【多选题与双空题满分训练】专题 5 导数多选题
2022 年高考冲刺和 2023 届高考复习满分训练
新高考地区专用

1．（2022·江苏省太湖高级中学高二期中）对于函数 $f\left(x\right)=\frac{x^2}{e^x}$，下列说法正确的是（　　）

A．$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值　　B．$9e^{\pi}>e^3\pi^2$

C．$f(x)$ 有两个不同的零点　　D．对任 $0<k<\frac{1}{e}$，函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-kx$ 有三个零点

【答案】ABD

【解析】

【分析】

对于 A：求导求单调性即可判断；对于 B：根据函数 $f(x)$ 在 $\left(2,+\infty\right)$ 单调递减，所以 $f\left(3\right)>f\left(\pi\right)$，即可判断；对于 C：令 $f\left(x\right)=\frac{x^2}{e^x}=0$ 即可判断；对于 D：易知不论 k 为何值，$x=0$ 必为一个零点，只需判断当 $x\neq0$ 时，$\frac{x}{e^x}=k$ 有两个零点即可，求导求单调性，再数形结合即可判断.

【详解】

根据题意，$f'\left(x\right)=\frac{2xe^x-x^2e^x}{e^{2x}}=\frac{2x-x^2}{e^x}=\frac{x\left(2-x\right)}{e^x}$，令 $f'\left(x\right)>0$，解得 $0<x<2$；

令 $f'\left(x\right)<0$，解得 $x<0$ 和 $x>2$；所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,2\right)$ 单调递增，

在 $\left(-\infty,0\right)$ 和 $\left(2,+\infty\right)$ 单调递减；所以函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=0$，极大值为 $f(2)=\frac{4}{e^2}$；

对于 A：当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)>f\left(0\right)$，当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)>0$ 恒成立，

所以函数 $f(x)$ 的极小值即为函数的最小值，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值，故 A 正确；

对于 B：因为函数 $f(x)$ 在 $\left(2,+\infty\right)$ 单调递减，所以 $f\left(3\right)>f\left(\pi\right)$，即 $\frac{3^2}{e^3}>\frac{\pi^2}{e^{\pi}}$，即 $\frac{9}{e^3}>\frac{\pi^2}{e^{\pi}}$

所以 $9e^{\pi}>e^3\pi^2$，故 B 正确；

对于 C：因为 $e^x>0$ 恒成立，所以令 $f\left(x\right)=\frac{x^2}{e^x}=0$，即 $x^2=0$，解得 $x=0$，

故函数 $f(x)$ 只有一个零点，故 C 不正确；

对于 D：令 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-kx=0$，即 $\frac{x^2}{e^x}=kx$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 有三个零点，

易知不论 k 为何值，$x=0$ 必为其中一个零点，所以在 $x\neq0$ 时，只需 $\frac{x}{e^x}=k$ 有两个零点即可，

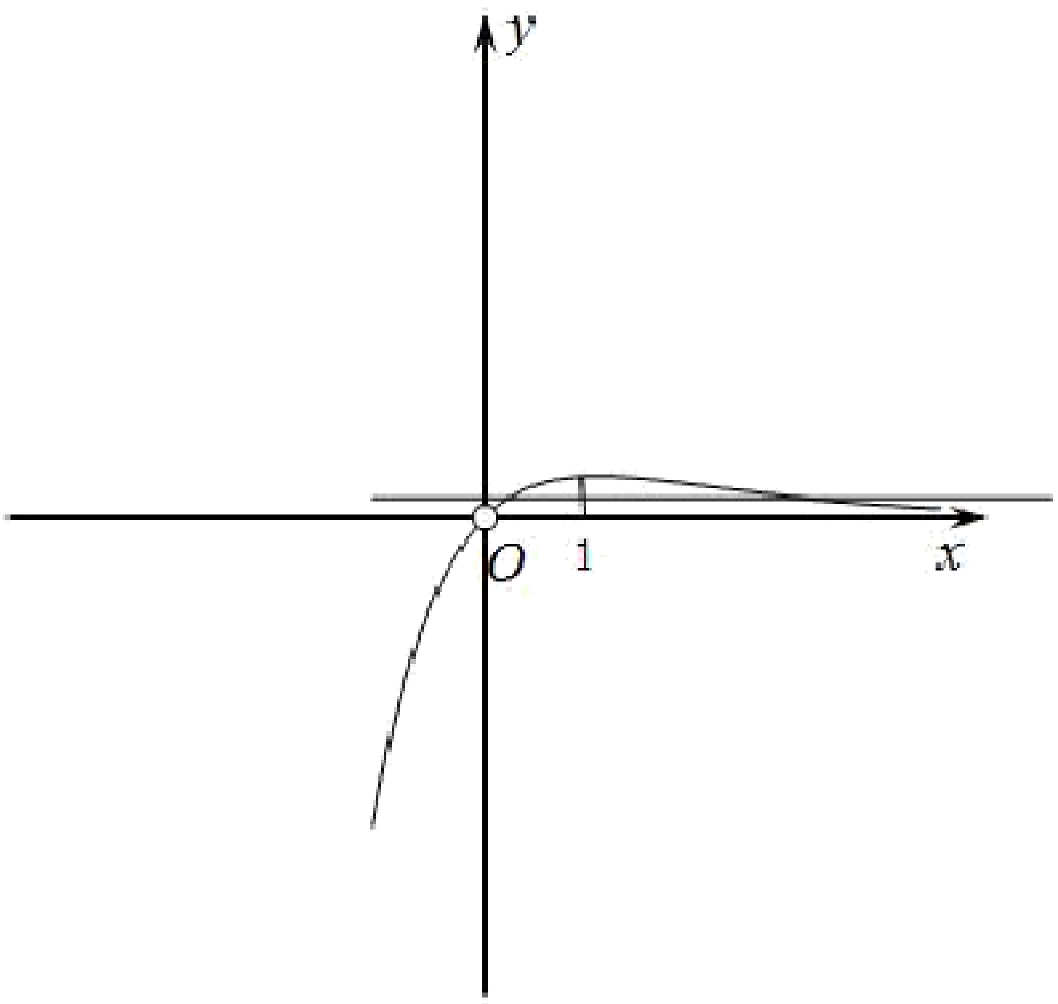
令$h(x)=\frac{x}{e^x}(x\neq 0)$，即函数$h(x)$与$y=k$有两个不同交点即可，$h'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

令$h'(x)>0$，解得$x>1$，令$h'(x)<0$，解得$x<0$或$0<x<1$，所以$h(x)$在$(1,+\infty)$单调递增，

在$(-\infty,0)$和$(0,1)$单调递减，所以函数$h(x)$的极大值也是最大值为：$h(1)=\frac{1}{e}$，

画出图像如下图所示：由图可知，当$0<k<\frac{1}{e}$时，函数$h(x)$与$y=k$有两个不同交点，

综上可知，对任$0<k<\frac{1}{e}$，函数$g(x)=f(x)-kx$有三个零点，故 D 正确.



故选：ABD.

【点睛】

函数零点的求解与判断方法：

（1）直接求零点：令$f(x)=0$，如果能求出解，则有几个解就有几个零点.

（2）零点存在性定理：利用定理不仅要函数在区间$[a,b]$上是连续不断的曲线，且$f(a)\cdot f(b)<0$，还必须结合函数的图象与性质(如单调性、奇偶性)才能确定函数有多少个零点.

（3）利用图象交点的个数：将函数变形为两个函数的差，画两个函数的图象，看其交点的横坐标有几个不同的值，就有几个不同的零点.

2.（2022·山东·德州市教育科学研究院高二期中）函数$f(x)=\frac{x}{\ln x}$，下列说法正确的有（　　）

A．$f(x)$最小值为e

B．$f(2)>f(\ )>f(3)$

C．当$k<\mathrm{e}$时，方程$f\left(x\right)=k$无实根

D．当$k>\mathrm{e}$时，若$f\left(x\right)=k$的两根为 ， ，则$x_1+x_2>2\mathrm{e}$

【答案】BD

【解析】

【分析】

求出函数的导函数，即可得其单调性，画出函数图象，进而判断出 ABC 的正误．对于 D，当$k>\mathrm{e}$时，若$f(x)=k$的两根为 ， ，则$x_1+x_2>2\mathrm{e}$，下面给出证明构造函数$g(x)=f(x)-f(2\mathrm{e}-x)=\dfrac{x}{\ln x}-\dfrac{2\mathrm{e}-x}{\ln(2\mathrm{e}-x)}$，$x\in(1,\mathrm{e})$．利用导数研究函数的单调性及其与最值即可得出结论．

【详解】

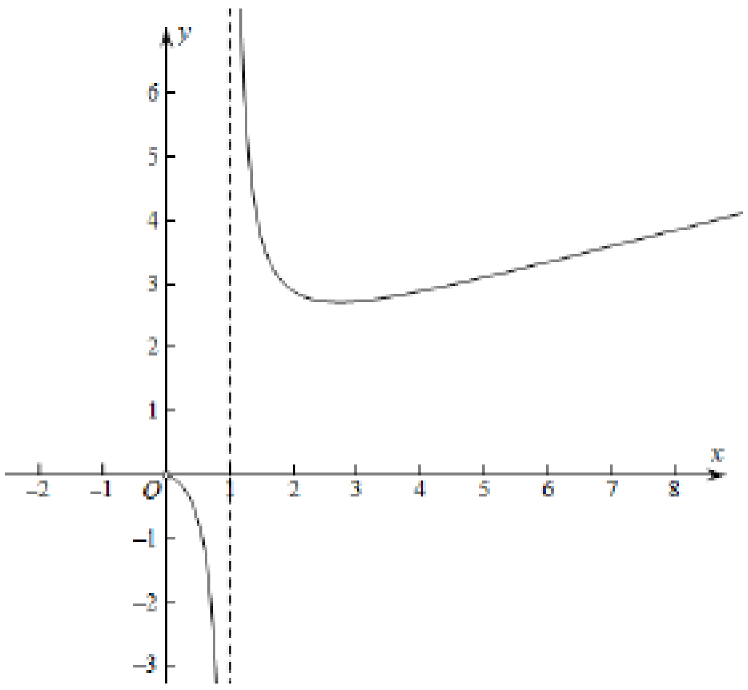
解：$f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$，定义域$x\in\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$，

$f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$，

$\because 0<x<1$或$1<x<\mathrm{e}$时，$f'(x)<0$；当$x>\mathrm{e}$时$f'(x)>0$．

$\therefore x\in(0,1)$和$(1,\mathrm{e})$时，函数$f(x)$单调递减；$x\in(\mathrm{e},+\infty)$，函数$f(x)$单调递增．

画出函数图象如下所示：



对于 A．可得$x\to 1$时，$f(x)\to-\infty$，因此函数$f(x)$无最小值；

对于 B．$\because x\in(\mathrm{e},+\infty)$，函数$f(x)$单调递增，$\therefore f\left(4\right)>f\left(\pi\right)>f\left(3\right)$，$f\left(4\right)=\dfrac{4}{\ln 4}=\dfrac{2}{\ln 2}=f\left(2\right)$），

$\therefore f\left(2\right)>f\left(\ \right)>f\left(3\right)$，因此 B 正确；

对于 C．当$k<0$时，方程$f(x)=k$有一个实根，因此 C 不正确；

对于 D．当$k>\mathrm{e}$时，若$f(x)=k$的两根为 ， ，则$x_1+x_2>2\mathrm{e}$，下面给出证明：不妨设$x_2>\mathrm{e}>x_1>1$，

要证明$x_1+x_2>2\mathrm{e}$，即证明$x_2>2\mathrm{e}-x_1>\mathrm{e}$，即证明$f(x_1)=f(x_2)>f(2\mathrm{e}-x_1)$，

构造函数$g(x)=f(x)-f(2\mathrm{e}-x)=\dfrac{x}{\ln x}-\dfrac{2\mathrm{e}-x}{\ln(2\mathrm{e}-x)}$，$x\in(1,\mathrm{e})$，$g\left(\mathrm{e}\right)=0$．

$g'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}+\dfrac{\ln(2\mathrm{e}-x)-1}{\ln^2(2\mathrm{e}-x)}$，

$\because x\in(1,\mathrm{e})$，$\therefore \ln x-1<0$，$\ln(2\mathrm{e}-x)-1<0$，

$\therefore g'(x)<0$，

$\therefore g(x)>g(\mathrm{e})=0$，即 $f(x_1)=f(x_2)>f(2\mathrm{e}-x_1)$ 成立，因此当 $k>\mathrm{e}$ 时，若 $f(x)=k$ 的两根为 ， ，则

$x_1+x_2>2\mathrm{e}$，故 D 正确．

故选：BD．

3．（2022·山东泰安·高二期中）已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，e是自然对数的底数，则（　　）

A． $f(x)$的最大值为$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

B． $2\ln 3\ \ >3\ln\ \ {}_2>3\ln 2$

C．若 $x_1\ln x_2=x_2\ln x_1$，则 $x_1+x_2=2\mathrm{e}$

D．对任意两个正实数 x_1,x_2，且 $x_1\neq x_2$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1x_2>\mathrm{e}^2$

【答案】ABD

【解析】

【分析】

对于 A，求出函数的导数，判断导数正负，确定函数单调性，即可求得最大值；对于 B，根据函数

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的单调性，即可判断；对于 C，构造函数 $g(t)=f(\mathrm{e}+t)-f(\mathrm{e}-t),t\in(0,\mathrm{e})$，判断其单调性，结合

$x_1\ln x_2=x_2\ln x_1$ 即 $f(x_1)=f(x_2)$ 即可判断；对于 D，将 $f(x_1)=f(x_2)$ 展开整理得

$\ln x_1+\ln x_2=m(x_1+x_2),\ln x_1-\ln x_2=m(x_1-x_2)$，然后采用分析法的思想，推出 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}>\dfrac{2(\frac{x_1}{x_2}-1)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$，构造函数

$u(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，求其最小值即可判断.

【详解】

由题意得 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ ，

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增 ，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，

故 $f(x)_{\max}=f(\mathrm{e})=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，故 A 正确；

由于 $3<$ ，由于当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 递减，故 $f(3)>f(\ )$ ，

即 $\dfrac{\ln 3}{3}>\dfrac{\ln}{\ },2\ \ln3>2\times3\ln$ ，即 $2\ln3\ \ >3\ln\ \ {}_2$，

因为 $f(2)=\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 4}{4}=f(4)<f(\ )$ ，

故 $\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln}{},3\ \ln2<3\times 2\ln$ ，即 $3\ln\ _2>3\ln 2$ ，

故 $2\ln 3\ >3\ln\ _2>3\ln 2$ ，故 B 正确；

因为 $x_1\ln x_2=x_2\ln x_1$，即 $\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{\ln x_2}{x_2},f(x_1)=f(x_2)$，

设 $g(t)=f(\mathrm{e}+t)-f(\mathrm{e}-t),t\in(0,\mathrm{e})$ ，由于当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 递增，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f(x)$ 递减，

故 $g(t)=f(\mathrm{e}+t)-f(\mathrm{e}-t),t\in(0,\mathrm{e})$ 单调减函数，故 $g(t)<g(0)=0$，

即 $f(\mathrm{e}+t)<f(\mathrm{e}-t)$，由于 $f(x_1)=f(x_2)$，不妨设 $0<x_2<\mathrm{e}$，则 $x_1<2\mathrm{e}-x_2$ ，

即 $x_1+x_2<2\mathrm{e}$，故 C 错误；

对任意两个正实数 x_1,x_2，且 $x_1\neq x_2$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，不妨设 $0<x_2<x_1$ ，

即 $\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{\ln x_2}{x_2}$，设 $\frac{\ln x_1}{x_1}=\frac{\ln x_2}{x_2}=m$，则 $\ln x_1=mx_1,\ln x_2=mx_2$，

则 $\ln x_1+\ln x_2=m(x_1+x_2),\ln x_1-\ln x_2=m(x_1-x_2)$，$m=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，

而 $x_1x_2>\mathrm{e}^2\Leftrightarrow \ln x_1+\ln x_2>2\Leftrightarrow m(x_1+x_2)>2\Leftrightarrow \frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$

$\Leftrightarrow \ln x_1-\ln x_2>\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}\Leftrightarrow \ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(\frac{x_1}{x_2}-1)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$ ，

设 $t=\frac{x_1}{x_2}>1$，令 $u(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$ ，则 $u'(t)=\frac{1}{t}-\frac{2(t+1)-2(t-1)}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

即 $u(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1},(t>1)$ 为单调增函数，故 $u(t)>u(1)=0$，

即 $\ln\frac{x_1}{x_2}>\frac{2(\frac{x_1}{x_2}-1)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$ 成立，故 $x_1x_2>\mathrm{e}^2$，故 D 正确，

故选：ABD

4．（2022·河北唐山·高二期中）已知 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，下列说法正确的是（　　）

A．$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上存在增区间

B．$f'(x)$ 在区间 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上有 2 个零点

C．$f'(0)=0$

D．$f(x)$ 有且仅有 2 个零点

【答案】BCD

【解析】

【分析】

A. 因为$x\in(-1,0)$，所以$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(-1,0)$上不存在增区间，所以该选项不正确；

B. 令$f' \;\; x \;\; =0, \therefore \cos x=\frac{1}{x+1}$，作出函数$y=\cos x$和$y=\frac{1}{x+1}$在区间$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$的图象，如图所示，$f'(x)$在区间$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$上有 2 个零点，所以该选项正确；

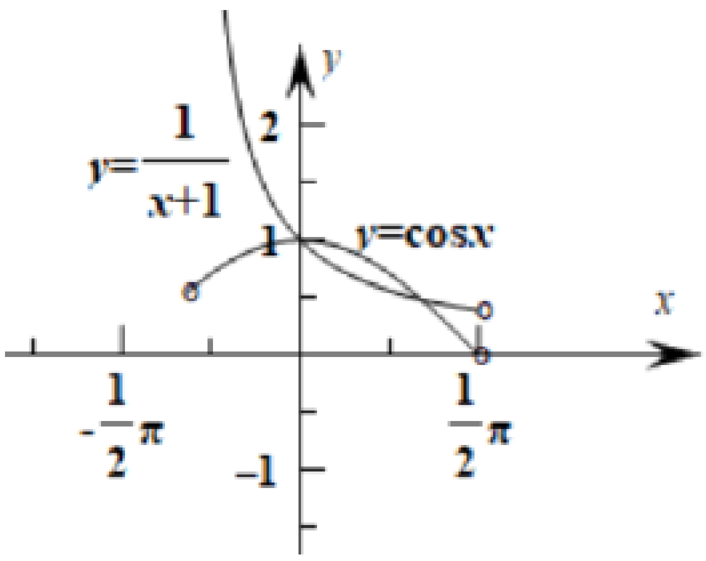
C. 计算得该选项正确；D. 利用导数分四种情况讨论得解.

【详解】

解：由题得$f'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$，

A. 因为$x\in(-1,0)$，所以$0<\cos x<1,\frac{1}{x+1}>1$，所以 $f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(-1,0)$上不存在增区间，所以该选项不正确；

B. 作出函数$y=\cos x$和$y=\frac{1}{x+1}$在区间$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$的图象，得该选项正确；



C. $f'(0)=\cos 0-\frac{1}{0+1}=0$，所以该选项正确；

D. 由题知：$f'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$，$x\in(-1,+\infty)$

□当$x\in(-1,0]$时，可知$f'(x)$在$(-1,0]$上单调递增

$\therefore f'(x)\le f'(0)=0$ $\qquad$ $\therefore f(x)$在$(-1,0]$上单调递减，

又$f(0)=0$

$\therefore x=0$为$f(x)$在$(-1,0]$上的唯一零点.

□当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$f'(x)$在$(0,x_0)$上单调递增，在$\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，

又$f'(0)=0$ $\qquad$ $\therefore f'(x_0)>0$，

$\therefore f(x)$在$(0,x_0)$上单调递增，此时$f(x)>f(0)=0$，不存在零点，

又 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi+2}=-\frac{2}{\pi+2}<0$,

$\therefore \exists x_1\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'\left(x_1\right)=0$,

$\therefore f\left(x\right)$ 在 $\left(x_0,x_1\right)$ 上单调递增，在 $\left(x_1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减,

又 $f\left(x_0\right)>f\left(0\right)=0$， $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}-\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)=\ln\frac{2e}{\pi+2}>\ln 1=0$,

$\therefore f\left(x\right)>0$ 在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，此时不存在零点,

□当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 时， $\sin x$ 单调递减， $-\ln\left(x+1\right)$ 单调递减,

$\therefore f\left(x\right)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递减,

又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$， $f\left(\pi\right)=\sin\pi-\ln\left(\pi+1\right)=-\ln\left(\pi+1\right)<0$,

即 $f\left(\pi\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$，又 $f\left(x\right)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递减,

$\therefore f\left(x\right)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ 上存在唯一零点,

□当 $x\in\left(\pi,+\infty\right)$ 时， $\sin x\in\left[-1,1\right]$， $\ln\left(x+1\right)>\ln\left(\pi+1\right)>\ln e=1$,

$\therefore \sin x-\ln\left(x+1\right)<0$,

即 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\pi,+\infty\right)$ 上不存在零点,

综上所述： $f\left(x\right)$ 有且仅有 2 个零点. 所以该选项正确.

故选：BCD

5.（2022·山东·肥城市教学研究中心模拟预测）对于偶函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x+a}$，下列结论中正确的是（　　）

A．函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{3\pi}{2}$ 处的切线斜率为 $\frac{4}{9\pi^2}$

B．函数 $f(x)<1$ 恒成立

C．若 $0<x_1<x_2<\pi$，则 $f(x_1)<f(x_2)$

D．若 $m<f(x)$ 对于 $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立，则 m 的最大值为 $\frac{2}{\pi}$

【答案】BD

【解析】

【分析】

利用导数的几何意义可判断 A；构造函数 $g(x)=\sin x-x$，利用导数研究不等式恒成立问题可判断 B；对 $f(x)$求导，构造函数 $g(x)=x\cos x-\sin x$，利用函数的单调性比较函数值的大小可判断 C；利用 $f(x)$在 $\left(0,\frac{}{2}\right)$上的单调性，求出 $f(x)>f\left(\frac{}{2}\right)=\frac{2}{}$ 恒成立，进而确定 m 的最大值，进而判断 D.

【详解】

因为 $f(x)=\frac{\sin x}{x+a}$ 为偶函数，所以 $f(-x)=f(x)$，所以 $a=0$；

对于选项 A， 因为 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$， 所以 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$， 所以 $f'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{9\ {}^2}$，

所以函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{3}{2}$ 处的切线斜率为 $\frac{4}{9\ {}^2}$， 故选项 A 正确；

对于选项 B， 令 $g(x)=\sin x-x$， 则 $g'(x)=\cos x-1$，

当 $x>0$ 时， $g'(x)\le 0$， 所以 $g(x)$ 单调递减， 所以 $g(x)<g(0)=0$，

即 $\sin x<x$， 所以 $f(x)=\frac{\sin x}{x}<1$.

因为 $f(x)$ 为偶函数， 所以函数 $f(x)<1$ 恒成立. 故选项 B 正确；

对于选项 C， $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$， 令 $g(x)=x\cos x-\sin x$，

则 $g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$， 当 $x\in(0,\ )$时， $g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,\ )$ 上单调递减， 所以 $g(x)<g(0)=0$，

即 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0$ 在 $(0,\ )$ 上恒成立，

因此函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\ )$ 上单调递减. 又 $0<x_1<x_2<\ $，

所以 $f(x_1)>f(x_2)$， 故选项 C 错误；

对于选项 D， 因为函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $[0,\ ]$上单调递减，

所以函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $\left(0,\frac{}{2}\right)$ 上也单调递减，

所以 $f(x)=\frac{\sin x}{x}>f\left(\frac{}{2}\right)=\frac{2}{}$ 在 $\left(0,\frac{}{2}\right)$ 上恒成立，

即 $\frac{2}{}<\frac{\sin x}{x}$ 在 $\left(0,\frac{}{2}\right)$ 上恒成立，

即 m 的最大值为 $\frac{2}{}$， 故选项 D 正确；

故选： BD.

6．（2022·湖北·模拟预测）已知正实数 a，b，c 满足 $c^b < b^a < 1 < \log_c a$，则一定有（　　）

A．$a<1$　　B．$a<b$　　C．$b<c$　　D．$c<a$

【答案】AB

【解析】

【分析】

根据 $c^b<1$，$b^a<1$ 可得 $c,b\in(0,1)$，进而判断出 $a<c<1$，A 正确；

构造 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$x>0$ 得到单调性，从而求出 $a<b$，B 正确；CD 选项可以举出反例.

【详解】

由正实数 a，b，c，以及 $c^b<1$，$b^a<1$ 可得 $c,b\in(0,1)$，

又 $\log_c a>1=\log_c c$，所以 $a<c<1$.

所以 $a^b<c^b$，又 $c^b<b^a$，所以 $a^b<b^a$，

即 $b\ln a<a\ln b$，等价于 $\dfrac{\ln a}{a}<\dfrac{\ln b}{b}$，

构造函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$x>0$

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0$

故 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上递增，从而 $a<b$.

又取 $b=c$ 时，原式为 $b^b<b^a<1<\log_b a$ 同样成立，

故 CD 不正确，

故选：AB

【点睛】

对于指数，对数比较大小问题，属于高频考点，难点在于部分题目需要构造函数进行比较，本题中要结合不等式的特点构造 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，利用导函数求出其单调性，根据函数单调性比较大小

7．（2022·山东枣庄·三模）已知 a、$b\in(0,1)$，且 $a+b=1$，则（　　）

A．$a^2+b^2\ge\dfrac{1}{2}$　　B．$\ln a+\ln b\le -2\ln 2$

C．$\ln a\ln b\ge \ln^2 2$　　D．$a+\ln b<0$

【答案】ABD

【解析】

【分析】

利用基本不等式可判断 A 选项；利用基本不等式结合对数函数的单调性可判断 B 选项；利用特殊值法可判断 C 选项；构造函数 $f\left(x\right)=1-x+\ln x$，利用函数 $f\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上的单调性可判断 D 选项.

【详解】

对于 A 选项，因为$1=\left(a+b\right)^2=a^2+b^2+2ab\le 2\left(a^2+b^2\right)$，

所以，$a^2+b^2\ge\frac{1}{2}$，当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$时，等号成立，A 对；

对于 B 选项，由基本不等式可得$ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$时，等号成立，

所以，$\ln a+\ln b=\ln ab\le\ln\frac{1}{4}=-2\ln 2$，B 对；

对于 C 选项，取$a=\frac{1}{4}$，$b=\frac{3}{4}$，则$\ln a\ln b-\ln^2 2=\ln\frac{1}{4}\ln\frac{3}{4}-\ln^2 2=-2\ln 2\ln\frac{3}{4}-\ln^2 2$

$=\ln 2\left(\ln\frac{16}{9}-\ln 2\right)<0$，此时$\ln a\ln b<\ln^2 2$，C 错；

对于 D 选项，令$f\left(x\right)=1-x+\ln x$，其中$0<x<1$，

则$f'\left(x\right)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}>0$，所以，函数$f\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上为增函数，

因为$0<b<1$，则$f\left(b\right)=1-b+\ln b=a+\ln b<f\left(1\right)=0$，D 对.

故选：ABD.

8．（2022·福建泉州·模拟预测）若$\ln b+b=a\ln a+a^2$，则下列式子可能成立的是（　　）

A．$a>b>1$　　　　B．$b>a>1$

C．$1>b>a$　　　　D．$1>a>b$

【答案】BCD

【解析】

【分析】

构造函数$f\left(x\right)=x+\ln x$，$x>0$，得到其单调性且零点情况，分$a>b$与$a<b$两种情况进行讨论，由函数单调性解不等式，求出答案.

【详解】

令$f\left(x\right)=x+\ln x$，$x>0$

则$f'\left(x\right)=1+\frac{1}{x}>0$恒成立，

所以$f\left(x\right)=x+\ln x$单调递增，

其中 $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1<0$， $f(1)=1>0$，

则存在 $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$， 使得 $f(x_0)=0$

□当 $a>b$ 时， $a\ln a+a^2=\ln b+b<a+\ln a$

即 $(a-1)(\ln a+a)<0$，

若 $a\geq 1$， 则 $\ln a+a>0$， 且 $a-1\geq 0$， 则 $(a-1)(\ln a+a)\geq 0$，

不满足 $(a-1)(\ln a+a)<0$， 故 $a<1$， 且 $f(a)>0$，

所以 $x_0<a<1$

又因为 $a>b$， 所以 $1>a>b$， D 正确；

□当 $a<b$ 时，

$a\ln a+a^2=\ln b+b>a+\ln a$， 即 $(a-1)(\ln a+a)>0$

（1）当 $a>1$ 时， $a-1>0$， $\ln a+a>0$， 则 $(a-1)(\ln a+a)>0$ 成立， 故 $b>a>1$， B 正确；

（2）当 $a<1$ 时， $a-1<0$， 若 $(a-1)(\ln a+a)>0$， 则 $\ln a+a<0$，

因为 $f(x_0)=0$， 且 $f(x)=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $0<a<x_0$ 时， $\ln a+a<0$， 则 $a\ln a+a^2<0$，

所以 $\ln b+b<0$， 所以 $b<1$， 又因为 $a<b$， 所以 $1>b>a$， 选项 C 正确.

故选：BCD

【点睛】

对于多元方程或不等式问题，要根据方程或不等式特征构造函数，利用函数单调性进行求解，注意分类讨论.

9．（2022·河北保定·二模）若直线 $y=3x+m$ 是曲线 $y=x^3(x>0)$ 与曲线 $y=-x^2+nx-6(x>0)$ 的公切线，则（　　）

A． $m=-2$　　B． $m=-1$　　C． $n=6$　　D． $n=7$

【答案】AD

【解析】

【分析】

设直线 $y=3x+m$ 与曲线 $y=x^3(x>0)$ 相切于点 (a,a^3)， 与曲线 $y=-x^2+nx-6(x>0)$ 相切于点 $(b,3b+m)$，再由导数为 3 求解.

【详解】

解：设直线 $y=3x+m$ 与曲线 $y=x^3(x>0)$ 相切于点 (a,a^3)，

与曲线 $y=-x^2+nx-6(x>0)$ 相切于点 $(b,3b+m)$，

对于函数 $y=x^3(x>0)$，$y'=3x^2$，则 $3a^2=3(a>0)$，

解得 $a=1$，

所以 $1^3=3+m$，即 $m=-2$.

对于函数 $y=-x^2+nx-6(x>0)$，$y'=-2x+n$，

则 $-2b+n=3(b>0)$，

又 $-b^2+nb-6=3b-2$，

所以 $-b^2+b(3+2b)-6=3b-2$，

又 $b>0$，

所以 $b=2$，$n=7$.

故选：AD

10.（2022·山东·德州市教育科学研究院二模）若函数 $f(x)=\ln x+a(x^2-2x+1)(a\in R)$ 存在两个极值点 x_1,x_2 $(x_1<x_2)$，则（　　）

A．函数 $f(x)$ 至少有一个零点

B．$a<0$ 或 $a>2$

C．$0<x_1<\frac{1}{2}$

D．$f(x_1)+f(x_2)>1-2\ln 2$

【答案】ACD

【解析】

【分析】

对于 A，只需将 $x=1$ 代入验证即可，对于 B，通过函数存在 2 个极值点转化为导函数有 2 个变号零点问题，从而转化为二次函数根的分布问题即可，对于 C，利用 B 选项的条件即可推导；对于 D，计算 $f(x_1)+f(x_2)$，构造函数 $h(a)$，求函数 $h(a)$ 的最小值即可

【详解】

对于 A，$f(x)=\ln x+a(x^2-2x+1)=\ln x+a(x-1)^2$

$f(1)=\ln 1+a(1-1)^2=0$，$\therefore x=1$ 是 $f(x)$ 的一个零点，故 A 正确

对于 B，$f'(x)=\frac{1}{x}+a(2x-2)=\frac{2ax^2-2ax+1}{x}$

$\because f(x)$ 存在两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

$\therefore 2ax^2-2ax+1=0$ 有两个不相等的实数根，即 $f'(x)$ 有两个变号零点 $x_1>0,x_2>0$

$\therefore \Delta>0$，即 $(-2a)^2-4\times 2a\times 1=4a^2-8a=4a(a-2)>0$，$\therefore a>2$ 或 $a<0$

又 $x_1>0,x_2>0$，$\therefore\begin{cases}x_1+x_2=1>0\\x_1x_2=\dfrac{1}{2a}>0\end{cases}$，解得 $a>0$

综上，$a>2$，故 B 错误

对于 C，由 B 选项可得，$x_1+x_2=1$，$\therefore x_2=1-x_1$，$\therefore 1-x_1>x_1$，$\therefore 0<x_1<\frac{1}{2}$

故 C 正确

对于 D，$f(x_1)+f(x_2)=\ln x_1+a(x_1^2-2x_1+1)+\ln x_2+a(x_2^2-2x_2+1)$

$=\ln x_1x_2+a[x_1^2+x_2^2-2(x_1+x_2)+2]$

将 $x_1+x_2=1,x_1x_2=\dfrac{1}{2a}$ 代入上式

$f(x_1)+f(x_2)=\ln\dfrac{1}{2a}+a(1^2-2\times\dfrac{1}{2a}-2\times1+2)=-\ln 2a+a(1-\dfrac{1}{a})$

$=-\ln 2-\ln a+a-1=a-\ln a-\ln 2-1$

令 $h(a)=a-\ln a-\ln 2-1(a>2)$

$h'(a)=1-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a}>0$

有 $h(a)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore h(a)>h(2)=2-\ln 2-\ln 2-1=1-2\ln 2$，

故 D 正确

故选：ACD

11.（2022·广东·三模）已知 $a,b\in\mathrm{R}$，e 是自然对数的底，若 $b+\mathrm{e}^b=a+\ln a$，则 $\dfrac{a}{b}$ 的取值可以是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】CD

【解析】

【分析】

由题构造函数 $f(x)=x+\mathrm{e}^x$，进而可得 $b=\ln a$，然后构造函数 $g(x)=x-\ln x$，利用导数可得函数的最小值，即得.

【详解】

设 $f(x)=x+\mathrm{e}^x$，则 $f(x)$ 在 R 上单调递增，

因为 $f(b)-f(\ln a)=b+\mathrm{e}^b-(\ln a+\mathrm{e}^{\ln a})=a+\ln a-(\ln a+a)=0$，则 $b=\ln a$，

设 $\dfrac{a}{b}=t>0$，则 $a=bt$，即 $\ln a=b=\ln(bt)=\ln b+\ln t$，

所以 $\ln t=b-\ln b$，

设 $g(x)=x-\ln x,x>0$，$g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，