期末专题06 概率（条件概率、全概率、贝叶斯公式）与统计大题综合

（精选30题）

1．（22-23高二下·湖北武汉·期末）甲、乙、丙三人相互做传球训练，第1次由甲将球传出，每次传球时，传球者都等可能地将球传给另外两个人中的任何一人.

(1)求$n\left(n\in \mathrm{N}_{+}\right)$次传球后球在甲手中的概率；

(2)求$n\left(n\in \mathrm{N}_{+}\right)$次传球后球在乙手中的概率；

(3)已知：若随机变量X_i服从两点分布，且$P\left(X_i=1\right)=1-P\left(X_i=0\right)=q_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}q_i$，

记前n次传球后（即从第1次传球到第n次传球后）球在甲手中的次数为Y，求$E\left(Y\right)$.

【答案】(1)$P_n=\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

(2)$Q_n=\frac{1}{3}\left[1+\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{2^n}\right]$

(3)$E\left(Y\right)=\frac{n}{3}-\frac{2}{9}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$

【分析】(1)记A_n表示事件“经过n次传球后，球在甲手中”，设n次传球后球在甲手中的概率为P_n，$n\in \mathrm{N}_{+}$，分析可得$P_1=0$，$A_{n+1}=\overline{A_n}A_{n+1}$，由此可得$P_{n+1}=\left(1-P_n\right)\cdot\frac{1}{2}$，变形可得$P_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$，可得数列$\left\{P_n-\frac{1}{3}\right\}$是以$P_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$为首项，$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列，结合等比数列的通项公式求解即可；

（2）记B_n表示事件“经过n次传球后，球在乙手中”，设n次传球后球在乙手中的概率为Q_n，$n\in \mathrm{N}_{+}$，分析可得$Q_1=\frac{1}{2}$，$B_{n+1}=\overline{B_n}B_{n+1}$，由此可得$Q_{n+1}=\left(1-Q_n\right)\cdot\frac{1}{2}$，变形可得$Q_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(Q_n-\frac{1}{3}\right)$，可得数列$\left\{Q_n-\frac{1}{3}\right\}$是以$Q_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$为首项，$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列，结合等比数列的通项公式求解即可；

（3）结合第（1）问结论和题设条件，运用等比数列求和公式分组求和即可求解.

【详解】（1）记A_n表示事件“经过n次传球后，球在甲手中”，

设 n 次传球后球在甲手中的概率为 P_n， $n\in \mathrm{N}_+$，

若 A_{n+1} 发生，即经过 $n+1$ 次传球后，球再次回到甲手中，

那么第 n 次传球后，球一定不在甲手中，即事件 A_n 一定不发生，

则有 $P_1=0$， $A_{n+1}=\overline{A_n}A_{n+1}$，

必有 $P_{n+1}=(1-P_n)\cdot\frac{1}{2}$,即 $P_{n+1}=-\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{2}$，

即 $P_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$，

所以数列 $\left\{P_n-\frac{1}{3}\right\}$ 是以 $P_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$ 为首项， $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，

所以 $P_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$， 即 $P_n=\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$.

（2）记 B_n 表示事件"经过 n 次传球后，球在乙手中"，

设 n 次传球后球在乙手中的概率为 Q_n， $n\in \mathrm{N}_+$，

若 B_{n+1} 发生，即经过 $n+1$ 次传球后，球在乙手中，

那么第 n 次传球后，球一定不在乙手中，即事件 B_n 一定不发生，

则有 $Q_1=\frac{1}{2}$， $B_{n+1}=\overline{B_n}B_{n+1}$，

必有 $Q_{n+1}=(1-Q_n)\cdot\frac{1}{2}$,即 $Q_{n+1}=-\frac{1}{2}Q_n+\frac{1}{2}$，

即 $Q_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(Q_n-\frac{1}{3}\right)$，

所以数列 $\left\{Q_n-\frac{1}{3}\right\}$ 是以 $Q_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ 为首项， $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，

所以 $Q_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$， 即 $Q_n=\frac{1}{3}\left[1+\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\right]$.

（3）由题意 i 次传球后球在甲手中的次数 Y_i 服从两点分布，且 $P(Y_i=1)=1-P(Y_i=0)=P_i$，

所以 $E\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=E(Y)=\sum_{i=1}^{n}P_i$， $i\in \mathrm{N}_+$，

由（1）得 $P_i=\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}\right]$，

则 $E(Y)=\sum_{i=1}^{n}P_i=\frac{1}{3}\left[n-\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i-1}\right]=\frac{1}{3}\left[n\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right]=\frac{n}{3}-\frac{2}{9}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$.

2.（22-23 高二下·广东韶关·期末）“颗颗黑珠树中藏，此物只在五月有．游人过此尝一颗，满嘴酸甜不思归．”东魁杨梅是夏天的甜蜜馈赠．每批次的东魁杨梅进入市场前都必须进行两轮检测，只有两轮检测都通过才能进行销售，否则不能销售，已知第一轮检测不通过的概率为$\frac{1}{9}$，第二轮检测不通过的概率为$\frac{1}{10}$，两轮检测是否通过相互独立．

(1)求一个批次杨梅不能销售的概率；

(2)如果杨梅可以销售，则该批次杨梅可获利 400 元；如果杨梅不能销售，则该批次杨梅亏损 800 元（即获利-800元）．已知现有 4 个批次的杨梅，记 4 批次的杨梅（各批次杨梅销售互相独立）获利 X 元，求 X 的分布列和数学期望．

【答案】(1)$\frac{1}{5}$

(2)分布列见解析，640

【分析】（1）求一个批次杨梅不能销售的概率，可用对立事件来求解，即两轮检查都通过.

（2）每个批次杨梅销售情况相互独立且重复，基于此可快速利用独立事件的计算公式求出分布列,进而算出期望.

【详解】（1）记“一个批次杨梅不能销售”为事件 A，

则 $P(A)=1-(1-\frac{1}{9})\times(1-\frac{1}{10})=\frac{1}{5}$，

所以一个批次杨梅不能销售的概率为$\frac{1}{5}$.

（2）依据题意，X 的取值为-3200，-2000，-800，400，1600，

$P(X=-3200)=(\frac{1}{5})^4=\frac{1}{625}$，

$P\left(X=-2000\right)=\mathrm{C}_4^1\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{16}{625}$，

$P(X=-800)=\mathrm{C}_4^2(\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5})^2=\frac{96}{625}$，

$P(X=400)=\mathrm{C}_4^3(\frac{1}{5})^1(\frac{4}{5})^3=\frac{256}{625}$，

$P(X=1600)=(\frac{4}{5})^4=\frac{256}{625}$,

所以 X 的分布列为：

X	-3200	-2000	-800	400	1600
P	$\frac{1}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$

$$E(X)=-3200\times\frac{1}{625}-2000\times\frac{16}{625}-800\times\frac{96}{625}+400\times\frac{256}{625}+1600\times\frac{256}{625}=640$$

3．（22-23 高二下·吉林通化·期末）无论是国际形势还是国内消费状况，2023 年都是充满挑战的一年，为应对复杂的经济形势，各地均出台了促进经济发展的各项政策，积极应对当前的经济形势，取得了较好的效果.某市零售行业为促进消费，开展了新一轮的让利促销的活动，活动之初，利用各种媒体进行大量的广告宣传，为了解传媒对本次促销活动的影响，在本市内随机抽取了 6 个大型零售卖场，得到其宣传费用 x（单位：万元）和销售额 y（单位：万元）的数据如下：

卖场	1	2	3	4	5	6
宣传费用	2	3	5	6	8	12
销售额	30	34	40	45	50	60

(1)求 y 关于 x 的线性回归方程

(2)预测当宣传费用至少多少万元时（结果取整数），销售额能突破 100 万元；

附：参考数据 $\sum_{i=1}^{6}x_iy_i=1752$，回归直线方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中 $\hat{b}$ 和 $\hat{a}$ 的最小二乘法的估计公式分别为：

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}，\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}.$$

【答案】(1) $\hat{y}=3x+\frac{151}{6}$

(2)至少为 25 万元时

【分析】先计算出最小二乘法中的 $\overline{x},\overline{y},\sum_{i=1}^{n}x_i^2$，代入公式中求出 $\hat{a},\hat{b}$，求出回归方程，再根据回归方程，将 $\hat{y}=100$ 代入，求出 x 即可.

【详解】(1) $\bar{x}=\frac{2+3+5+6+8+12}{6}=6, \bar{y}=\frac{30+34+40+45+50+60}{6}=\frac{259}{6}$，

$\sum_{i=1}^{6}x_i^2=2^2+3^2+5^2+6^2+8^2+12^2=282$,

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_iy_i-6\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{6}x_i^2-6\bar{x}^2}=\frac{1752-6\times6\times\frac{259}{6}}{282-6\times6^2}=\frac{198}{66}=3$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=\frac{259}{6}-3\times6=\frac{151}{6}$，所以 $\hat{y}=3x+\frac{151}{6}$；

(2) 令 $3x+\frac{151}{6}=100$，解得 $x=\frac{449}{18}\approx25$（万元）.

故当宣传费用至少为 25 万元时，销售额能突破 100 万元；

综上，回归方程为 $\hat{y}=3x+\frac{151}{6}$，若欲销售额突破 100 万，则宣传费用至少 25 万.

4．(22-23 高二下·福建三明·期末) 近几年，电商的蓬勃发展带动了快递行业的迅速增长.为了获得更大的利润，某快递公司在 A 城市的网点对“一天中收发一件块递的平均成本 y_i（单位：元）与当天揽收的快递件数 x_i（单位：千件）之间的关系”进行调查研究，得到相关数据如下表：

每天揽收快递件数 x_i（千件）	2	3	4	5	8
每件快递的平均成本 y_i（元）	5.6	4.8	4.4	4.3	4.1

根据以上数据，技术人员分别根据甲、乙两种不同的回归模型，得到两个经验回归方程：方程甲：$\hat{y}=-0.2x+5.6$，方程乙：$\hat{y}=3.5+\frac{4}{x}$.

(1)为了评价两种模型的拟合效果，完成以下问题：

①根据上表数据和相应回归方程，将以下表格填写完整（结果保留一位小数）：

每天揽收快递件数 x_i/千件		2	3	4	5	8
每件快递的平均成本 y_i/元		5.6	4.8	4.4	4.3	4.1
模型甲	预报值	5.2	5	4.8		
	随机误差 $\hat{e}_i$	－0.4	0.2	0.4		
模型乙	预报值 $\hat{y}_i$	5.5	4.8	4.5		

	随机误差$\hat{e}_i$	－0.1	0	0.1		

（ 备注：$\hat{e}_i=\hat{y}_i-y_i$称为相应于点(x_i,y_i)的随机误差）

②分别计算模型甲与模型乙的随机误差平方和Q_1，Q_2并依此判断哪个模型的拟合效果更好.

(2)已知该快递网点每天能揽收的快递件数x（单位：千件）与揽收一件快递的平均价格t（单位：元）之间的关系是$t=10-\frac{x}{2}(0<t<10)$，根据（1）中拟合效果较好的模型建立的回归方程解决以下问题：

①若一天揽收快递 6 千件，则当天总利润的预报值是多少？

②为使每天获得的总利润最高，该快递网点应该将揽收一件快递的平均价格定为多少？（备注：利润＝价格－成本）

【答案】(1)①表格见解析；②$Q_1=0.46$， $Q_2=0.03$，模型乙的拟合效果较好

(2)①17000 元；②6.75 元

【分析】（1）根据题意，利用其给出的公式，完成表格以及误差平方和，通过比较，可得答案；

（2）根据题意，建立总利润的函数解析式，根据其求得函数值，结合函数单调性求得最值.

【详解】（1）（1）①表中数据填写如下：

每天揽收快递件数x_i / 千件		2	3	4	5	8
每件快递的平均成本y_i / 元		5.6	4.8	4.4	4.3	4.1
模型甲	预报值$\hat{y}_i$	5.2	5.0	4.8	4.6	4.0
	随机误差$\hat{e}_i$	－0.4	0.2	0.4	0.3	－0.1
模型乙	预报值$\hat{y}_i$	5.5	4.8	4.5	4.3	4.0
	随机误差$\hat{e}_i$	－0.1	0	0.1	0	－0.1

②计算可得：

$Q_1=(-0.4)^2+(-0.2)^2+0.4^2+0.3^2+(-0.1)^2=0.46$，

$Q_2=(-0.1)^2+0.1^2+(-0.1)^2=0.03$.

因为$Q_2<Q_1$，所以模型乙的拟合效果较好.

（2）解法一：

①设每天获得的总利润为z，则$z=(t-y)\cdot 1000x$

当$x=6$时，由回归方程$\hat{y}=3.5+\dfrac{4}{x}$得$\hat{y}=\dfrac{25}{6}$.

由$t=10-\dfrac{x}{2}$得$t=7$，

所以总利润的预报值$z=\left(7-\dfrac{25}{6}\right)\times 6000=17000$（元）.

②由$t=10-\dfrac{x}{2}$，

则$z=(t-y)\cdot 1000x=\left[\left(10-\dfrac{x}{2}\right)-\left(3.5+\dfrac{4}{x}\right)\right]\times 1000x=1000\left(-\dfrac{x^2}{2}+6.5x-4\right)$，

所以当$x=6.5$时，z取得最大值，此时$t=10-\dfrac{x}{2}=6.75$，

所以当揽收平均价格定为6.75元时，该网点一天的总利润最大.

解法二：

①每天获得的总利润为z，则$z=(t-y)\cdot x$

当$x=6$时，由回归方程$\hat{y}=3.5+\dfrac{4}{x}$得$\hat{y}=\dfrac{25}{6}$.

由$t=10-\dfrac{x}{2}$得$t=7$，

所以总利润的预报值$z=\left(7-\dfrac{25}{6}\right)\times 6=17$（千元）

②设揽收一件快递的平均价格为t元，

由$t=10-\dfrac{x}{2}$，得揽收快递件数$x=20-2t$，

所以，平均成本$y=3.5+\dfrac{4}{20-2t}$，

所以每天获得的总利润为

$$z=(t-y)\cdot x=\left[(t-3.5)-\left(\dfrac{4}{20-2t}\right)\right](20-2t)=(t-3.5)(20-2t)-4$$

$=-2t^2+27t-74$.

当$t=\dfrac{27}{4}$时，该快递网点每天获得的总利润最大，

所以当揽收平均价格定为$\dfrac{27}{4}$元时，该网点一天的总利润最大．

5．（22-23 高二下·安徽滁州·期末）“绿色出行，低碳环保”已成为新的时尚，近几年国家相继出台了一系列的环保政策，在汽车行业提出了重点扶持新能源汽车的政策，为新能源汽车行业的发展开辟了广阔的前景．某公司对 A 电动汽车进行生产投资，所获得的利润有如下统计数据：

年代	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
年份代码x	1	2	3	4	5	6	7
利润y（单位：百万元）	29	33	36	44	48	52	59

(1)请用相关系数说明：能用线性回归模型拟合y与x的关系（精确到 0.01）；

(2)建立y关于x的回归方程，预测 2024 年该公司所获得的利润．

参考数据：$\sqrt{19824}\approx 140.80$；$\sum_{i=1}^{7}y_i=301$；$\sum_{i=1}^{7}x_iy_i=1344$；$\sum_{i=1}^{7}\left(x_i-\overline{x}\right)^2=28$；$\sum_{i=1}^{7}\left(y_i-\overline{y}\right)^2=708$．

参考公式：相关系数$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$；

回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$中，$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$．

【答案】(1)答案见解析

(2)$\hat{y}=5x+23$， 68 百万元

【分析】（1）首先求出$\overline{x}$，$\overline{y}$，再结合所给参考数据求出相关系数，即可得解；

（2）求出$\hat{b}$、$\hat{a}$即可得到回归直线方程，再将$x=9$代入计算可得.

【详解】（1）已知$\overline{x}=\dfrac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$，$\overline{y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{7}y_i}{7}=\dfrac{301}{7}=43$，

所以$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=\sum_{i=1}^{7}x_iy_i-7\overline{xy}=1344-7\times 4\times 43=140$，

$\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2(y_i-\overline{y})^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2}=\sqrt{19824}\approx 140.80$，

所以 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{140}{140.8}\approx 0.99$，

所以说明 y 与 x 的线性相关程度很强，则能用线性回归模型模拟 y 与 x 的关系；

（2）由（1）知 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{140}{28}=5$，

所以 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=43-5\times 4=23$，

则 $\hat{y}=5x+23$，

因为当 $x=1$ 时，其表示 2016 年，

所以当 $x=9$ 时，其表示 2024 年，则 $\hat{y}=5\times 9+23=68$ （百万元），

即预计 2024 年该公司所获得的利润为 68 百万元.

6.（22-23 高二下·陕西渭南·期末）某公司对其产品研发的年投资额 x（单位：百万元）与其年销售量 y（单位：千件）的数据进行统计，整理后得到如下统计表：

x	1	2	3	4	5
y	1.5	2	3.5	8	15

(1)求变量 x 和 y 的样本相关系数 r（精确到 0.01），并推断变量 x 和 y 的线性相关程度；（若 $|r|\geq 0.75$，则线性相关性程度很强；若 $0.30\leq|r|<0.75$，则线性相关性程度一般，若 $|r|\leq 0.25$，则线性相关性程度很弱.）

(2)求年销售量 y 关于年投资额 x 的经验回归方程.并预测投资额为 700 万无时的销售量.（参考：$\sqrt{51}\approx 7.14$）

参考：$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^2-n\overline{y}^2)}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i^2-n\overline{y}^2)}}$，

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_1-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_1y_1-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_1^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

【答案】(1) $r\approx 0.92$，变量 x 和 y 的线性相关程度很强；

(2) $\hat{y}=3.3x-3.9$，投资额为 700 万时的销售量为 19.2 千件.

【分析】（1）计算出相关系数所需的数据，根据公式即可求出；

（2）根据公式即可求出$\hat{b}$与$\hat{a}$的值，即可得出回归方程.

【详解】（1）由题意，$\overline{x}=\frac{1}{5}(1+2+3+4+5)=3$，$\overline{y}=\frac{1}{5}(1.5+2+3.5+8+15)=6$，

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=(-2)\times(-4.5)+(-1)\times(-4)+0\times(-2.5)+1\times 2+2\times 9=33$，

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2=10$，

$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2=(-4.5)^2+(-4)^2+(-2.5)^2+2^2+9^2=127.5$，

$$\therefore r=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(y_i-\overline{y})^2}}=\frac{33}{\sqrt{10}\times\sqrt{127.5}}=\frac{33}{5\times\sqrt{51}}\approx 0.92,$$

Q$|r|\geq 0.75$，$\therefore$变量x和y的线性相关程度很强；

（2）$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{33}{10}=3.3,\quad \hat{a}=6-3.3\times 3=-3.9,$$

$\therefore$年销售量y关于年投资额x的线性回归方程为$\hat{y}=3.3x-3.9$.

当$x=7$时，$\hat{y}=3.3\times 7-3.9=19.2$，

所以研发的年投资额为700万元时，产品的年销售量约为19.2千件.

7.（22-23高二下·山东东营·期末）2021年4月7日，“学习强国”上线“强国医生”功能，提供智能导诊、疾病自查、疾病百科、健康宣传等多种医疗健康服务.

(1)为了解“强国医生”使用次数的多少与性别之间的关系，某调查机构调研了200名“强国医生”的使用者，得到表中数据，根据所给数据完成上述表格，并判断是否有 99.9%的把握认为“强国医生”的使用次数与性别有关；

	男	女	总计
使用次数多	40		
使用次数少		30	
总计	90		200

(2)该机构统计了“强国医生”上线7天内每天使用该服务的女性人数，“强国医生”上线的第x天，每天使用“强国医生”的女性人数为y，得到以下数据：

x	1	2	3	4	5	6	7

y	6	11	21	34	66	100	195

通过观察散点图发现样本点集中于某一条曲线 $y=a\cdot b^x$ 的周围，求 y 关于 x 的回归方程，并预测“强国医生”上线第 12 天使用该服务的女性人数.

附：随机变量 $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P(x^2\geq k_0)$	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
k_0	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

其中 $z_i=\lg y_i$. 参考公式：对于一组数据 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，其回归直线 $\hat{y}=\hat{c}+\hat{d}x$ 的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{d}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{c}=\overline{y}-\hat{d}\overline{x}$.

$\overline{y}$	$\overline{z}$	$\sum\limits_{i=1}^{7}x_iz_i$	$\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i$	$10^{0.6}$
61.9	1.6	51.8	2522	3.98

【答案】(1)表格见解析，有 99.9%的把握认为“强国医生”的使用次数与性别有关

(2) $\hat{y}=3.98\times 10^{0.25x}$，3980 人

【分析】（1）根据已知数据完成表格，计算出 χ^2 与附表中值作比较可得答案；

（2）将 $\hat{y}=\hat{a}\cdot\hat{b}^x$ 两边同时取常用对数，设 $\hat{z}=\lg\hat{y}$，则 $\hat{z}=\lg\hat{a}+x\lg\hat{b}$，求出 $\hat{b}$，$\hat{a}$，可得 y 关于 x 的回归方程，把 $x=12$ 代入回归方程，可得答案.

【详解】（1）

	男	女	总计
使用次数多	40	80	120
使用次数少	50	30	80

总计	90	110	200

$\chi^2=\dfrac{200(40\times30-80\times50)^2}{90\times110\times120\times80}=\dfrac{4900}{297}\approx16.498>10.828$，

所以有 99.9%的把握认为“强国医生”的使用次数与性别有关；

（2）将 $\hat{y}=\hat{a}\cdot\hat{b}^x$ 两边同时取常用对数得

$\lg\hat{y}=\lg\left(\hat{a}\cdot\hat{b}^x\right)=\lg\hat{a}+\lg\hat{b}^x=\lg\hat{a}+x\lg\hat{b}$，

设 $\hat{z}=\lg\hat{y}$，则 $\hat{z}=\lg\hat{a}+x\lg\hat{b}$，

因为 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1^2+2^2+\cdots+7^2=140$，$\overline{x}=\dfrac{1+2+\cdots+7}{7}=4$，

所以 $\lg\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iz_i-n\overline{x}\overline{z}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}=\dfrac{51.8-7\times4\times1.6}{140-7\times4^2}=0.25$，$\lg\hat{a}=1.6-\dfrac{1}{4}\times4=0.6$，

所以 $\hat{b}=10^{0.25}$，$\hat{a}=10^{0.6}$，

所以 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=10^{0.6}\times10^{0.25x}=3.98\times10^{0.25x}$，

把 $x=12$ 代入回归方程，得 $\hat{y}=3.98\times10^3=3980$，

所以“强国医生”上线第 12 天，使用该服务的女性约有 3980 人.

8.（22-23 高二下·陕西宝鸡·期末）随着人们生活水平的提高，健康越来越成为当下人们关心的话题，因此，健身也成了广大市民的一项必修课.某健身机构统计了 2022 年 1~5 月份某初级私人健身教练课程的月报名人数 y（单位：人）与该初级私人健身教练价格 x（单位：元/小时）的情况，如下表所示.

月份	1	2	3	4	5
初级私人健身教练价格 x（元/小时）	210	200	190	170	150
初级私人健身教练课程的月报名人数 y（人）	5	8	7	9	11

(1)求 (x_i,y_i)（$i=1$，2，3，4，5）的相关系数 r，并判断月报名人数 y 与价格 x 是否有很强的线性相关性?

（当 $|r|\in[0.75,1]$ 时，可以认为两个变量有很强的线性相关性；否则，没有很强的线性相关性）(精确到 0.001）

(2)请建立 y 关于 x 的线性回归方程；（精确到 0.001）

(3)当价格为每小时 230 元时，估计该课程的月报名人数为多少人?（结果保留整数）

参考公式：对于一组数据$\left(x_i,y_i\right)$（$i=1$，2，3，…，n），相关系数$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}$，其回归直线$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$的斜率和截距的最小二乘估计分别为$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

参考数据：$\sqrt{29}\approx 5.385.\sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=4\sqrt{145}$，$\sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}=2\sqrt{5}$，$\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)=-200$.

【答案】(1)-0.929，y与x有很强的线性相关性

(2)$\hat{y}=-0.086x+23.824$

(3)4 人.

【分析】（1）利用公式求得相关系数判断；

（2）利用公式分别求得$\hat{b}$，$\hat{a}$，写出回归方程；

（3）将$x=230$代入回归方程求解.

【详解】（1）解：由已知数据可得：

$\overline{x}=\dfrac{210+200+190+170+150}{5}=184$，

$\overline{y}=\dfrac{5+8+7+9+11}{5}=8$，

相关系数$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}=\dfrac{-200}{4\sqrt{145}\times 2\sqrt{5}}\approx -0.929$

因为$|r|>0.75$，所以y与x有很强的线性相关性.

（2）因为$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum_{i=1}^{5}\left(x_i-\overline{x}\right)^2}=\dfrac{-200}{2320}\approx -0.086$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=8-\left(-0.086\right)\times 184=23.824$，

所以y关于x的线性回归方程为$\hat{y}=-0.086x+23.824$.

（3）当$x=230$时，$\hat{y}=-0.086\times 230+23.824=4.044\approx 4$，

故当价格为每小时 230 元时，估计该课程的月报名人数为 4 人.

9．（22-23 高二下·辽宁沈阳·期末）区教育局准备组织一次安全知识竞赛．某校为了选拔学生参赛，按性别采用分层抽样的方法抽取 200 名学生进行安全知识测试，记 A＝“性别为男”，B＝“得分超过 85 分”，且 $P\left(A|\overline{B}\right)=\frac{2}{5}$，$P\left(B|\overline{A}\right)=\frac{5}{8}$，$P\left(B\right)=\frac{3}{4}$．

(1)完成下列 2×2 列联表，并根据小概率值α＝0.001 的独立性检验，能否推断该校学生了解安全知识的程度与性别有关？

性别	了解安全知识的程度		合计
	得分不超过 85 分的人数	得分超过 85 的人数	
男			
女			
合计			

(2)学校准备分别选取参与测试的男生和女生前两名学生代表学校参加区级别的竞赛，已知男生获奖的概率为$\frac{3}{4}$，女生获奖的概率为$\frac{2}{3}$，记该校获奖的人数为 X，求 X 的分布列与数学期望．

下表是χ^2独立性检验中几个常用的小概率值和相应的临界值．

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_a	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

【答案】(1)表格见解析，了解安全知识的程度与性别有关

(2)分布列见解析，$E\left(X\right)=\frac{17}{6}$

【分析】（1）根据条件概率的有关公式计算出列联表中男女人数，再根据卡方公式计算；

（2）根据超几何分布的思想计算分布列和数学期望.

【详解】(1）由$P\left(B\right)=\frac{3}{4}$，超过 85 分的人数为$200\times\frac{3}{4}=150$（人），不超过 85 分的人数为$200-150=50$（人），

因为$P\left(\overline{A}|\overline{B}\right)=1-P\left(A|\overline{B}\right)=\frac{3}{5}$，$P\left(\overline{B}|\overline{A}\right)=1-P\left(B|\overline{A}\right)=\frac{3}{8}$，$P\left(B\right)=\frac{3}{4}$，$P\left(\overline{B}\right)=\frac{1}{4}$，

所以$P\left(\overline{A}|\overline{B}\right)\cdot P\left(\overline{B}\right)=P\left(\overline{B}|\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{A}\right)$，即$\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}P\left(\overline{A}\right)$，$P\left(\overline{A}\right)=\frac{2}{5}$，$P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=\frac{3}{5}$，

故 200 人中男性人数为$200\times\frac{3}{5}=120$（人），女性人数为$200-120=80$（人），

又$P\left(A\mid\overline{B}\right)=\frac{2}{5}$，即不超过 85 分的人中，男性为$50\times\frac{2}{5}=20$（人），女性为$50-20=30$（人），

故在超过 85 分的人中，男性=$120-20=100$（人），女性$=80-30=50$（人），

列联表如下：

性别	了解安全知识的程度		合计
	得分不超过 85 分的人数	得分超过 85 的人数	
男	20	100	120
女	30	50	80
合计	50	150	200

零假设为H_0：该校学生了解安全知识的程度与性别没有关联.

经计算得到$\chi^2=\frac{200\times\left(20\times50-30\times100\right)^2}{120\times80\times50\times150}=\frac{100}{9}\approx11.11>10.828=x_{0.001}$

根据小概率值$\alpha=0.001$的独立性检验，可以推断H_0不成立，即认为了解安全知识的程度与性别有关，此推断犯错误的概率不大于 0.001；

（2）X可能取 0，1，2，3，4.

$$P\left(X=0\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{144}$$

$$P\left(X=1\right)=\mathrm{C}_2^1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\mathrm{C}_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{10}{144};$$

$$P\left(X=2\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\mathrm{C}_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\mathrm{C}_2^1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{37}{144};$$

$$P\left(X=3\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\mathrm{C}_2^1\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\mathrm{C}_2^1\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{60}{144};$$

$$P\left(X=4\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{36}{144};$$

所以X的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{144}$	$\frac{10}{144}$	$\frac{37}{144}$	$\frac{60}{144}$	$\frac{36}{144}$

所以$E(X)=0\times\frac{1}{144}+1\times\frac{10}{144}+2\times\frac{37}{144}+3\times\frac{60}{144}+4\times\frac{36}{144}=\frac{17}{6}$.

综上，在犯错误的概率不大于0.001的前提下认为了解安全知识的程度与性别有关，数学期望为$\frac{17}{6}$.

10.（22-23高二下·辽宁朝阳·期末）乒乓球，被称为中国的“国球”，是一项集力量、速度、柔韧、灵敏和耐力素质为一体的球类运动，同时又是技术和战术完美结合的典型.打乒乓球能使眼球内部不断运动，血液循环增强，眼神经机能提高，因而能使眼睛疲劳消除或减轻，起到预防治疗近视的作用.乒乓球的球体小，速度快，攻防转换迅速，技术打法丰富多样，既要考虑技术的发挥，又要考虑战术的运用.乒乓球运动中要求大脑快速紧张地思考，这样可以促进大脑的血液循环，供给大脑充分的能量，具有很好的健脑功能.乒乓球运动中既要有一定的爆发力，又要有动作的高度精确，要做到眼到、手到和步伐到，提高了身体的协调和平衡能力.不管学习还是工作，每天都或多或少有点压抑，打球能使大脑的兴奋与抑制过程合理交替，避免神经系统过度紧张.某中学对学生参加乒乓球运动的情况进行调查，将每周参加乒乓球运动超过2小时的学生称为“乒乓球爱好者”，否则称为“非乒乓球爱好者”，从调查结果中随机抽取100份进行分析，得到数据如表所示：

	乒乓球爱好者	非乒乓球爱好者	总计
男	40		56
女		24	
总计			100

(1)补全2×2列联表，并判断我们能否有99%的把握认为是否为“乒乓球爱好者”与性别有关？

(2)为了解学生的乒乓球运动水平，现从抽取的“乒乓球爱好者”学生中按性别采用分层抽样的方法抽取3人，与体育老师进行乒乓球比赛，其中男乒乓球爱好者获胜的概率为$\frac{1}{3}$，女乒乓球爱好者获胜的概率为$\frac{1}{4}$，每次比赛结果相互独立，记这3人获胜的人数为X，求X的分布列和数学期望.

参考公式：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P\left(\chi^2 \geq k\right)$	0.05	0.010	0.005	0.001
k	3.841	6.635	7.879	10.828

【答案】(1)列联表见解析，有99%的把握认为是否为“乒乓球爱好者”与性别有关；

(2)分布列见解析，$\dfrac{11}{12}$

【分析】（1）由χ^2的公式可求值，根据表格可判断有关；

（2）由分层抽样确定男女生人数，根据X的取值分别求得概率，列分布列求期望即可.

【详解】（1）依题意可得2×2列联表如下：

	乒乓球爱好者	非乒乓球爱好者	总计
男	40	16	56
女	20	24	44
总计	60	40	100

零假设为H_0：是否为“乒乓球爱好者”与性别无关联，

则$\chi^2=\dfrac{100\left(40\times 24-16\times 20\right)^2}{60\times 40\times 44\times 56}=\dfrac{1600}{231}\approx 6.926>6.635$，

我们有99%的把握认为是否为“乒乓球爱好者”与性别有关.

（2）由（1）得抽取的3人中$3\times\dfrac{40}{40+20}=2$人为男生，$3\times\dfrac{20}{40+20}=1$人为女生.

则X的可能取值为0、1、2、3，

所以$P\left(X=0\right)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{3}$，$P\left(X=1\right)=\mathrm{C}_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{4}{9}$，

$P\left(X=2\right)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{3}{4}+\mathrm{C}_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{36}$，$P\left(X=3\right)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{36}$，

所以X的分布列为：

X	0	1	2	3

P	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{1}{36}$

所以$E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{7}{36}+3\times\frac{1}{36}=\frac{11}{12}$.

11．（22-23 高二下·安徽黄山·期末）某高中学校在 5 月 20 日召开高三毕业典礼，为给高三学生创造轻松的氛围，典礼上有一个“开盲盒”游戏环节，主持人拿出 10 个盲盒，每个盲盒中装有一个学校标志建筑物的模型，其中有 3 个“校园”模型，4 个“图书馆”模型，2 个“名人馆”模型，1 个“科技馆”模型.

(1)一次取出 2 个盲盒，求 2 个盲盒为同一种模型的概率；

(2)依次不放回地从中取出 2 个盲盒，求第 2 次取到的是“图书馆”模型的概率；

(3)甲同学是个“科技狂热粉”，特别想取到“科技馆”模型，主持人为了满足甲同学的愿望，设计如下游戏规则：在一个不透明的袋子中装有大小完全相同的 10 个小球，其中 9 个白球，1 个红球，有放回的每次摸球一个，摸到红球就可以取走“科技馆”模型，游戏结束．现在让甲同学参与游戏，规定甲同学可以按游戏规则最多摸球 10 次，若第 10 次还是摸到白球，主持人直接赠予甲同学“科技馆”模型．设他经过第 X 次（X=1，2，…，10）摸球并获得“科技馆”模型，求 X 的分布列.

【答案】(1)$\frac{2}{9}$

(2)$\frac{2}{5}$

(3)答案见解析

【分析】（1）利用互斥事件的加法求 2 个盲盒为同一种模型的概率；

（2）应用全概率公式求第 2 次取到的是“图书馆”模型的概率；

（3）根据步骤写出 X 的分布列即可.

【详解】（1）设事件$A=$“2 个盲盒都是“校园”模型”，事件$B=$“2 个盲盒都是“图书馆”模型”，事件$C=$“2 个盲盒都是“名人馆”模型”，则 A 与 B 与 C 为互斥事件，

$\because P(A)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{15}$，$P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$，$P(C)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$，

$\therefore$2 个盲盒为同一种模型的概率$P=P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{1}{45}=\frac{2}{9}$.

（2）设事件$A_i=$“第 i 次取到的是“校园”模型”，$i=1,2$，

设事件$B_i=$“第 i 次取到的是“图书馆”模型”，$i=1,2$，

设事件 $C_i=$“第 i 次取到的是“名人馆”模型”，$i=1,2$，

设事件 $D_i=$“第 i 次取到的是“科技馆”模型”，$i=1,2$.

$P(A_1)=\frac{C_3^1}{C_{10}^1}=\frac{3}{10}$，$P(B_2|A_1)=\frac{C_4^1}{C_9^1}=\frac{4}{9}$，$P(B_1)=\frac{C_4^1}{C_{10}^1}=\frac{2}{5}$，$P(B_2|B_1)=\frac{C_3^1}{C_9^1}=\frac{1}{3}$，

$P(C_1)=\frac{C_2^1}{C_{10}^1}=\frac{1}{5}$，$P(B_2|C_1)=\frac{C_4^1}{C_9^1}=\frac{4}{9}$，$P(D_1)=\frac{C_1^1}{C_{10}^1}=\frac{1}{10}$，$P(B_2|D_1)=\frac{C_4^1}{C_9^1}=\frac{4}{9}$

∴由全概率公式知：第 2 次取到的是“图书馆”模型的概率为：

$P(B_2)=P(A_1)\times P(B_2|A_1)+P(B_1)\times P(B_2|B_1)+P(C_1)\times P(B_2|C_1)+P(D_1)\times P(B_2|D_1)$

$=\frac{3}{10}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{9}+\frac{1}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{5}$.

（3）∵ $P(X=1)=\frac{1}{10}$，$P(X=2)=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}$，$P(X=3)=\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=\left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}$，

$P(X=4)=\left(\frac{9}{10}\right)^3\cdot\frac{1}{10}$，$P(X=5)=\left(\frac{9}{10}\right)^4\cdot\frac{1}{10}$，$P(X=6)=\left(\frac{9}{10}\right)^5\cdot\frac{1}{10}$，

$P(X=7)=\left(\frac{9}{10}\right)^6\cdot\frac{1}{10}$，$P(X=8)=\left(\frac{9}{10}\right)^7\cdot\frac{1}{10}$，$P(X=9)=\left(\frac{9}{10}\right)^8\cdot\frac{1}{10}$，

$P(X=10)=\left(\frac{9}{10}\right)^9$，

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10^2}$	$\frac{9^2}{10^3}$	$\frac{9^3}{10^4}$	$\frac{9^4}{10^5}$	$\frac{9^5}{10^6}$	$\frac{9^6}{10^7}$	$\frac{9^7}{10^8}$	$\frac{9^8}{10^9}$	$\left(\frac{9}{10}\right)^9$

12．（22-23 高二下·河北保定·期末）某比赛前，甲、乙两队约定来一场热身赛，比赛采用三局两胜制．据以往经验，甲、乙两队实力相当，但是若甲队前一场胜，则下一场胜的概率为$\frac{2}{3}$，若前一场负，则下一场胜的概率为$\frac{2}{5}$，比赛没有平局．正式比赛分为预赛、半决赛和决赛，只有预赛、半决赛都获胜才能进入决赛．已知甲队在预赛和半决赛中获胜的概率分别为$\frac{2}{3}$和$\frac{3}{4}$；乙队在预赛和半决赛中获胜的概率分别为$\frac{3}{4}$和$\frac{4}{5}$；丙队在预赛和半决赛中获胜的概率分别为$\frac{4}{5}$和$\frac{5}{6}$．

(1)求热身赛中甲队获胜的概率；

(2)设甲、乙、丙三队中进入决赛的队伍数为 X，求 X 的分布列与数学期望.

【答案】(1) $\frac{8}{15}$

(2)分布列见解析；期望为 $\frac{53}{30}$

【分析】（1）根据已知分类应用概率加法公式及独立事件发生的概率是概率积求解即可；

（2）根据进入决赛人数分别写出概率及分布列最后计算数学期望即可.

【详解】（1）设热身赛中甲队获胜为事件A，则A包含胜胜、胜负胜、负胜胜三种情况，

所以 $P(A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$.

（2）甲队进入决赛的概率为 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$；乙队进入决赛的概率为 $\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$；

丙队进入决赛的概率为 $\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{2}{3}$.

X 的可能取值为 $0,1,2,3$.

$P(X=0)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{3}{5}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{15}$；

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{3}{10}$；

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\frac{2}{3}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{13}{30}$;

$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{1}{5}$

所以 $E(X)=\frac{3}{10}+\frac{13}{15}+\frac{3}{5}=\frac{53}{30}$.

13.（22-23高二下·安徽阜阳·期末）为丰富中学生校园文化生活，某中学社团联合会设立了“数学社”.在某次社团活动中，数学社组织同学进行数学答题有奖游戏，参与者可从 A,B 两类数学试题中选择作答.答题规则如下：

规则一：参与者只有在答对所选试题的情况下，才有资格进行第二次选题，且连续两次选题不能是同一类试题，每人至多有两次答题机会；

规则二：参与者连续两次选题可以是同一类试题，答题次数不限.

(1)小李同学按照规则一进行答题.已知小李同学答对A类题的概率均为0.8，答对一次可得1分；答对B类题的概率均为0.5，答对一次可得2分.如果答题的顺序由小李选择，那么A,B两类题他应优先选择答哪一类试题？请说明理由；

(2)小王同学按照规则二进行答题，小王同学第1次随机地选择其中一类试题作答，如果小王第1次选择A类试题，那么第2次选择A类试题的概率为0.5；如果第1次选择B类试题，那么第2次选择A类试题的概率为0.8.求小王同学第2次选择A类试题作答的概率.

【答案】(1)小李应该优先选择A类题作答，理由见解析

(2)0.65.

【分析】（1）根据独立事件的乘法公式得出随机变量的数学期望，再根据数学期望判断即可；

（2）应用全概率公式计算即可得解.

【详解】（1）小李同学按照规则一进行答题，若先选择答A类题，设小李获得的积分为随机变量X，则X的所有可能取值为$0,1,3$.

$P(X=0)=1-0.8=0.2$,

$P(X=1)=0.8\times(1-0.5)=0.4$,

$P(X=3)=0.8\times0.5=0.4$,

$\therefore E(X)=0\times0.2+1\times0.4+3\times0.4=1.6$.

若先选择答B类题，设小李获得的积分为随机变量Y，则Y的所有可能取值为$0,2,3$.

$P(Y=0)=1-0.5=0.5$,

$P(Y=2)=0.5\times(1-0.8)=0.1$,

$P(X=3)=0.5\times0.8=0.4$,

$\therefore E(Y)=0\times0.5+2\times0.1+3\times0.4=1.4$.

$\because 1.4<1.6,\therefore$ 小李应该优先选择A类题作答.

（2）因为小王同学按照规则二进行答题，设A_i=“第i次选择A类试题作答”，B_1=“第1次选择B类试题作答”，则A_1与B_1互斥.

根据题意得 $P(A_1)=P(B_1)=0.5, P(A_2|A_1)=0.5, P(A_2|B_1)=0.8$.

由全概率公式，得 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)$

$=0.5\times0.5+0.5\times0.8=0.65$.

因此，小王同学第 2 次选择 A 类试题作答的概率为 0.65.

14．（22-23 高二下·辽宁大连·期末）2023 年世界乒乓球锦标赛决赛阶段比赛于 2023 年 5 月 20 日至 5 月 28 日在南非德班国际会议中心举行，中国男女选手包揽了各项目的冠军，国球运动又一次掀起了热潮．为了进一步推动乒乓球运动的发展，增强学生的体质，某学校在高二年级举办乒乓球比赛，比赛采用了 5 局 3 胜制，每场 11 分，每赢一球得 1 分，比赛每方球员轮流发两球，发完后交换发球，谁先达到 11 分谁获得该场胜利，进行下一局比赛．但当双方球员比分达到 $10:10$ 时，则需要进行附加赛，即双方球员每人轮流发一球，直至一方超过另一方两分则获得胜利．现有甲、乙两人进行乒乓球比赛．

(1)已知某局比赛中双方比分为 $8:8$，此时甲先连续发球 2 次然后乙连续发球 2 次，甲发球时甲得分的概率为 $\frac{3}{4}$，乙发球时乙得分的概率为 $\frac{2}{3}$，各球的结果相互独立，求该局比赛乙以 $11:9$ 获胜的概率；

(2)已知在某场比赛中，第一局甲获胜，在后续比赛中，每局比赛甲获胜的概率为 $\frac{3}{5}$，乙获胜的概率为 $\frac{2}{5}$，且每局比赛的结果相互独立．两人又进行了 X 局比赛后比赛结束，求 X 的分布列与数学期望．

【答案】(1) $\frac{13}{72}$

(2) $\frac{366}{125}$

【分析】（1）先利用相互独立的乘法公式分别求出后四球依次为甲乙乙乙，乙甲乙乙，乙乙甲乙三种的概率，再利用概率的加法公式求解即可.

（2）由已知得随机变量 X 的取值为 $2,3,4,5$，分别求出每个随机变量的概率，利用期望计算公式求解即可.

【详解】（1）由已知条件得甲发球时乙得分的概率为 $\frac{1}{4}$，乙发球时甲得分的概率为 $\frac{1}{3}$，

在双方比分为 8∶8 后甲先连续发球 2 次然后乙连续发球 2 次的情况下，乙以 11∶9 获胜此局分为三种情况：

①后四球胜方依次是甲乙乙乙，概率为 $P_2=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$，

②后四球胜方依次是乙甲乙乙，概率为 $P_1=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$，

③后四球胜方依次是乙乙甲乙，概率为 $P_2=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{72}$，

所以，所求事件的概率为 $P_1+P_2+P_3=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{72}=\frac{13}{72}$；

（2）随机变量 X 的取值为 $2,3,4$，

$P(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$,

$P(X=3)=C_2^1\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{44}{125}$,

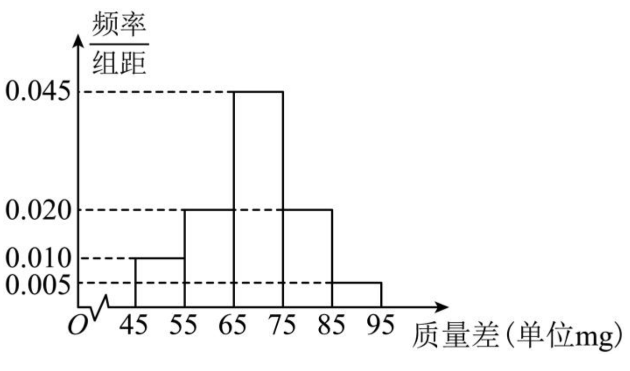
$P(X=4)=C_3^1\times\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}+C_3^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{36}{125}$,

所以 X 的分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{9}{25}$	$\frac{44}{125}$	$\frac{36}{125}$

$E(X)=2\times\frac{9}{25}+3\times\frac{44}{125}+4\times\frac{36}{125}=\frac{366}{125}$.

15．（22-23 高二下·河北唐山·期末）《中国制造 2025》是经国务院总理李克强签批，由国务院于 2015 年 5 月印发的部署全面推进实施制造强国的战略文件，是中国实施制造强国战略第一个十年的行动纲领．制造业是国民经济的主体，是立国之本、兴国之器、强国之基.发展制造业的基本方针为质量为先，坚持把质量作为建设制造强国的生命线.某制造企业根据长期检测结果，发现生产的产品质量与生产标准的质量差都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，并把质量差在 $(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$ 内的产品为优等品，质量差在 $(\mu+\sigma,\mu+2\sigma)$ 内的产品为一等品，其余范围内的产品作为废品处理，优等品与一等品统称为正品．现分别从该企业生产的正品中随机抽取 1000 件，测得产品质量差的样本数据统计如下：



(1)根据频率分布直方图，求样本平均数；

(2)根据大量的产品检测数据，检查样本数据的方差的近似值为 100，用样本平均数作为 μ 的近似值，用样本标准差 s 作为 σ 的估计值，求该厂生产的产品为正品的概率.（同一组中的数据用该组区间的中点值代表）

[参考数据：若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则：$P(\mu-\sigma\le\xi\le\mu+\sigma)\approx0.6827$，

$P(\mu-2\sigma\le\xi\le\mu+2\sigma)\approx0.9545$，$P(\mu-3\sigma\le\xi\le\mu+3\sigma)\approx0.9973$.

(3)假如企业包装时要求把 3 件优等品和 4 件一等品装在同一个箱子中，质检员每次从箱子中摸出三件产品进行检验，记摸出三件产品中优等品的件数为 X，求 X 的分布列以及期望值.

【答案】(1) 69

(2) 0.8186

(3)分布列见解析，$\frac{9}{7}$；

【分析】（1）结合频率分布直方图，同一组中的数据用该组区间的中点值代表即可求得平均值；

（2）先求得 $X \sim N\left(69,10^2\right)$，则正品概率 $P=P(59<X<89)$，然后利用正态分布概率数据即可得解；

（3）X 所有可能值为 0，1，2，3，再利用超几何分布求出每个 X 的取值所对应的概率即可得到分布列，然后求出数学期望即可.

【详解】（1）由频率分布直方图可知，

$$\bar{x}=0.010\times10\times\frac{45+55}{2}+0.020\times10\times\frac{55+65}{2}+0.045\times10\times\frac{65+75}{2}+0.020\times10\times\frac{75+85}{2}+0.005\times10\times\frac{85+95}{2}=69.$$

（2）由题意可知，样本方差 $s^2\approx100$，故 $\sigma\approx\sqrt{s^2}=10$，所以 $X\sim N\left(69,10^2\right)$，

该厂生产的产品为正品的概率：

$$P=P(59<X<89)=P(59<X<69)+P(69<X<89)=\frac{1}{2}(0.6827+0.9545)=0.8186;$$

（3）X 所有可能值为 0，1，2，3.

$P(X=0)=\frac{C_3^0C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\frac{18}{35}$，

$P(X=2)=\frac{C_3^2C_4^1}{C_7^3}=\frac{12}{35}$，$P(X=3)=\frac{C_3^3C_4^0}{C_7^3}=\frac{1}{35}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

数学期望 $E(X)=0\times\frac{4}{35}+1\times\frac{18}{35}+2\times\frac{12}{35}+3\times\frac{1}{35}=\frac{9}{7}$.

16.（22-23 高二下·福建福州·期末）盲盒是指消费者不能提前得知具体产品款式的玩具盒子，具有随机属性某品牌推出 2 款盲盒套餐，A 款盲盒套餐包含 4 款不同单品，且必包含小兔款玩偶；B 款盲盒套餐包含 2 款

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/668123075126006101