第 2 章　多体系统动力学基本理论

本章主要介绍多体系统动力学的基本理论，包括多刚体系统动力学建模、多柔体系统动力学建模、多体系统动力学方程求解及多体系统动力学中的刚性（Stiff）问题。通过本章的学习可以对多体系统动力学的基本理论有较深入的了解，为具体软件的学习打下良好的理论基础。

23>.1 多体系统动力学研究状况

多体系统动力学的核心问题是建模和求解问题，其系统研究开始于 20 世纪 60 年代。从 60 年代到 80 年代，侧重于多刚体系统的研究，主要是研究多刚体系统的自动建模和数值求解；到了 80 年代中期，多刚体系统动力学的研究已经取得一系列成果，尤其是建模理论趋于成熟，但更稳定、更有效的数值求解方法仍然是研究的热点；80 年代之后，多体系统动力学的研究更偏重于多柔体系统动力学，这个领域也正式被称为计算多体系统动力学，它至今仍然是力学研究中最有活力的分支之一，但已经远远地超过一般力学的涵义。

本节将叙述多体系统动力学发展的历史和目前国内外研究的现状。

2.1.1 多体系统动力学研究的发展

机械系统动力学分析与仿真是随着计算机技术的发展而不断成熟的，多体系统动力学是其理论基础。计算机技术自其诞生以来，渗透到了科学计算和工程应用的几乎每一个领域。数值分析技术与传统力学的结合曾在结构力学领域取得了辉煌的成就，出现了以 ANSYS、NASTRAN 等为代表的应用极为广泛的结构有限元分析软件。计算机技术在机构的静力学分析、运动学分析、动力学分析以及控制系统分析上的应用，则在二十世纪八十年代形成了计算多体系统动力学，并产生了以 ADAMS 和 DADS 为代表的动力学分析软件。两者共同构成计算机辅助工程（CAE）技术的重要内容。

多体系统是指由多个物体通过运动副连接的复杂机械系统。多体系统动力学的根本目的是应用计算机技术进行复杂机械系统的动力学分析与仿真。它是在经典力学基础上产生的新学科分支，在经典刚体系统动力学上的基础上，经历了多刚体系统动力学和计算多体系统动力学两个发展阶段，目前已趋于成熟。

多刚体系统动力学是基于经典力学理论的，多体系统中最简单的情况——自由质点和一般简单的情况——少数多个刚体，是经典力学的研究内容。多刚体系统动力学就是为多个刚体组成的复杂系统的运动学和动力学分析建立适宜于计算机程序求解的数学模型，并寻求高效、稳定的数值求解方法。由经典力学逐步发展形成了多刚体系统动力学，在发展过程中形成了各具特色的多个流派。

早在 1687 年，牛顿就建立起牛顿方程解决了质点的运动学和动力学问题；刚体的概念最早由欧拉于 1775 年提出，他采用反作用力的概念隔离刚体以描述铰链等约束，并建立了经典力学中的牛顿-欧拉方程。1743 年，达朗贝尔研究了约束刚体系统，区分了作用力和反作用力，达朗贝尔将约束反力称为“丢失力”，并形成了虚功原理的初步概念。1788 年，拉格朗日发表了《分析力学》，系统地研究了约束机械系统，他系统地考虑了约束，并提出了广义坐标的概念，利用变分原理考虑系统的动能和势能，得出第二类拉格朗日方程——最少数量坐标的二阶常微分方程（ODE）；并利用约束方程与牛顿定律得出带拉格朗日乘子的第一类拉格朗日方程——最大数量坐标的微分代数方程（DAE）。虚功形式的动力学普遍方程尚不能解决具有非完整约束的机械系统问题，1908 年若丹给出了若丹原理——虚功率形式的动力学普遍方程，利用若丹原理可以方便地讨论碰撞问题和非完整系统的动力学问题。

对于由多个刚体组成的复杂系统，理论上可以采用经典力学的方法，即以牛顿-欧拉方法为代表的矢量力学方法和以拉格朗日方程为代表的分析力学方法。这种方法对于单刚体或者少数几个刚体组成的系统是可行的，但随着刚体数目的增加，方程复杂度成倍增长，寻求其解析解往往是不可能的。后来由于计算机数值计算方法的出现，使得面向具体问题的程序数值方法成为求解复杂问题的一条可行道路，即针对具体的多刚体问题列出其数学方程，再编制数值计算程序进行

求解。对于每一个具体的问题都要编制相应的程序进行求解，虽然可以得到合理的结果，但是这个过程长期的重复是让人不可忍受的，于是寻求一种适合计算机操作的程式化的建模和求解方法变得迫切需要了。在这个时候，也就是 20 世纪 60 年代初期，在航天领域和机械领域，分别展开了对于多刚体系统动力学的研究，并且形成了不同派别的研究方法。

最具代表性的几种方法是罗伯森-维滕堡（Roberson-Wittenburg）方法、凯恩（Kane）方法、旋量方法和变分方法。

罗伯森与维滕堡于 1966 年提出一种分析多刚体系统的普遍性方法，简称为 R/W 方法，这种方法的主要特点是利用图论的概念及数学工具描述多刚体系统的结构，以邻接刚体之间的相对位移作为广义坐标，导出适合于任意多刚体系统的普遍形式动力学方程，并利用增广体概念对方程的系数矩阵作出物理解释。R/W 方法以十分优美的风格处理了树结构多刚体系统，对于非树系统，通过铰切割或刚体分割方法将非树系统转变成树系统进行处理。

凯恩方法是在 1965 年左右形成的分析复杂系统的一种方法，其利用广义速率代替广义坐标描述系统的运动，直接利用达朗伯原理建立动力学方程，并将矢量形式的力与达朗伯惯性力直接向特定的基矢量方向投影以消除理想约束力，兼有矢量力学和分析力学的特点，既适用完整系统，也适用于非完整系统。

旋量方法是一种特殊的矢量力学方法（或牛顿-欧拉方法，简称为 N/E 方法），其特点是将矢量与矢量矩合为一体，采用旋量的概念，利用对偶数作为数学工具，使 N/E 方程具有极其简明的表达形式，在开链和闭链空间机构的运动学和动力学分析得到广泛运用。

变分方法是不同于矢量力学或分析力学的另一类分析方法，高斯最小拘束原理是变分方法的基本原理，保保夫和里洛夫从这一原理出发发展了两种不同风格的计算方法。该方法有利于结合控制系统的优化进行综合分析，而且由于其不受

铰的约束数目的影响，适用于带多个闭环的复杂系统。

这几种方法构成了早期多刚体系统动力学的主要内容，借助计算机数值分析技术，可以解决由多个物体组成的复杂机械系统动力学分析问题。但是多体系统动力学在建模与求解方面的自动化程度，相对于结构有限元分析的成熟来说相差甚远。正是为了解决多体系统动力学建模与求解的自动化问题，美国 Chace 和 Haug 于 80 年代提出了适宜于计算机自动建模与求解的多刚体系统笛卡尔建模方法，这种方法不同于以罗伯森-维滕堡方法为代表的拉格朗日方法，它是为以系统中每个物体为单元，建立固结在刚体上的坐标系，刚体的位置相对于一个公共参考基进行定义，其位置坐标统一为刚体坐标系基点的笛卡尔坐标与坐标系的方位坐标，再根据铰约束和动力学原理建立系统的数学模型进行求解。

20 世纪 80 年代，Haug 等人确立了“计算多体系统动力学”这门新的学科，多体系统动力学的研究重点由多刚体系统走向侧重多柔体系统，柔性多体系统动力学成为计算多体系统动力学的重要内容。

柔性多体系统动力学在 20 世纪 70 年代逐渐引起人们的注意，一些系统如高速车辆、机器人、航天器、高速机构、精密机械等其中柔性体的变形对系统的动力学行为产生很大影响。二十多年来柔性多体系统动力学一直是研究热点，这期间产生了许多新的概念和方法，有浮动标架法、运动-弹性动力学方法、有限段方法以及最新提出的绝对节点坐标法等，其中浮动标架法最早是在航天领域研究中提出来的。

计算多体系统动力学是指用计算机数值手段来研究复杂机械系统的静力学分析、运动学分析、动力学分析以及控制系统分析的理论和方法。相比于多刚体系统，对于柔性体和多体与控制混合问题的考虑是其重要特征。其具体任务为：

建立复杂机械系统运动学和动力学程式化的数学模型，开发实现这个数学模型的软件系统，用户只需输入描述系统的最基本数据，借助计算机就能自动进行

程式化处理。

开发和实现有效的处理数学模型的计算方法与数值积分方法，自动得到运动学规律和动力学响应。

实现有效的数据后处理，采用动画显示、图表或其他方式提供数据处理结果。

计算多体系统动力学的产生极大地改变了传统机构动力学分析的面貌，使工程师从传统的手工计算中解放了出来，只需根据实际情况建立合适的模型，就可由计算机自动求解，并可提供丰富的结果分析和利用手段；对于原来不可能求解或求解极为困难的大型复杂问题，现可利用计算机的强大计算功能顺利求解；而且现在的动力学分析软件提供了与其它工程辅助设计或分析软件的强大接口功能，它与其它工程辅助设计和分析软件一起提供了完整的计算机辅助工程（CAE）技术。

2.1.2 多体系统动力学研究活动

自 20 世纪 60 年代以来，国内外在多体系统动力学方面多次召开了深具意义的会议。国际范围内的会议主要有：

1977 年国际理论和应用力学学会（International Union of Theoretical and Applied Mechanics - IUTAM）发起在德国慕尼黑由 Magnus 主持召开第一次多刚体系统动力学讨论会；

1983 年北大西洋公约组织与美国国家科学基金委等（NATO-NSF-ARD）联合组织在美国爱阿华由 Haug 主持召开“机械系统动力学计算机辅助分析与优化高级研讨会”；

1985 年第八届国际车辆动力学协会（International Association of Vehicle System Dynamics - IAVSD）会议，Kortum 和 Schiehlen 发表了用于车辆动力学仿真的多体软件。

1985 年 IUTAM 与国际机器及机构理论联合会（IFTOMM）联合在意大利 Udine 由 Bianchi 和 Schiehlen 主持举行了第二届国际多体系统动力学讨论会，这次会议总结了该领域的进展，标志多刚体系统动力学已趋于成熟。

1989 年由德国斯图加特大学主持对当时比较先进的大型软件进行测试，编辑出版了“多体系统手册”；以后几乎每年都有国际的多体系统动力学的会议，并出现了多体系统动力学的专门的刊物。

在国内召开的关于多体系统动力学方面的重要会议主要有：

1986 年由中国力学学会一般力学专业委员会在北京主持召开“多刚体系统动力学”研讨会。

1988 年在长春召开“柔性多体系统动力学研讨会”。

1992 年在上海召开“全国多体系统动力学—理论、计算方法与应用学术会议”。

1996 年由中国力学学会一般力学专业委员会与中国空间学会空间机械委员会联合在山东长岛召开“全国多体系统动力学与控制学术会议”。

除了国内外重要的会议之外，国内外还出版了多种关于多体系统动力学的优秀教材或专著。国外的优秀教材和专著主要有：

1977 年，Witenburg 出版了“Dynamics of Systems of Rigid Bodies”，这是第一本关于多体系统的教材，其奠定了多刚体系统动力学拉朗日方法的基础，并将图论方法引入到多体系统动力学中。

1986 年，Schiehlen 出版了“Technische Dynamik”（德语），其将多体系统作为与有限元系统及连续系统相当的系统来统一考虑。

1988 年，Nikravesh 出版了“Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems”。

1988 年，Roberson 和 Schwertassek 出版了“Dynamics of Multibody System”。

1989 年，Haug 出版了“Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems”，提出了多刚体系统建模的笛卡尔方法。

1989 年，Shabana 出版了“Dynamics of Multibody Systems”，这是一本关于多柔体动力学的专著。

1990 年，Huston 出版了“Multibody Dynamics”，其讨论了多体系统动力学、数值方法以及柔性多体系统动力学。

1992 年，Bremer 和 Pfeiffer 出版了“Elastische Mehrkorpersystem”（德语），其主要讨论了柔性体，并给出了诸多工程实例。

1992 年，Amirouche 出版了“Computational Methods for Multibody Dynamics”，重点讨论了矩阵方法。

1994 年，Garcia 和 Bayo 出版了“Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems”，提出了完全笛卡尔坐标方法，并给出了一种求解效率高的计算方法用于实时仿真的需要。

1994 年，Shabana 出版了“Computational Dynamics”，主要是有关多刚体系统。

1996 年，Stejskal 和 Valasek 出版了“Kinematics and Dynamics of Machinery”，从空间机构的 CAD 设计入手，讨论了自由刚体问题，给出了高副和低副运动学约束的描述，并讨论了动力学分析以及数值计算方面的问题。

国内有影响的教材和专著主要有：

刘延柱，洪嘉振，杨海兴. 多刚体系统动力学. 北京：高等教育出版社，1989

黄文虎 邵成勋 等. 多柔体系统动力学. 北京：科学出版社，1996

陆佑方. 柔性多体系统动力学. 北京：高等教育出版社，1996

洪嘉振. 计算多体系统动力学. 北京：高等教育出版社，1999

2.1.3 多体系统动力学研究现状

计算多体系统动力学中所研究的多体系统，根据系统中物体的力学特性可分为多刚体系统、柔性多体系统和刚柔混合多体系统。多刚体系统是指可以忽略系统中物体的弹性变形而将其当作刚体来处理的系统，该类系统常处于低速运动状态；柔性多体系统是指系统在运动过程中会出现物体的大范围运动与物体的弹性变形的耦合，从而必须把物体当作柔性体处理的系统，大型、轻质而高速运动的机械系统常属此类；如果柔性多体系统中有部分物体可以当作刚体来处理，那么该系统就是刚柔混合多体系统，这是多体系统中最一般的模型。

2.1.3.1 多体系统建模理论

对于多刚体系统，从 20 世纪 60 年代到 80 年代，在航天和机械两个领域形

成了两类不同的数学建模方法，分别称为拉格朗日方法和笛卡尔方法；20 世纪 90 年代，在笛卡尔方法的基础上又形成了完全笛卡尔方法。这几种建模方法的主要区别在于对刚体位形描述的不同。

航天领域形成的拉格朗日方法，是一种相对坐标方法，以 Roberson-Wittenburg 方法为代表，是以系统每个铰的一对邻接刚体为单元，以一个刚体为参考物，另一个刚体相对该刚体的位置由铰的广义坐标（又称拉格朗日坐标）来描述，广义坐标通常为邻接刚体之间的相对转角或位移。这样开环系统的位置完全可由所有铰的拉格朗日坐标阵所确定。其动力学方程的形式为拉格朗日坐标阵的二阶微分方程组，即

…………………………………………………………… (2.1-1)

这种形式首先在解决拓扑为树的航天器问题时推出。其优点是方程个数最少，树系统的坐标数等于系统自由度，而且动力学方程易转化为常微分方程组（ODEs - Ordinary Differential Equations）。但方程呈严重非线性，为使方程具有程式化与通用性，在矩阵与中常常包含描述系统拓扑的信息，其形式相当复杂，而且在选择广义坐标时需人为干预，不利于计算机自动建模。不过目前对于多体系统动力学的研究比较深入，现在有几种应用软件采用拉格朗日的方法也取得了较好的效果。

对于非树系统，拉格朗日方法要采用切割铰的方法以消除闭环，这引入了额外的约束，使得产生的动力学方程为微分代数方程，不能直接采用常微分方程算法去求解，需要专门的求解技术。

机械领域形成的笛卡尔方法是一种绝对坐标方法，即 Chace 和 Haug 提出的方法，以系统中每一个物体为单元，建立固结在刚体上的坐标系，刚体的位置相对于一个公共参考基进行定义，其位置坐标（也可称为广义坐标）统一为刚体坐标系基点的笛卡尔坐标与坐标系的方位坐标，方位坐标可以选用欧拉角或欧拉参数。单个物体位置坐标在二维系统中为 3 个，三维系统中为 6 个（如果采用欧拉

参数为 7 个)。对于由 N 个刚体组成的系统，位置坐标阵中的坐标个数为 3N（二维）或 6N（或 7N）（三维），由于铰约束的存在，这些位置坐标不独立。系统动力学模型的一般形式可表示为

………………………………………………………………(2.1-2)

式中为位置坐标阵的约束方程，为约束方程的雅可比矩阵，为拉格朗日乘子。这类数学模型就是微分-代数方程组（DAEs - Differential Algebraic Equations），也称为欧拉-拉格朗日方程组（Euler-Lagrange Equations），其方程个数较多，但系数矩阵呈稀疏状，适宜于计算机自动建立统一的模型进行处理。笛卡尔方法对于多刚体系统的处理不区分开环与闭环（即树系统与非树系统），统一处理。目前国际上最著名的两个动力学分析商业软件 ADAMS 和 DADS 都是采用这种建模方法。

完全笛卡尔坐标方法，由 Garcia 和 Bayo 于 1994 年提出，是另一种形式的绝对坐标方法。这种方法的特点是避免使用一般笛卡尔方法中的欧拉角或欧拉参数，而是利用与刚体固结的若干参考点和参考矢量的笛卡尔坐标描述刚体的空间位置与姿态。参考点选择在铰的中心，参考矢量沿铰的转轴或滑移轴，通常可由多个刚体共享而使未知变量减少。完全笛卡尔坐标所形成的动力学方程与一般笛卡尔方法本质相同，只是其雅可比矩阵为坐标线性函数，便于计算。

至于柔性多体系统，从计算多体系统动力学角度看，柔性多体系统动力学的数学模型首先应该和多刚体系统与结构动力学有一定的兼容性。当系统中的柔性体变形可以不计时，即退化为多刚体系统。当部件间的大范围运动不存在时，即退化为结构动力学问题。

柔性多体系统不存在连体基，通常选定一浮动坐标系描述物体的大范围运动，物体的弹性变形将相对该坐标系定义。弹性体相对于浮动坐标系的离散将采用有限单元法与现代模态综合分析方法。在用集中质量有限单元法或一致质量有限单元法处理弹性体时，用结点坐标来描述弹性变形。在用正则模态或动态子结

构等模态分析方法处理弹性体时用模态坐标描述弹性变形。这就是莱肯斯首先提出的描述柔性多体系统的混合坐标方法。即用坐标阵描述系统的位形，其中 q 为浮动坐标系的位形坐标，a 为变形坐标。考虑到多刚体系统的两种流派，在柔性多体系统动力学中也相应提出两种混合坐标，即浮动坐标系的拉格朗日坐标加弹性坐标与浮动坐标系的笛卡尔坐标加弹性坐标。

根据动力学基本原理推导的柔性多体系统动力学方程，形式同式（2.1-1）和（2.1-2），只是将 q 用 p 代替。即，柔性多体系统具有与多刚体系统类同的动力学数学模型。

2.1.3.2 .多体系统动力学数值求解

多刚体系统拉格朗日方法产生的形如式（2.1-1）的动力学数学模型，是形式复杂的二阶常微分方程组（ODEs），系数矩阵包含描述系统拓扑的信息。对于该类问题的求解，通常采用符号-数值相结合的方法或者全数值的方法。符号-数值方法是先采用基于计算代数的符号计算方法，进行符号推导，得到多刚体系统拉格朗日模型系数矩阵简化的数学模型，再用数值方法求解 ODE 问题。鉴于计算机技术的发展，目前全数值方法也较为流行，就是将多刚体系统拉格朗日数学模型当作一般 ODE 问题进行求解，这方面的技术已经较为成熟。

多刚体系统笛卡尔方法产生的形如式（2.1-2）的动力学数学模型，是著名的微分-代数方程组（DAEs）。DAE 问题是计算多体系统动力学领域的热点问题。

柔性多体系统的动力学数学模型，其形式与多刚体系统相同，可以借鉴多刚体系统数学模型的求解方法。只是混合坐标中描述浮动坐标系运动的刚体坐标 q 通常是慢变大幅值的变量，而描述相对于浮动坐标系弹性变形的坐标 a 却为快变微幅的变量，两类变量出现在严重非线性与时变的耦合动力学方程中，其数值计算呈病态，将出现多刚体系统中见不到的数值计算困难。

综上所述，多体系统动力学问题的求解集中于微分-代数方程组的求解，下面将简要地介绍一下DAE问题的求解方法，更具体的介绍，将在（2.5）节进行。

1、微分-代数方程组的特性

多刚体系统采用笛卡尔方法建模生成的微分-代数方程组为：

………………………… (2.1-3)

………………………………………………………… (2.1-4)

其中，、、分别是系统位置、速度、加速度向量，是拉格朗日乘子，是时间，为机械系统惯性矩阵，为约束雅可比矩阵，为外力向量，为位置约束方程。

将式(1.4)对时间求一阶和二阶导数，得到速度和加速度约束方程：

……………………………… (2.1-5)

………………………… (2.1-6)

其中，称为速度右项，称为加速度右项。

给定方程组初始条件：

………………………………………………………… (2.1-7)

微分-代数方程组的特性和需要注意的问题有：

微分-代数方程问题不是常微分方程（ODE）问题；

由式(2.1-3)和(2.1-4)组成的微分-代数方程组是指标 3 问题，通过对约束方程求导化为由式(2.1-3)-(2.1-6)组成的微分-代数方程组后，其指标降为 1；

微分-代数方程数值求解的关键在于避免积分过程中代数方程的违约现象；

初值式(2.1-7)与位置约束式(2.1-4)及速度约束式(2.1-5)的相容性；

微分-代数方程组的刚性问题。

2、微分-代数方程组积分技术

自二十世纪七十年代以来，国际上对微分-代数方程问题作了大量的研究，时至如今，新的算法仍不断涌现。根据对位置坐标阵和拉格朗日乘子处理技术的不同，可以将微分-代数方程组问题的处理方法分为增广法和缩并法。

传统的增广法是把广义坐标加速度和拉格朗日乘子作为未知量同时求解，再对加速度进行积分求出广义坐标速度及广义坐标位置，包括直接积分法和约束稳定法。近十年来，在传统增广法的基础上又发展形成了超定微分-代数方程组（ODAEs）方法等新的一类算法。

直接积分法：将式(2.1-3)和(2.1-6)联立在一起，同时求出与，然后对积分得和。该方法未考虑式(2.1-4)和(2.1-5)的坐标和速度违约问题，积分过程中误差积累严重，很易发散。在实际的数值计算过程中，并不直接采用直接积分法，但在直接积分法的基础上发展了一系列控制违约现象的数值方法。

约束稳定法：将控制反馈理论引入微分-代数方程组的数值积分过程以控制违约现象。通过把式(2.1-6)右边量替换为含位置约束和速度约束的参数式，保证位置约束和速度约束在式(2.1-3)和(2.1-6)联立求解时恒满足。该方法稳定性好，响应快，但如何选择参数式中速度项和位置项适当的系数是一个问题。

超定微分-代数方程组（ODAEs）法：将系统速度作为变量引入微分-代数方程组，从而将原来的二阶DAE化为超定的一阶DAE，再为所得方程组引入未知参数，根据模型的相容性消除系统的超定性，如此可使数值计算的稳定性明显改变。或者将系统位置、速度、加速度向量和拉格朗日乘子向量联立作为系统广义坐标，再将由式(2.1-3)、(2.1-4)、(2.1-5)和(2.1-6)组成的微分-代数方程组及速度与位置、加速度与速度的微分关系式作为约束，化二阶DAE为超定的一阶DAE，再根据系统相容性引入二个未知参数，消除超定性，这样所得的最终约化模型更为简单，但方程组要多n个。在ODAE方法的基础上产生了一系列新的更为有效的算法。

解耦ODAE法：在ODAE方法的基础上，发展形成了一类解耦思想，就是在ODAEs基础上，对常用的隐式ODE方法采用预估式，再按加速度、速度和位置的顺序进行求解。后来进一步发展形成了无需对隐式ODE方法利用预估式的解耦思想，更一步地提高了效率。

缩并法就是通过各种矩阵分解方法将描述系统的n个广义坐标用p个独立坐标表达，从而将微分-代数方程组从数值上化为与式(2.1-1)类似的数学模型，如此易于用ODE方法进行求解。传统的缩并法包括LU分解法、QR分解法、SVD分解法以及零空间方法等，后来在传统缩并法的基础上产生了局部参数化缩并方法等新的算法。缩并法中的这些具体方法，分别对应着约束雅可比矩阵的不同分解。

LU分解法：又称为广义坐标分块法。把广义位置坐标用相关坐标和独立坐标分块表示，再将约束雅可比矩阵用LU分解法分块，得到广义坐标速度、加速度用独立坐标速度、加速度表达的式子。将这两个表达式代入式(2.1-3)，就可得到形如式(2.1-1)的关于独立坐标加速度的二阶微分方程。该算法可靠、精确，并可控制误差，但效率稍低。

QR分解法：通过对约束雅可比矩阵正交分解的结果作微分流型分析，得到可选作受约束系统独立速度的，并将微分-代数方程组化作形如式(2.1-1)的关于的二阶微分方程，如此可保证在小时间间隔内由积分引起的广义坐标的变化不会导

致大的约束违约。

SVD 分解法：把约束雅可比矩阵作奇异值分解所得结果分别用于式(2.1-3)和(2.1-6)，得到缩并后的系统动力学方程。在该方法推导过程中没有用到式(2.1-4)和(2.1-5)，所以也存在位置和速度违约问题，可用约束稳定法改善其数值性态。

可微零空间法：通过 Gram-Schmidt 正交化过程自动产生约束雅可比矩阵的可微、唯一的零空间基，来对系统方程降阶。具体做法是对由和任意矩阵构造的矩阵采用 Gram-Schmidt 正交化过程，将化为正交非奇异矩阵。再引入新的速度矢量，使满足，将新速度矢量和加速度矢量按正交化结果分块，得到新的独立速度矢量和加速度矢量。如此可将微分-代数方程组化为关于新的独立加速度矢量的动力学方程。

局部参数化缩并方法：先将式(2.1-3)-(2.1-6)改写为等价的一阶形式，再用微分流形理论的切空间局部参数化方法将等价的欧拉-拉格朗日方程降为参数空间上的常微分方程。

总的说来，微分-代数方程组数值求解的方法都可归为增广法或缩并法，除了上面所介绍的这些增广法和缩并法所运用的增广和缩并技术外，近几年来还出现了不少独具特色的处理算法，它们或者是在数值求解算法中独具匠心，或者针对某些具体情况作了专门研究。

3、相容性问题和刚性问题

初值相容性问题：在微分-代数方程组的数值求解过程中，给定的位置和速度初始条件与微分-代数方程组中的位置和速度约束的相容性是值得注意的一个问题。相容性是微分-代数方程组有解的必要条件。

刚性问题：由于现代机械系统的复杂性，会由于系统的耦合而使所得到的微分-代数方程组呈现刚性特性。对于刚性问题的求解，目前最常用的方法是隐式

方法，隐式方法不仅用于求解刚性问题，而且相比于显式方法具有更好的稳定性和计算精度。近几年来，无论是在 LU 分解法基础上发展起来的新缩并法，还是基于 ODAE 方法的增广法，或是基于多体系统正则方程的解法，应用的无不是隐式方法。关于刚性问题的进一步介绍见 2.5 节。

2.2 多刚体系统动力学建模

计算多体系统动力学分析，首先在于提供一个友好方便的界面以利于建立多体系统的力学模型，并在系统内部由多体系统力学模型得到动力学数学模型；再者需要有一个优良的求解器对数学模型进行求解，求解器要求效率高、稳定性好，并具有广泛的适应性；最后还需要对求解结果提供丰富的显示查询手段。这其中的关键技术就是自动建模技术和求解器设计，所谓自动建模就是由多体系统力学模型自动生成其动力学数学模型，求解器的设计则必须结合系统的建模，以特定的动力学算法对模型进行求解。

本节首先给出多体系统动力学的一些基本概念，再介绍计算多体系统动力学建模与求解的一般过程，然后作为重点，按豪格（Haug）的笛卡尔方法给出多体系统的运动学和动力学数学模型，这是考虑到目前最负盛名的两个多体系统软件都是采用笛卡尔方法，最后简要叙述自动建模技术。

2.2.1 多体系统动力学基本概念

物理模型：这里也称力学模型，由物体、铰、力元和外力等要素组成并具有一定拓扑构型的系统。

拓扑构型：多体系统中各物体的联系方式称为系统的拓扑构型，简称拓扑。根据系统拓扑中是否存在回路，可将多体系统分为树系统与非树系统。系统中任

意两个物体之间的通路唯一，不存在回路的，称为树系统；系统中存在回路的称为非树系统。

物体：多体系统中的构件定义为物体。在计算多体系统动力学中，物体区分为刚性体（刚体）和柔性体（柔体）。刚体和柔体是对机构零件的模型化，刚体定义为质点间距离保持不变的质点系，柔体定义为考虑质点间距离变化的质点系。

约束：对系统中某构件的运动或构件之间的相对运动所施加的限制称为约束。约束分为运动学约束和驱动约束，运动学约束一般是系统中运动副约束的代数形式，而驱动约束则是施加于构件上或构件之间的附加驱动运动条件。

铰：也称为运动副，在多体系统中将物体间的运动学约束定义为铰。铰约束是运动学约束的一种物理形式。

力元：在多体系统中物体间的相互作用定义为力元，也称为内力。力元是对系统中弹簧、阻尼器、致动器的抽象，理想的力元可抽象为统一形式的移动弹簧-阻尼器-致动器（TSDA），或扭转弹簧-阻尼器-致动器（RSDA）。

外力（偶）：多体系统外的物体对系统中物体的作用定义为外力（偶）。

数学模型：分为静力学数学模型、运动学数学模型和动力学数学模型，是指在相应条件下对系统物理模型（力学模型）的数学描述。

机构：装配在一起并允许作相对运动的若干个刚体的组合。

运动学：研究组成机构的相互联接的构件系统的位置、速度和加速度，其与产生运动的力无关。运动学数学模型是非线性和线性的代数方程。

动力学：研究外力（偶）作用下机构的动力学响应，包括构件系统的加速度、速度和位置，以及运动过程中的约束反力。动力学问题是已知系统构型、外力和初始条件求运动，也称为动力学正问题。动力学数学模型是微分方程或者微分方程和代数方程的混合。

静平衡：在与时间无关的力作用下系统的平衡，称为静平衡。静平衡分析一种特殊的动力学分析，在于确定系统的静平衡位置。

逆向动力学：逆向动力学分析是运动学分析与动力学分析的混合，是寻求运动学上确定系统的反力问题，与动力学正问题相对应，逆向动力学问题是已知系统构型和运动求反力，也称为动力学逆问题。

连体坐标系：固定在刚体上并随其运动的坐标系，用以确定刚体的运动。刚体上每一个质点的位置都可由其在连体坐标系中的不变矢量来确定。

广义坐标：唯一地确定机构所有构件位置和方位即机构构形的任意一组变量。广义坐标可以是独立的（即自由任意地变化）或不独立的（即需要满足约束方程）。对于运动系统来说，广义坐标是时变量。

自由度：确定一个物体或系统的位置所需要的最少的广义坐标数，称为该物体或系统的自由度。

约束方程：对系统中某构件的运动或构件之间的相对运动所施加的约束用广义坐标表示的代数方程形式，称为约束方程。约束方程是约束的代数等价形式，是约束的数学模型。

2.2.2 计算多体系统动力学建模与求解一般过程

一个机械系统，从初始的几何模型，到动力学模型的建立，经过对模型的数值求解，最后得到分析结果，其流程如图 2.1 所示。

计算多体系统动力学分析的整个流程，主要包括建模和求解两个阶段。建模分为物理建模和数学建模，物理建模是指由几何模型建立物理模型，数学建模是指从物理模型生成数学模型。几何模型可以由动力学分析系统几何造型模块所建造，或者从通用几何造型软件导入。对几何模型施加运动学约束、驱动约束、力元和外力或外力矩等物理模型要素，形成表达系统力学特性的物理模型。物理建模过程中，有时候需要根据运动学约束和初始位置条件对几何模型进行装配。由物理模型，采用笛卡尔坐标或拉格朗日坐标建模方法，应用自动建模技术，组装系统运动方程中的各系数矩阵，得到系统数学模型。对系统数学模型，根据情况应用求解器中的运动学、动力学、静平衡或逆向动力学分析算法，迭代求解，得到所需的分析结果。联系设计目标，对求解结果再进行分析，从而反馈到物理建模过程，或者几何模型的选择，如此反复，直到得到最优的设计结果。

在建模和求解过程中，涉及到几种类型的运算和求解。首先是物理建模过程中的几何模型装配，图 2.1 中称为“初始条件计算”，这是根据运动学约束和初始位置条件进行的，是非线性方程的求解问题；再就是数学建模，是系统运动方程中的各系数矩阵自动组装过程，涉及大型矩阵的填充和组装问题；最后是数值求解，包括多种类型的分析计算，如运动学分析、动力学分析、静平衡分析、逆向动力学分析等。运动学分析是非线性的位置方程和线性的速度、加速度方程的求解，动力学分析是二阶微分方程或二阶微分方程和代数方程混合问题的求解，静平衡分析从理论上讲是一个线性方程组的求解问题，但实际上往往采用能量的方法，逆向动力学分析是一个线性代数方程组求解问题，这里面，最复杂的是动力学微分代数方程的求解问题，它是多体系统动力学的核心问题。

在多体系统动力学建模与求解过程中，还有一个问题是值得注意的——初值相容性问题，这是在任何正式求解之前必须首先解决的问题，直接影响到问题的可解性。初值相容性是要求系统中所有的位置、速度初始条件必须与系统运动学

约束方程相容。对于简单问题，初值相容性是易于保证的，但对于大型复杂系统，必须有专门的初值相容性处理算法以判断系统的相容性或由一部分初值计算相容的其它初值。

在多体系统建模与求解过程，求解器是核心，这其中涉及的所有运算和求解，如初始条件计算、方程自动组装、各种类型的数值求解等等都由求解器所支持，它提供了所需的全部算法。

实际上，结果分析是需要有专门的数值后处理器来支持的，以提供曲线和动画显示以及其它各种辅助分析手段。但相比于多体系统建模与求解，数值后处理器相对简单，不存在什么理论上的重要问题。

图 2.1　计算多体系统动力学建模与求解一般过程

2.2.3 多刚体系统运动学

对于多体系统的运动学分析，传统的理论力学是以刚体位置、速度和加速度的微分关系以及矢量合成原理为基础进行分析的，而计算多体系统动力学中的运动学分析则是以系统中连接物体与物体的运动副为出发点，所进行的位置、速度和加速度分析都是基于与运动副对应的约束方程来进行的。

基于约束的多体系统运动学，首先寻求与系统中运动副等价的位置约束代数方程，再由位置约束方程的导数得到速度、加速度的约束代数方程，对这些约束方程进行数值求解，可得到广义位置坐标及相应的速度和加速度坐标，最后根据坐标变换就可以由系统广义坐标及相应导数得到系统中任何一点的位置、速度和加速度。

由于机械系统在二维空间运动时，广义坐标、约束方程、问题规模以及问题

求解都相对简单，故本节先讨论二维多体系统运动学以解释多体系统运动学基本理论，在此基础上再给出三维多体系统的运动学方程。

2.2.3.1 约束方程（位置方程）

设一个平面机构由个刚性构件组成。在机构所在平面上建立一个全局坐标系，机构在该坐标系中运动；再为机构上每个构件建立各自的连体坐标系，可由连体坐标系的运动确定构件的运动。选定构件连体坐标系原点的全局坐标和连体坐标系相对于全局坐标系的转角组成构件的笛卡尔广义坐标矢量，如图 2.2 所示。由个刚性构件组成的系统的广义坐标数，则系统广义坐标矢量可表示为。

图 2.2 平面笛卡尔广义坐标

一个实际的机械系统，系统中构件与支架或构件与构件之间存在运动副的联接，这些运动副可以用系统广义坐标表示为代数方程。设表示运动副的约束方程数为，则用系统广义坐标矢量表示的运动学约束方程组为

………………………(2.2-1)

这里给出的是定常完整约束情况。如果约束方程与时间相关，则自变量中显含时间项，这种约束被称为非定常约束；更一般的约束方程含有不可积速度项的不等式或关系式，这种约束称为非完整约束。一般的运动学约束是定常完整约束。

对于一个有个广义坐标和个约束方程的机械系统，若，且这个约束方程是独立、相容的，则系统自由度。为使系统具有确定运动，可以有二种方法：

（1）为系统添加与系统自由度 DOF 相等的附加驱动约束；

（2）对系统施加力的作用。

在（1）情况下，系统实际自由度为零，被称为是在运动学上确定的，在此情况下求解系统运动过程中的位置、速度和加速度的分析是运动学分析，运动学分析本身不涉及作用力或反作用力问题。但是对于运动学上确定的系统，可以求解系统中约束反力，即已知运动求作用力，这是动力学逆问题。

在（2）情况下，系统有着大于零的自由度，但是在外力作用力，对于具有确定构型和特定初始条件的系统，其动力学响应是确定的，这种情况下求解系统运动过程中的位置、速度和加速度的分析，称为动力学分析。在这种情况下，特殊地，如果外力与时间无关，可以求解系统的静平衡位置，这就是静平衡分析问题。

考虑运动学分析，为使系统具有确定运动，也就是要使系统实际自由度为零，为系统施加等于自由度（）的驱动约束

……………………………………………………………(2.2-2)

在一般情况下，驱动约束是系统广义坐标和时间的函数。驱动约束在其集合内部及其与运动学约束合集中必须是独立和相容的，在这种条件下，驱动系统运动学上是确定的，将作确定运动。

由式（2.2-1）表示的系统运动学约束和式（2.2-2）表示的驱动约束组合成系统所受的全部约束

…………………………………………(2.2-3)

式（2.2-3）为 nc 个广义坐标的 nc 个非线性方程组，其构成了系统位置方程。求解式（2.2-3），就可得到系统在任意时刻的广义坐标位置。

2.2.3.2 速度和加速度方程

对式(2.2-3)运用链式微分法则求导，得到速度方程

…………………………….(2.2-4)

若令，则速度方程为

…………………………………….(2.2-5)

如果是非奇异的，可以求解式(2.2-5)得到各离散时刻的广义坐标速度。

对式(2.2-4)运用链式微分法则求导，可得加速度方程

…(2.2-6)

若令，则加速度方程为

…………………………(2.2-7)

如果是非奇异的，可以求解式(2.2-7)得到各离散时刻的广义坐标加速度。

在速度方程(2.2-5)和加速度方程(2.2-7)中出现的矩阵，称为雅可比矩阵，雅可比矩阵是约束多体系统运动学和动力学分析中最重要的矩阵。如果的维数为m，q 维数为 n，那么维数为矩阵，其定义为。这里为的方阵。

对式(2.2-5)中的和式(2.2-7)中的进行计算时，会涉及到二阶导数，在实际的数值求解中，并不是实时地调用求导算法来进行计算，而是先根据具体的约束类型，导出二阶导数以及雅可比矩阵的表示式，在计算中只需代入基本的数据即可。

2.2.3.3 坐标变换与任意点运动

在确定系统中构件上任意点的运动时，常要求将构件上点从连体坐标系变换到全局坐标系中，现讨论连体坐标系与全局坐标系的坐标变换及构件上任意点运动。

设矢量在全局坐标系和某连体坐标系中分别表示为

....(2.2-8)

若任意点在全局坐标系和连体坐标系中坐标如图 2.2-3 所示，则存在如下坐标变换关系

....(2.2-9)

其中，为点在全局坐标系中的坐标，为连体坐标系原点在全局坐标系中的坐标，为矢量在全局坐标系中坐标，为矢量在连体坐标系中的坐标，为旋转变换矩阵，其形式为

....(2.2-10)

对时间的导数为

........................(2.2-11)

根据式(2.2-9)，我们可以得到以连体坐标系表示的构件上的任一点的全局坐标。

图 2.3 二维空间坐标变换　　　　　　　　　　　图 2.4 三维空间坐标变换

式(2.2-9)对时间求导数，可得任意点的速度变换公式

……………………………………….(2.2-12)

式(2.2-12)对时间求导数，可得任意点的加速度变换公式

………………………..(2.2-13)

对于一个平面机构来说，进行运动学分析时，先是选定最大集的广义坐标，再分别根据式(2.2-3)、(2.2-5)和(2.2-7)求解机构在各离散时刻的广义坐标位置、广义坐标速度和广义坐标加速度。对于任意一个由连体坐标系确定的构件上的点，可以根据式(2.2-9)、(2.2-12)和(2.2-13)求解其位置、速度和加速度。

2.2.3.4 三维多刚体系统运动学

三维多体系统的运动分析与二维多体系统较为相似，只是广义坐标选取复杂一些，约束方程形式复杂一些，问题规模要大一些。三维多体系统广义坐标与二维相似，也是由位置坐标和方位（或称为姿态）坐标组成，位置坐标表示较为固定，都是由连体坐标系基点坐标确定，方位坐标则具有多种形式，如方向余弦矩阵、欧拉角、卡尔丹角、有限转动四元数、欧拉参数等等，最常用的是欧拉角和欧拉参数。这里先给出三维机械系统广义坐标的方向余弦与欧拉参数和欧拉角几种形式及其之间的变换，再据此给出系统的约束方程、速度方程和加速度方程的形式。

1、坐标变换、欧拉参数与欧拉角

对于三维空间机构，采用固联在构件上的连体坐标系来确定系统运动。构件的广义坐标，由两个部分组成，一是连体坐标系的原点坐标，二是确定连体坐标系相对于全局坐标系的方位参数。如图 2. 4 所示，连体坐标系原点坐标为，相对于全局坐标系的方位可用方向余弦矩阵表示，也可用欧拉参数或者欧拉角，这几种具有相同几何意义，但数值特性不同。

方向余弦矩阵定义为

......................................(2.2-14)

其中,、和分别为连体坐标系坐标轴、和的单位矢量。方向余弦矩阵为正交矩阵，因此，中 9 个变量受 6 个独立方程的约束，方向余弦矩阵中只存在说明 3 个转动自由度的独立变量。

如果连体坐标系和全局坐标系的原点重合，即，则矢量在连体坐标系中的表示形式和在全局坐标系中的表示形式存在如下变换关系

....(2.2-15)

更一般的坐标变换式为

....(2.2-16)

其中，为点在坐标系中的坐标，为坐标系原点在坐标系中的坐标，为点在坐标系中的坐标，为相对于的方向余弦矩阵。

对式(2.2-16)求时间导数，得速度变换式

....(2.2-17)

其中是的斜对称矩阵（斜对称矩阵定义见式 2.2-31），称为连体坐标系相对于全局坐标系的角速度矢量，表示为

....(2.2-18)

若将角速度矢量运用式(2.2-15)的相关导出式变换到坐标系并表示为，则存在

....(2.2-19)

....(2.2-20)

对式(2.2-17)求时间导数，得加速度变换式

....(2.2-21)

其中

....(2.2-22)

如果定义与位移和角速度对应的虚位移和虚转动，则式(2.2-17)、(2.2-18)、(2.2-19)和(2.2-20)存在相应的变分形式

....   (2.2-23)

....   (2.2-24)

....   (2.2-25)

…………·····························…………… (2.2-26)

角速度和虚转动是不可积的，因此角速度也被称为拟坐标。

根据刚体转动的欧拉定理，确定刚体的方位还可以采用欧拉定理中的转动轴和转动角。如果坐标系与坐标系原点重合，由欧拉定理知可设绕单位轴矢量转动角与重合，现可由和定义一个 4 欧拉参数组

……………………………………………… (2.2-27)

欧拉参数用列向量表示为

………………………………… (2.2-28)

欧拉参数要满足欧拉参数归一化约束

……………………………………… (2.2-29)

故欧拉参数 4 个分量中存在 3 个独立分量，描述物体转动。

欧拉参数和方向余弦矩阵都是描述物体方位的参数，它们是等价的，其间存在着变换关系，从欧拉参数到方向余弦矩阵的变换为

………………………………… (2.2-30)

其中为单位矩阵，为的斜对称矩阵，其表示为

…………………………………………… (2.2-31)

从方向余弦矩阵到欧拉参数的变换为

……………………………………… (2.2-32)

上式中,，若由式(2.2-32)中第一式计算得，则由下列式子确定欧拉参数

……………………………………… (2.2-33)

式中为矩阵的迹。

为研究欧拉参数与角速度之间的关系，定义两个辅助矩阵

……………………… (2.2-34)

…………………… (2.2-35)

可得到如下关系式

……………………………………………………… .(2.2-36)

……………………………………………………………. (2.2-37)

…………………………………………………………(2.2-38)

……………………………………………………… (2.2-39)

………………………………………… .(2.2-40)

上述式(2.2-37)～(2.2-40)的变分形式为

……………………………………… (2.2-41)

…………………………………………………………………. (2.2-42)

(2.2-43)

(2.2-44)

对于上述各式中所涉及的角速度和虚转动，并不象欧拉参数的导数或变分一样是可积的，所以在积分用角速度或虚转动表示的运动方程时，不可直接积分，需要利用上述公式将角速度或虚转动变换为欧拉参数的导数或变分，再作积分运算。

根据欧拉定理，可以将刚体的方位分解为连体坐标系从与全局坐标系重合的始点起，依次绕连体坐标系自身的、和转过有限角度、和来确定，即相对体 313 转动序列，三个角度坐标、和即为欧拉角，其中为进动角，为章动角，为自转角。

用欧拉角表示的方向余弦矩阵为：

(2.2-45)

从方向余弦矩阵到欧拉角的变换为：

(2.2-46)

当章动角时，式（2.2-46）失效，进动角和自转角不能确定，称为欧拉角奇异点。

欧拉角表示的欧拉参数为：

(2.2-47)

从欧拉参数到欧拉角的变换为：

(2.2-48)

2、位置、速度和加速度分析

在一个三维多体系统中，构件的广义坐标矢量由其连体坐标系原点坐标和欧位参数组成，表示为

(2.2-49)

对于由个构件组成的系统，其广义坐标矢量组为

(2.2-50)

系统广义坐标维数为。

采用欧拉参数广义坐标，每个构件的欧拉参数广义坐标必须满足式(2.2-29)的归一化约束，即

，(2.2-51)

系统的欧拉参数归一化约束方程的矢量形式为

(2.2-52)

方程组维数为。

与二维系统类似，设与运动副等价的约束方程数为，则系统运动学约束方程的矢量形式为

(2.2-53)

为使系统具有确定运动，对系统施加个独立的驱动约束，系统驱动约束方程的矢量形式为

(2.2-54)

据此，由系统的欧拉参数归一化约束方程、运动学约束方程及驱动约束方程组成的系统约束方程，或称位置方程为

(2.2-55)

式(2.2-55)包含个广义坐标的个方程。

为进行速度和加速度分析，对式(2.2-51)求微分，并运用式(2.2-44)，得到欧拉参数归一化约束的变分为

(2.2-56)

从而得到

(2.2-57)

式（2.2-56）和式（2.2-57）利用了 Gp=0 这一事实。式(2.2-57)表明，与欧拉参数归一化约束有关并以为变量的速度方程完全得到满足，且以为变量的加速度

方程也将完全得到满足，故对于速度和加速度分析，当以角速度和角加速度为变量时，不需要考虑欧拉参数归一化约束，只考虑运动学约束及驱动约束即可。

运动学约束方程和驱动约束方程对时间求导即得系统速度方程

(2.2-58)

由于运动学约束方程不涉及时间，故

(2.2-59)

对式(2.2-58)微分可得到系统加速度方程

(2.2-60)

同样地，运动学约束中不涉及时间，时间仅可能出现在驱动约束中，驱动约束方程是仅依赖于广义坐标的函数之和或仅依赖于时间的函数之和，故。

在计算速度方程和加速度方程中的雅可比矩阵时，并不是进行实时的数值计算，而是基于具体的约束类型进行计算。不管是运动学约束还是驱动约束，都可分为有限的几种类型，针对每一种类型的运动副计算其雅可比矩阵的代数形式，如此，在速度分析和加速度分析时只要先进行雅可比矩阵的组装，然后在迭代的每一时刻代入具体的构件特性值即可。

2.2.4 多刚体系统动力学

对于受约束的多体系统，其动力学方程是先根据牛顿定理，给出自由物体的变分运动方程，再运用拉格朗日乘子定理，导出基于约束的多体系统动力学方程。与运动学分析类似，先考虑二维多体系统，再讨论三维多体系统，并对动力学三

种类型的分析：正向动力学、逆向动力学和静平衡分析分别予以讨论。

2.2.4.1 二维多刚体系统动力学

先给出自由刚体的运动方程，再根据拉格朗日乘子定理给出约束多体系统带乘子的运动方程，并讨论系统动力学分析的三种情况和约束反力问题。

1、自由物体的变分运动方程

任意一个刚体构件，质量为，对质心的极转动惯量为，设作用于刚体的所有外力向质心简化后得到外力矢量和力矩，若定义刚体连体坐标系的原点位于刚体质心，则可根据牛顿定理导出该刚体带质心坐标的变分运动方程

(2.2-61)

其中，为固定于刚体质心的连体坐标系原点的代数矢量，为连体坐标系相对于全局坐标系的转角，与分别为与的变分。

取 2.2.3 节为构件定义的广义坐标

(2.2-62)

定义广义力

(2.2-63)

及质量矩阵

(2.2-64)

则可将式(2.2-61)写作虚功原理的形式

(2.2-65)

式(2.2-65)是连体坐标系原点固定于刚体质心时用广义力表示的刚体变分运动方程。其中广义坐标选取、广义力及质量矩阵计算分别按式(2.2-62)、(2.2-63)及(2.2-64)进行。

2、约束多体系统的运动方程

考虑由个构件组成的机械系统，对每个构件运用式(2.2-65)，组合后可得到系统的变分运动方程为

(2.2-66)

若组合所有构件的广义坐标矢量、质量矩阵及广义力矢量，构造系统的广义坐标矢量、质量矩阵及广义力矢量为

(2.2-67)

(2.2-68)

(2.2-69)

系统的变分运动方程则可紧凑地写作

(2.2-70)

对于单个构件，运动方程中的广义力同时包含作用力和约束力，但在一个系

统中，若只考虑理想运动副约束，根据牛顿第三定律，可知作用在系统所有构件上的约束力总虚功为零，若将作用于系统的广义外力表示为

(2.2-71)

其中

， (2.2-72)

则理想约束情况下的系统变分运动方程为

(2.2-73)

式中虚位移与作用在系统上的约束是一致的。

系统运动学约束和驱动约束的组合如式(2.2-3)，为

(2.2-74)

注意，在动力学分析中系统约束方程的维数不需要与系统广义坐标维数相等。如果令，则，，且。

对式(2.2-74)微分得到其变分形式为

(2.2-75)

式(2.2-73)和(2.2-75)组成受约束的机械系统的变分运动方程，式(2.2-73)对所有满足式(2.2-75)的虚位移均成立。

为导出约束机械系统变分运动方程易于应用的形式，运用拉格朗日乘子定理对式(2.2-73)和(2.2-75)进行处理。

拉格朗日乘子定理：设矢量，矢量，矩阵为常数矩阵，如果

(2.2-76)

对于所有满足下式的条件都成立，

(2.2-77)

则存在满足下式的拉格朗日乘子矢量，

(2.2-78)

其中为任意的。

在式(2.2-73)和(2.2-75)中，，，，，运用拉格朗日乘子定理于式(2.2-73)和(2.2-75)，则存在拉格朗日乘子矢量，对于任意的应满足

(2.2-79)

由此得到运动方程的拉格朗日乘子形式

(2.2-80)

式(2.2-80)还必须满足式(2.2-3)、(2.2-5)和(2.2-7)表示的位置约束方程、速度约束方程及加速度约束方程，如下

(2.2-81)

，　(2.2-82)

，　(2.2-83)

以上三式其维数同式(2.2-74)。

式(2.2-80)、(2.2-81)、(2.2-82)和(2.2-83)组成约束机械系统的完整的运动方程。

将式(2.2-80)与(2.2-83)联立表示为矩阵形式

(2.2-84)

式(2.2-84)即为多体系统动力学中最重要的动力学运动方程，被称为欧拉-拉格朗日方程（Euler-Lagrange Equation），式(2.2-84)还必须满足式(2.2-81)和(2.2-82)。它是一个微分-代数方程组（Differential Algebraic Equations - DAEs），不同于单纯的常微分方程组（Ordinary Differential Equations - ODEs）问题，其求解关键在于避免积分过程中的违约现象，此外，还要注意 DAE 问题的刚性问题。

显然，式(2.2-84)有且仅有唯一解的充要条件是其系数矩阵非奇异，但这一条件不利于实际中的判断，可以给出更为实用的判断。

如果式(2.2-84)满足如下条件

a. ，;

b. 对任意且，。

则式(2.2-84)中的系数矩阵是非奇异的，且和是唯一确定的。这是多体系统

运动方程解的存在定理。

可以据此判断，如果系统质量矩阵是正定的，并且约束独立，那么运动方程就有唯一解。实际中的系统质量矩阵通常是正定的，只要保证约束是独立的，运动方程就会有解。

在实际数值迭代求解过程中，需要给定初始条件，包括位置初始条件和速度初始条件。此时，如果要使运动方程有解，还需要满足初值相容条件，也就是要使位置初始条件满足位置约束方程，速度初始条件满足速度约束方程。对于由式(2.2-84)及(2.2-81)、(2.2-82)确定的系统动力学方程，初值相容条件为

(2.2-85)

(2.2-86)

（3）正向动力学分析、逆向动力学分析与静平衡分析

对于一个确定的约束多体系统，其动力学分析不同于运动学分析，并不需要系统约束方程的维数等于系统广义坐标的维数，。在给定外力的作用下，从初始的位置和速度，求解满足位置约束式(2.2-81)及速度约束式(2.2-82)的运动方程式(2.2-84)，就可得到系统的加速度和相应的速度、位置响应，以及代表约束反力的拉格朗日乘子，这种已知外力求运动及约束反力的动力学分析，称为正向动力学分析。

如果约束多体系统约束方程的维数与系统广义坐标的维数相等，，也就是对系统施加与系统自由度相等的驱动约束，那么该系统在运动学上就被完全确定，由 2.2.3 节的约束方程、速度方程和加速度方程可求解系统运动。在此情况下，式(2.2-81)的雅可比矩阵是非奇异方阵，即

(2.2-87)

展开式(2.2-84)的运动方程，为

(2.2-88)

(2.2-89)

由式(2.2-89)可解得，再由式(2.2-88)可求得，拉格朗日乘子就唯一地确定了作用在系统上的约束力和力矩（主要存在于运动副中）。这种由确定的运动求系统约束反力的动力学分析就是逆向动力学分析。

如果一个系统在外力作用下保持静止状态，也就是说，如果

(2.2-90)

那么，就说该系统处于平衡状态。将式(2.2-90)代入运动方程式(2.2-80)，得到平衡方程

(2.2-91)

由平衡方程式(2.2-91)及约束方程式(2.2-80)可求出状态和拉格朗日乘子。这种求系统的平衡状态及在平衡状态下的约束反力的动力学分析称为（静）平衡分析。

4、约束反力

对于约束机械系统中的构件，设其与系统中某构件存在运动学约束或驱动约束，约束编号为。除连体坐标系外，再在构件上以某点为原点建立一个新的固定于构件上的坐标系，称为运动副坐标系，设从坐标系到坐标系的变换矩阵为，从

坐标系到坐标系的变换矩阵为，则可导出由约束产生的反作用力和力矩分别为

(2.2-92)

(2.2-93)

以上两式中，为约束对应的拉格朗日乘子，反作用力和力矩均为运动副坐标系中的量。

2.2.4.2 三维多刚体系统动力学

三维系统的广义坐标比二维系统复杂得多，使得问题规模更大。这里讨论的是与二维多体系统动力学分析相应的内容，包括微分-代数混合方程组的建立，三种类型的动力学分析等。只是根据三维系统情况的不同，给出了角速度表示和欧拉参数表示的两种不同形式的运动方程。

1、空间自由刚体的变分运动方程

对于空间任意刚体构件，令其连体坐标系原点固定于刚体质心，此时连体坐标系也称为质心坐标系，设刚体质量为，其相对于质心坐标系的惯性张量为，再设作用在刚体上的总外力，外力相对于质心坐标系原点的力矩为，则相对于刚体质心坐标系的刚体牛顿-欧拉变分运动方程为

(2.2-94)

其中，为刚体质心的虚位移，为刚体的虚转动，为刚体质心位移，为刚体的在坐标系中表示的角速度。

2、空间约束机械系统的运动方程—角加速度形式