$B(-1,y_2)$是二次函数$y=x^2+4x-1$的图像上两点,则y_1与y_2的大小关系为y_1____=____y_2(填“>”“<”或“=”).

3. 已知抛物线$y=ax^2-2x+3$经过点$A(2,3)$.

(1) 求a的值和抛物线的顶点坐标;

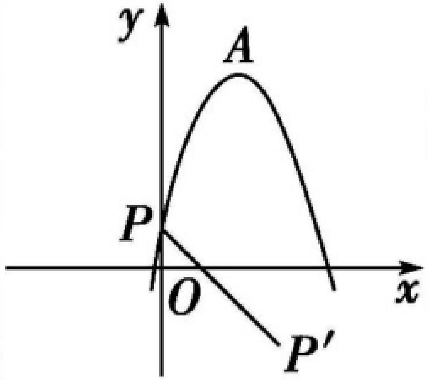
(2) 若点$B(m,n)$在该抛物线上,且$-2\le m\le 2$,求n的取值范围.

(1) 抛物线$y=ax^2-2x+3$经过点$A(2,3)$, $a\times 2^2-2\times 2+3=3$,解得$a=1$.∴ $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$.∴ 抛物线的顶点坐标为(1,2)

(2) ∵ 抛物线$y=x^2-2x+3$的对称轴为直线$x=1$,且开口向上,$-2\le m\le 2$,∴ 当$m=1$时,n有最小值,为2;当$m=-2$时,n有最大值,为$(-2)^2-2\times(-2)+3=11$.∴ n的取值范围是$2\le n\le 11$

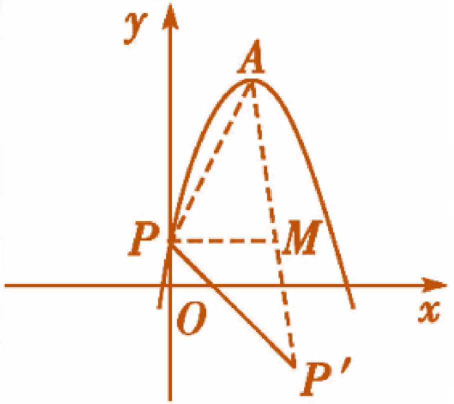
考点二　抛物线的平移变换

例3 (2022·盐城东台模拟)如图,抛物线$y=-x^2+4x+1$与y轴交于点P,抛物线的顶点是A,点P'的坐标是(3,-2),将该抛物线沿PP'的方向平移,使点P平移到点P'处,则平移过程中该抛物线上P,A两点间的部分所扫过的面积是____18____.



例 3 图

解析:如图,连接AP',AP,过点P作$PM // x$轴,交AP'于点M.在$y=-x^2+4x+1$中,令$x=0$,得$y=1$,∴ 点P的坐标为(0,1).∵ $y=-x^2+4x+1=-(x-2)^2+5$,∴ 顶点A的坐标为(2,5).设直线AP'对应的函数表达式为$y=kx+b$.将(2,5),(3,-2)代入,得$\begin{cases}2k+b=5,\\3k+b=-2,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-7,\\b=19.\end{cases}$∴ 直线$AP'$对应的函数表达式为$y=-7x+19$.当$y=1$时,即$-7x+19=1$,解得$x=\frac{18}{7}$.∴ 点$M$的坐标为$\left(\frac{18}{7},1\right)$,$PM=\frac{18}{7}$.∴ $S_{\triangle AP'P}=S_{\triangle PP'M}+S_{\triangle APM}=\frac{1}{2}\times\frac{18}{7}\times[1-(-2)]+\frac{1}{2}\times\frac{18}{7}\times(5-1)=9$.根据平移的性质,可知该抛物线上$P$,$A$两点间的部分扫过的面积等于以$PA$,$PP'$为邻边的平行四边形的面积.∴ 扫过的面积$=2S_{\triangle AP'P}=2\times9=18$.



例 3 图