预测 12　二次函数

中考预测

概率预测	☆　☆　☆　☆　☆	
题型预测	选择题、填空题☆　☆　☆	解答题☆　☆　☆
考向预测	①二次函数的性质。 ②最值问题、交点问题和整数点问题等。	

应试必备

中等题二次函数考查的内容是二次函数的性质有关的，比如最值问题、整数点问题和二次函数与线段交点问题等。

知识必备

	$y=a(x-h)^2+k$	$y=ax^2+bx+c$
开口方向	a＞0，开口向上；a＜0，开口向下	a＞0，开口向上；a＜0，开口向下
对称轴	x=h	$x=-\frac{b}{2a}$
顶点	(h, k)	$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$
最值	当 x=h, 最值是 k	当 $x=-\frac{b}{2a}$，最值是 $\frac{4ac-b^2}{4a}$
增减变化	a＞0，当 x＞h, y 随 x 的增大而增大 a＜0，当 x＜h, y 随 x 的增大而增大	a＞0，当 $x>-\frac{b}{2a}$，y 随 x 的增大而增大 a＜0，当 $x<-\frac{b}{2a}$，y 随 x 的增大而增大

技法必备

二次函数最值问题需要考虑是自变量在对称轴的同侧或异侧，分情况讨论，利用二次函数的性质去确定最值。二次函数与线段有交点问题，有时需要讨论二次函数与一次函数联立组成方程的△，因为自变量有范围，不仅需要讨论△，还要再做进一步的分析。

真题回顾

1.（2021·安徽中考真题）已知抛物线 $y=ax^2-2x+1(a\neq 0)$ 的对称轴为直线 $x=1$．

（1）求 a 的值；（2）若点 M（x_1，y_1），N（x_2，y_2）都在此抛物线上，且 $-1<x_1<0$，$1<x_2<2$．比较 y_1 与 y_2 的大小，并说明理由；（3）设直线 $y=m(m>0)$ 与抛物线 $y=ax^2-2x+1$ 交于点 A、B，与抛物线 $y=3(x-1)^2$ 交于点 C，D，求线段 AB 与线段 CD 的长度之比．

【答案】（1） $a=1$；（2） $y_1>y_2$，见解析；（3） $\sqrt{3}$

【分析】（1）根据对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$，代值计算即可（2）根据二次函数的增减性分析即可得出结果

（3）先根据求根公式计算出 $x=1\pm\sqrt{m}$，再表示出 $AB=|\sqrt{m}+1-(-\sqrt{m}+1)|$，

$CD=\left|x_1-x_2\right|==\dfrac{2\sqrt{3m}}{3}$，即可得出结论

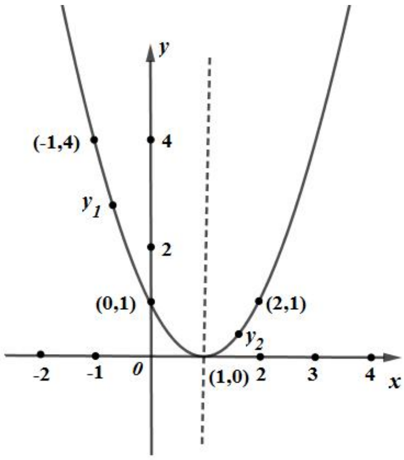
【详解】解：(1) 由题意得：$x=-\dfrac{-2}{2a}=1 \setminus a=1$

(2) ∵抛物线对称轴为直线 $x=1$，且 $a=1>0$ ∴当 $x<1$时，y 随 x 的增大而减小，

当 $x>1$时，y 随 x 的增大而增大. ∴当 $-1<x_1<1$时，y_1 随 x_1 的增大而减小，

∵ $x=-1$时，$y=4$，$x=0$时，$y=1$ ∴$1<y_1<4$ 同理：$1<x_2<2$ 时，y_2 随 x_2 的增大而增大

∵ $x=1$时，$y=0$．$x=2$时，$y=1$ ∴$0<y_2<1$ ∴$y_1>y_2$



(3) 令 $x^2-2x+1=m$ $\quad x^2-2x+(1-m)=0$ $\quad \varDelta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(1-m)=4m$

$\therefore x=\dfrac{2\pm\sqrt{4m}}{2\cdot1}=1\pm\sqrt{m}$ $\quad \therefore x_1=\sqrt{m}+1$ $\quad x_2=-\sqrt{m}+1$

$\therefore AB=|\sqrt{m}+1-(-\sqrt{m}+1)|=2\sqrt{m}$ $\quad$ 令 $3(x-1)^2=m$ $\quad \therefore (x-1)^2=\dfrac{m}{3}$

$\therefore x_1=\dfrac{\sqrt{3m}}{3}+1$ $\quad x_2=-\dfrac{\sqrt{3m}}{3}+1$ $\therefore CD=\left|x_1-x_2\right|=\dfrac{2\sqrt{3m}}{3}$

$\therefore \dfrac{AB}{CD}=\dfrac{2\sqrt{m}}{\frac{2\sqrt{3m}}{3}}=\sqrt{3}$ ∴AB 与 CD 的比值为 $\sqrt{3}$

【点睛】本题考查二次函数的图像性质、二次函数的解析式、对称轴、函数的交点、正确理解二次函数的性质是关键，利用交点的特点解题是重点

2.（2021·浙江绍兴市·中考真题）小聪设计奖杯，从抛物线形状上获得灵感，在平面直角坐标系中画

出截面示意图，如图 1，杯体 *ACB* 是抛物线的一部分，抛物线的顶点 *C* 在 *y* 轴上，杯口直径 $AB=4$，且点 *A*，*B* 关于 *y* 轴对称，杯脚高 $CO=4$，杯高 $DO=8$，杯底 *MN* 在 *x* 轴上．

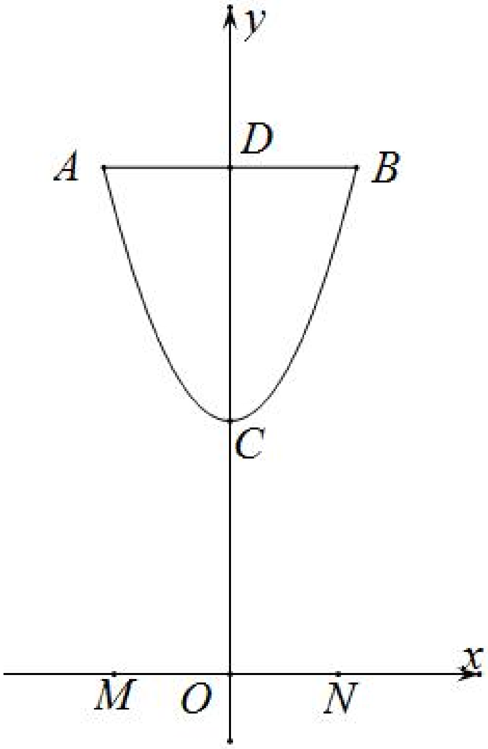


图 1

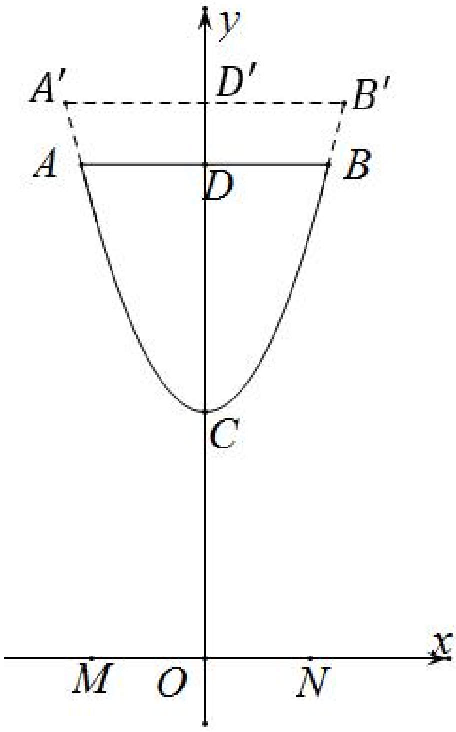


图 2

（1）求杯体 *ACB* 所在抛物线的函数表达式（不必写出 *x* 的取值范围）．

（2）为使奖杯更加美观，小敏提出了改进方案，如图 2，杯体 $A'CB'$ 所在抛物线形状不变，杯口直径 $A'B'//AB$，杯脚高 *CO* 不变，杯深 CD' 与杯高 OD' 之比为 0.6，求 $A'B'$ 的长．

【答案】（1） $y=x^2+4$；（2） $2\sqrt{6}$

【分析】（1）确定 *B* 点坐标后，设出抛物线解析式，利用待定系数法求解即可；（2）利用杯深 *CD′* 与杯高 *OD′* 之比为 0.6，求出 *OD′*，接着利用抛物线解析式求出 *B'* 或 *A'* 横坐标即可完成求解．

【详解】解：（1）设 $y=ax^2+4$，∵杯口直径 *AB*=4，杯高 *DO*=8，∴ $B(2,8)$

将 $x=2$， $y=8$ 代入，得 $a=1$， $\therefore y=x^2+4$．

（2）∵ $\dfrac{CD'}{OD'}=0.6$， $\therefore \dfrac{CD'}{4+CD'}=0.6$， $\therefore CD'=6$， $OD'=10$，

当 $y=10$ 时， $10=x^2+4$， $x_1=\sqrt{6}$ 或 $x_2=-\sqrt{6}$， $\therefore A'B'=2\sqrt{6}$，

即杯口直径 $A'B'$ 的长为 $2\sqrt{6}$．

【点睛】本题考查了抛物线的应用，涉及到待定系数法求抛物线解析式、求抛物线上的点的坐标等

内容，解决本题的关键是读懂题意，找出相等关系列出等式等．

3．（2021·新疆中考真题）已知抛物线 $y=ax^2-2ax+3(a\neq 0)$．（1）求抛物线的对称轴；（2）把抛物线沿 y 轴向下平移 $3|a|$ 个单位，若抛物线的顶点落在 x 轴上，求 a 的值；（3）设点 $P(a,y_1)$，$Q(2,y_2)$ 在抛物线上，若 $y_1>y_2$，求 a 的取值范围．

【答案】（1）直线 $x=1$；（2） $a=\frac{3}{4}$ 或 $a=-\frac{3}{2}$；（3） $a>2$

【分析】（1）直接根据抛物线的对称轴公式求解即可；（2）先求出原抛物线的顶点坐标，然后求出平移后新抛物线的顶点坐标，再根据题意建立方程分情况讨论即可；（3）分别讨论 a 的情况，根据二次函数中利用对称性比较函数值大小的方法建立关于 a 的不等式求解即可．

【详解】（1）根据抛物线对称轴公式： $x=-\frac{b}{2a}$，∴ $x=-\frac{-2a}{2a}=1$，∴原抛物线的对称轴为：直线 $x=1$；

（2）将 $x=1$ 代入解析式得： $y=-a+3$，∴原抛物线的顶点坐标为： $(1,-a+3)$，

把抛物线沿 y 轴向下平移 $3|a|$ 个单位，则平移后新抛物线的顶点坐标为 $(1,-a+3-3|a|)$，

∵平移后抛物线的顶点落在 x 轴上，∴ $-a+3-3|a|=0$，

若 $a>0$，则 $-a+3-3a=0$，解得： $a=\frac{3}{4}$，

若 $a<0$，则 $-a+3+3a=0$，解得： $a=-\frac{3}{2}$，∴ $a=\frac{3}{4}$ 或 $a=-\frac{3}{2}$；

（3）若 $a>0$，则原抛物线开口向上，

要使得 $y_1>y_2$，则应使得点 P 到对称轴的距离大于点 Q 到对称轴的距离，

即： $|a-1|>|2-1|$，即： $|a-1|>1$，∴ $a-1>1$ 或 $a-1<-1$，解得： $a>2$ 或 $a<0$，

∵ $a>0$，∴ $a>2$；若 $a<0$，则原抛物线开口向下，

要使得 $y_1>y_2$，则应使得点 P 到对称轴的距离小于点 Q 到对称轴的距离，

即： $|a-1|<|2-1|$，即： $|a-1|<1$，∴ $-1<a-1<1$，

解得： $0<a<2$，与 $a<0$ 矛盾，故不成立，∴a 的取值范围为 $a>2$．

【点睛】本题考查二次函数的性质以及平移问题，熟记二次函数中的基本性质和结论是解题关键．

4.（2021·湖南长沙市·中考真题）我们不妨约定：在平面直角坐标系中，若某函数图象上至少存在不同的两点关于y轴对称，则把该函数称之为“T函数”，其图象上关于y轴对称的不同两点叫做一对“T点”．根据该约定，完成下列各题．（1）若点$A(1,r)$与点$B(s,4)$是关于x的“T函数”$y=\begin{cases}-\dfrac{4}{x}(x<0),\\ tx^2(x\ge 0,t\ne 0,t\text{是常数}).\end{cases}$的图象上的一对“$T$点”，则$r=$______，$s=$______，$t=$______（将正确答案填在相应的横线上）；

（2）关于x的函数$y=kx+p$（k，p是常数）是“T函数”吗？如果是，指出它有多少对“T点”；如果不是，请说明理由；（3）若关于x的“T函数”$y=ax^2+bx+c$（$a>0$，且a，b，c是常数）经过坐标原点O，且与直线$l:y=mx+n$（$m\ne 0$，$n>0$，且m，n是常数）交于$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$两点，当x_1，x_2满足$(1-x_1)^{-1}+x_2=1$时，直线l是否总经过某一定点？若经过某一定点，求出该定点的坐标；否则，请说明理由．

【答案】（1）$4,-1,4$；（2）当$k\ne 0$时，关于x的函数$y=kx+p$（k,p是常数）不是“T函数”，理由见解析；当$k=0$时，关于x的函数$y=kx+p$（k,p是常数）是“T函数”，它有无数对“T点”；（3）直线l总经过一定点，该定点的坐标为$(1,0)$．

【分析】（1）先根据关于y轴对称的点坐标变换规律可得r,s的值，从而可得点A的坐标，再将点A的坐标代入“T函数”即可得；（2）分$k\ne 0$和$k=0$两种情况，当$k\ne 0$时，设点$(x_0,y_0)(x_0\ne 0)$与点$(-x_0,y_0)$是一对“T点”，将它们代入函数解析式可求出$k=0$，与$k\ne 0$矛盾；当$k=0$时，$y=p$是一条平行于x轴的直线，是“T函数”，且有无数对“T点”；（3）先将点$O(0,0)$代入$y=ax^2+bx+c$可得$c=0$，再根据“T函数”的定义可得$b=0$，从而可得$y=ax^2$，与直线$y=mx+n$联立可得x_1,x_2是方程$ax^2-mx-n=0$的两实数根，然后利用根与系数的关系可得$x_1+x_2=\dfrac{m}{a},x_1x_2=-\dfrac{n}{a}$，最后根据$(1-x_1)^{-1}+x_2=1$化简可得$n=-m$，从而可得$y=mx-m$，由此即可得出答案．

【详解】解：（1）由题意得：点$A(1,r)$与点$B(s,4)$关于y轴对称，$\therefore r=4,s=-1$，$\therefore A(1,4)$，

$\because 1>0$，$\therefore$将点$A(1,4)$代入$y=tx^2$得：$t=4$，故答案为：$4,-1,4$；

（2）由题意，分以下两种情况：①当$k\ne 0$时，

假设关于 x 的函数 $y=kx+p$（k， p 是常数）是"T 函数"，点 $(x_0,y_0)(x_0\neq 0)$ 与点 $(-x_0,y_0)$ 是其图象上的一对"T 点"，则 $\begin{cases}kx_0+p=y_0\\-kx_0+p=y_0\end{cases}$，解得 $k=0$，与 $k\neq 0$ 相矛盾，假设不成立，

所以当 $k\neq 0$ 时，关于 x 的函数 $y=kx+p$（k,p 是常数）不是"T 函数"；

②当 $k=0$ 时，函数 $y=kx+p=p$ 是一条平行于 x 轴的直线，是"T 函数"，它有无数对"T 点"；

综上，当 $k\neq 0$ 时，关于 x 的函数 $y=kx+p$（k,p 是常数）不是"T 函数"；当 $k=0$ 时，关于 x 的函数 $y=kx+p$（k,p 是常数）是"T 函数"，它有无数对"T 点"；

（3）由题意，将 $O(0,0)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$ 得：$c=0$，$\therefore y=ax^2+bx$，

设点 $(x_3,y_3)(x_3\neq 0)$ 与点 $(-x_3,y_3)$ 是"T 函数" $y=ax^2+bx$ 图象上的一对"T 点"，

则 $\begin{cases}ax_3^2+bx_3=y_3\\ax_3^2-bx_3=y_3\end{cases}$，解得 $b=0$，$\therefore y=ax^2(a>0)$，联立 $\begin{cases}y=ax^2\\y=mx+n\end{cases}$ 得：$ax^2-mx-n=0$，

$\because$"T 函数" $y=ax^2$ 与直线 $y=mx+n$ 交于点 $M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，

$\therefore x_1,x_2$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2-mx-n=0$ 的两个不相等的实数根，

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{m}{a},x_1x_2=-\dfrac{n}{a}$，

$\because\left(1-x_1\right)^{-1}+x_2=1$，$\therefore x_1+x_2=x_1x_2$，即 $\dfrac{m}{a}=-\dfrac{n}{a}$，解得 $n=-m$，则直线 l 的解析式为 $y=mx-m$，

当 $x=1$ 时，$y=m-m=0$，因此，直线 l 总经过一定点，该定点的坐标为 $(1,0)$．

【点睛】本题考查了关于 y 轴对称的点坐标变换规律、二次函数与一次函数的综合、一元二次方程根与系数的关系等知识点，掌握理解"T 函数"和"T 点"的定义是解题关键．

5．（2021·陕西中考真题）已知抛物线 $y=-x^2+2x+8$ 与 x 轴交于点 A、B（其中 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C．（1）求点 B、C 的坐标；（2）设点 C' 与点 C 关于该抛物线的对称轴对称在 y 轴上是否存在点 P，使 $\triangle PCC'$ 与 $\triangle POB$ 相似且 PC 与 PO 是对应边？若存在，求点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．

【答案】（1）$B\left(4,0\right)$，$C\left(0,8\right)$；（2）存在，$P\left(0,16\right)$ 或 $P\left(0,\dfrac{16}{3}\right)$．

【分析】(1)令 y=0,求 $-x^2+2x+8=0$ 的根即可；令 x=0,求得 y 值即可确定点 C 的坐标；

（2）确定抛物线的对称轴为 $x=1$,确定 C' 的坐标为（2，8），计算 $C'C=2$，利用直角相等，两边对应成比例及其夹角相等的两个三角形相似，分类求解即可.

【详解】解：（1）令 $y=0$，则 $-x^2+2x+8=0$，$\therefore x_1=-2$，$x_2=4$ $\therefore B(4,0)$.

令 $x=0$，则 $y=8$．$\therefore C(0,8)$.

（2）存在．由已知得，该抛物线的对称轴为直线 $x=1$.

$\because$ 点 C' 与点 C 关于直线 $x=1$ 对称，$\therefore C(2,8)$，$CC'=2$．$\therefore CC'//OB$.

$\because$ 点 P 在 y 轴上，$\therefore \angle PCC'=\angle POB=90°$ $\therefore$ 当 $\dfrac{PC}{PO}=\dfrac{CC'}{OB}$ 时，$\triangle PCC' \backsim \triangle POB$.

设 $P(0,y)$，*i*）当 $y>8$ 时，则 $\dfrac{y-8}{y}=\dfrac{2}{4}$，$\therefore y=16$．$\therefore P(0,16)$

ii）当 $0<y<8$ 时，则 $\dfrac{8-y}{y}=\dfrac{2}{4}$，$\therefore y=\dfrac{16}{3}$ $\therefore P\left(0,\dfrac{16}{3}\right)$.

iii）当 $y<0$ 时，则 $CP>OP$，与 $\dfrac{PC}{PO}=\dfrac{1}{2}$ 矛盾．$\therefore$ 点 P 不存在 $\therefore P(0,16)$ 或 $P\left(0,\dfrac{16}{3}\right)$.

【点睛】本题考查了二次函数与一元二次方程的关系，对称轴的意义，三角形相似的判定和性质，熟练掌握二次函数的性质，灵活运用三角形的相似和进行一元二次方程根的求解是解题的关键.

6.（2021·浙江杭州市·中考真题）在直角坐标系中，设函数 $y=ax^2+bx+1$（a，b 是常数，$a\neq 0$）.

（1）若该函数的图象经过 $(1,0)$ 和 $(2,1)$ 两点，求函数的表达式，并写出函数图象的顶点坐标.

（2）写出一组 a，b 的值，使函数 $y=ax^2+bx+1$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点，并说明理由.

（3）已知 $a=b=1$，当 $x=p,q$（p，q 是实数，$p\neq q$）时，该函数对应的函数值分别为 P，Q.若 $p+q=2$，求证 $P+Q>6$.

【答案】（1）$y=x^2-2x+1$，顶点坐标是 $(1,0)$；（2）$a=1$，$b=3$，理由见解析；（3）见解析.

【分析】（1）把点 $(1,0)$ 和 $(2,1)$ 代入二次函数解析式进行求解，然后把一般式化为顶点式即可求解顶点坐标；（2）根据二次函数的图象与系数的关系可直接进行求解；（3）由题意，得 $P=p^2+p+1$，$Q=q^2+q+1$，则有 $P+Q=2(q-1)^2+6$，进而问题可求解.

【详解】解：（1）把点$(1,0)$和$(2,1)$代入得：$\begin{cases}a+b+1=0\\4a+2b+1=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\b=-2\end{cases}$，

∴$y=x^2-2x+1$，则化为顶点式为$y=(x-1)^2$，∴该函数图象的顶点坐标是$(1,0)$；

（2）例如$a=1$，$b=3$，此时$y=x^2+3x+1$；

因为$b^2-4ac=5>0$，所以函数$y=x^2+3x+1$图象与x轴有两个不同的交点；

（3）由题意，得$P=p^2+p+1$，$Q=q^2+q+1$，

∵$p+q=2$，∴

$P+Q=p^2+p+1+q^2+q+1=p^2+q^2+4=(2-q)^2+q^2+4=2(q-1)^2+6\geq 6$，

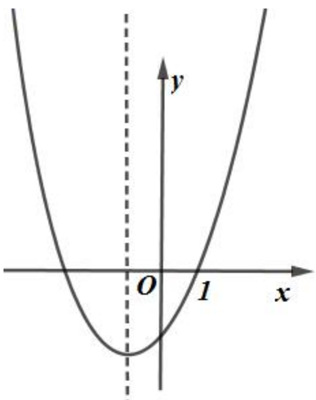
由题意，知$q\neq 1$，所以$P+Q>6$．

【点睛】本题主要考查二次函数的综合，熟练掌握二次函数的图象与性质是解题的关键．

7．（2021·四川乐山市·中考真题）已知关于x的一元二次方程$x^2+x-m=0$．

（1）若方程有两个不相等的实数根，求m的取值范围；

（2）二次函数$y=x^2+x-m$的部分图象如图所示，求一元二次方程$x^2+x-m=0$的解．



【答案】（1）$m>-\frac{1}{4}$；（2）$x_1=1$，$x_2=-2$

【分析】（1）根据△>0时，一元二次方程有两个不相等的实数根求解m的取值范围即可；

（2）根据二次函数图象与x轴的交点的横坐标就是当y=0时对应一元二次函数的解，故将x=1代入方程中求出m值，再代入一元二次方程中解方程即可求解．

【详解】解：（1）由题知$\Delta=1+4m>0$，∴$m>-\frac{1}{4}$．

（2）由图知$x^2+x-m=0$的一个根为1，∴$1^2+1-m=0$，∴$m=2$，

即一元二次方程为$x^2+x-2=0$，解得$x_1=1$，$x_2=-2$，

∴一元二次方程$x^2+x-m=0$的解为$x_1=1$，$x_2=-2$.

【点睛】本题考查一元二次方程根的判别式、解一元一次不等式、解一元一次方程、解一元二次方程，会解一元二次方程，熟练掌握一元二次方程根的判别式与根的关系是解答的关键.

8.（2021·浙江温州市·中考真题）已知抛物线$y=ax^2-2ax-8\ (a\neq 0)$经过点$(-2,0)$.

（1）求抛物线的函数表达式和顶点坐标.

（2）直线l交抛物线于点$A(-4,m)$，$B(n,7)$，n为正数．若点P在抛物线上且在直线l下方（不与点A，B重合），分别求出点P横坐标与纵坐标的取值范围，

【答案】（1）$y=x^2-2x-8$，顶点坐标为$(1,-9)$；（2）$-4<x_p<5$，$-9\le y_p<16$

【分析】（1）把$(-2,0)$代入可求得函数解析式，然后利用配方法将二次函数解析式转化为顶点式，直接得到抛物线的顶点坐标；（2）把$A(-4,m)$，$B(n,7)$代入可求出 m，n，求出点P横坐标取值范围，在利用二次函数的最值即可求纵坐标的取值范围

【详解】解：（1）把$(-2,0)$代入$y=ax^2-2ax-8$，得$4a+4a-8=0$，解得$a=1$，

$\therefore$抛物线的函数表达式为$y=x^2-2x-8$，配方得$y=(x-1)^2-9$，$\therefore$顶点坐标为$(1,-9)$.

（2）当$x=-4$时，$m=16$．当$y=7$时，$n^2-2n-8=7$，解得$n_1=5$，$n_2=-3$.

$\because n$为正数，$\therefore n=5$．$\because$点P在抛物线上且在直线l的下方（不与点A，B重合），$\therefore -4<x_p<5$.

∵$a=1>0$∴开口向上，当 x=1 时函数取得最小值=-9

∴当$-4<x\leqslant 1$时，y随x的增大而减小；当$1<x<5$时，y随x的增大而增大，

当 x=-4 时，y=16，当 x=5 时 y=7，$\therefore -9\le y_p<16$

【点睛】本题二次函数综合题，考查了利用待定系数法求二次函数解析式，配方法把二次函数一般式化成顶点式，以及二次函数的性质.

9.（2021·浙江嘉兴市·中考真题）已知二次函数$y=-x^2+6x-5$.

（1）求二次函数图象的顶点坐标；（2）当$1\le x\le 4$时，函数的最大值和最小值分别为多少？

（3）当$t\leqslant x\leqslant t+3$时，函数的最大值为$m$，最小值为$n$，m-n=3 求$t$的值.

【答案】（1）$(3,4)$；（2）函数的最大值为 4，最小值为 0；（3）$t=3-\sqrt{3}$或$\sqrt{3}$.

【分析】（1）把二次函数 $y=-x^2+6x-5$ 配成顶点式即可得出结论；

（2）利用二次函数的图象和性质确定函数的最大值和最小值.

（3）分 t<0；$0\le t<3$；$t\ge 3$ 三种情况，根据二次函数的性质和 m-n=3 列出关于 t 的方程，解之即可.

【详解】（1）$\because y=-x^2+6x-5=-(x-3)^2+4$，$\therefore$顶点坐标为$(3,4)$.

（2）$\because$顶点坐标为$(3,4)$，$\therefore$当$x=3$时，$y_{最大值}=4$，

$\because$当$1\le x\le 3$时，y随着x的增大而增大，$\therefore$当$x=1$时，$y_{最小值}=0$.

$\because$当$3<x\le 4$时，y随着x的增大而减小，$\therefore$当$x=4$时，$y_{最小值}=3$.

$\therefore$当$1\le x\le 4$时，函数的最大值为 4，最小值为 0.

（3）当$t\leqslant x\leqslant t+3$时，对$t$进行分类讨论.

①当$t+3<3$时，即，$t<0$，y随着x的增大而增大.

当$x=t$时，$n=-t^2+6t-5$．$\therefore m-n=-t^2+4-(-t^2+6t-5)=-6t+9$.

$\therefore -6t+9=3$，解得$t=1$（不合题意，舍去）.

②当$0\le t<3$时，顶点的横坐标在取值范围内，$\therefore m=4$.

i）当$0\le t\le \dfrac{3}{2}$时，在$x=t$时，$n=-t^2+6t-5$，$\therefore m-n=4-(-t^2+6t-5)=t^2-6t+9$.

$\therefore t^2-6t+9=3$，解得$t_1=3-\sqrt{3}$，$t_2=3+\sqrt{3}$（不合题意，舍去）.

ii）当$\dfrac{3}{2}<t<3$时在$x=t+3$时，$n=-t^2+4$，$\therefore m-n=4-(-t^2+4)=t^2$.

$\therefore t^2=3$，解得，$t_1=\sqrt{3}$，$t_2=-\sqrt{3}$（不合题意舍去）.

③当$t\ge 3$时，y随着x的增大而减小，当$x=t$时，$m=-t^2+6t-5$，

当$x=t+3$时，$n=-(t+3)^2+6(t+3)-5=-t^2+4$，

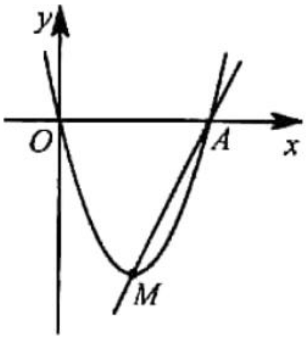
$\therefore m-n=-t^2+6t-5-(-t^2+4)=6t-9$ $\therefore 6t-9=3$，解得$t=2$（不合题意，舍去）.

综上所述，$t=3-\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}$.

【点睛】本题是二次函数综合题，考查抛物线的性质以及最值问题，有难度，并学会利用参数解决问题是解题的关键，属于中考常考题型.

10.（2021·浙江中考真题）如图，已知经过原点的抛物线 $y=2x^2+mx$ 与 x 轴交于另一点 A(2，0).

（1）求 m 的值和抛物线顶点 M 的坐标；（2）求直线 AM 的解析式．



【答案】（1） $m=-4$，M (1，-2)；（2） $y=2x-4$

【分析】（1）将 A(2，0)代入抛物线的解析式，可求得 m 的值，再配成顶点式即可求解；

（2）利用待定系数法即可求得直线 AM 的解析式．

【详解】解　（1）∵抛物线 $y=2x^2+mx$ 过点 A(2，0)，

$\therefore 2\times 2^2+2m=0$，解得 $m=-4$， $\therefore y=2x^2-4x$， $=2(x-1)^2-2$，∴顶点 M 的坐标是(1，-2)；

（2）设直线 AM 的解析式为 $y=kx+b\left(k\neq 0\right)$，

∵图象过 A(2，0)，M (1，-2)， $\therefore \begin{cases}2k+b=0\\k+b=-2\end{cases}$， 解得 $\begin{cases}k=2\\b=-4\end{cases}$， ∴直线 AM 的解析式为 $y=2x-4$．

【点睛】本题考查了待定系数法求函数解析式，二次函数的图象和性质，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题．

11．（2021·广东中考真题）已知抛物线 $y=x^2-\left(m+1\right)x+2m+3$

值范围.

（1）当$m=0$时，请判断点（2，4）是否在该抛物线上；

（2）该抛物线的顶点随着 m 的变化而移动，当顶点移动到最高处时，求该抛物线的顶点坐标；

（3）已知点$E\left(-1,-1\right)$、$F\left(3,7\right)$，若该抛物线与线段 EF 只有一个交点，求该抛物线顶点横坐标的取值范围.

【答案】（1）不在；（2）（2，5）；（3）x 顶点= $<-\frac{1}{2}$或x 顶点$>\frac{3}{2}$或x 顶点$=1$

【分析】

（1）先求出函数关系式，再把（2，4）代入进行判断即可；

（2）根据二次函数的顶点坐标公式求出抛物线顶点纵坐标，最大值即为顶点最高点的纵坐标，代入

求解即可；

（3）运用待定系数法求出直线 EF 的解析式，代入二次函数解析式，求出交点坐标，再根据题意分

类讨论，求出 m 的值即可.

【详解】

解：（1）把 m=0 代入 $y=x^2-(m+1)x+2m+3$ 得，

$y=x^2-x+3$

当 x=2 时，$y=2^2-2+3=5\neq 4$

所以，点（2，4）不在该抛物线上；

（2）$y=x^2-\left(m+1\right)x+2m+3$

$=(x-\frac{m+1}{2})^2+2m+3-\frac{(m+1)^2}{4}$

∴抛物线 $y=x^2-(m+1)x+2m+3$ 的顶点坐标为（$\frac{m+1}{2}$，$2m+3-\frac{(m+1)^2}{4}$）

∴纵坐标为 $2m+3-\frac{(m+1)^2}{4}$

令 $y=2m+3-\frac{(m+1)^2}{4}=-\frac{1}{4}(m-3)^2+5$

∵$-\frac{1}{4}<0$

∴抛物线有最高点，

∴当 $m=3$ 时，$y=2m+3-\frac{(m+1)^2}{4}$ 有最大值，

将 m=3 代入顶点坐标得（2，5）；

（3）∵E（-1，-1），F（3，7）

设直线 EF 的解析式为 $y=kx+b$

把点 E，点 F 的坐标代入得$\begin{cases}-k+b=-1\\3k+b=7\end{cases}$

解得，$\begin{cases}k=2\\b=1\end{cases}$

∴直线 EF 的解析式为 $y=2x+1$

将 $y=2x+1$ 代入 $y=x^2-(m+1)x+2m+3$ 得，

$x^2-(m+1)x+2m+3=2x+1$

整理，得：$x^2-(m+3)x+2m+2=0$

解得 $x_1=2,x_2=m+1$

则交点为：（2，5）和（m+1，2m+3），

而（2，5）在线段 EF 上，

∴若该抛物线与线段 EF 只有一个交点，则（m+1，2m+3）不在线段 EF 上，或（2，5）与（m+1，2m+3）重合，

∴m+1＜-1 或 m+1＞3 或 m+1=2（此时 2m+3=5），

∴此时抛物线顶点横坐标 $x_{顶点}=$ $=\frac{m+1}{2}<-\frac{1}{2}$或 $x_{顶点}=\frac{m+1}{2}>\frac{3}{2}$或 $x_{顶点}=\frac{m+1}{2}=1$

【点睛】

本题考查了二次函数的图象及性质，解题关键是注意数形结合思想的运用．

12．（2021·山东中考真题）在平面直角坐标系中，抛物线 $y=x^2+2mx+2m^2-m$ 的顶点为 A．

（1）求顶点 A 的坐标（用含有字母 m 的代数式表示）；

（2）若点 $B\left(2, y_B\right)$，$C\left(5, y_C\right)$ 在抛物线上，且 $y_B > y_C$，则 m 的取值范围是__________；（直接写出结果即可）

（3）当 $1 \leq x \leq 3$ 时，函数 y 的最小值等于 6，求 m 的值.

【答案】(1)顶点 A 的坐标为$(-m,m^2-m)$；(2)$m<-\frac{7}{2}$；(3)$m=\frac{-1+\sqrt{41}}{4}$或-2

【分析】

(1)将抛物线解析式化成$y=(x+m)^2+m^2-m$的形式，即可求得顶点 A 的坐标；

(2)将 $B(2,y_B)$，$C(5,y_C)$ 代入抛物线中求得 y_B 和 y_C 的值，然后再解不等式即可求解；

(3)分类讨论，分对称轴在 1 的左侧、对称轴在 3 的右侧、对称轴在 1,3 之间共三种情况分别求出函数的最小值，进而求出 m 的值.

【详解】

解：(1)由题意可知：

抛物线 $y=x^2+2mx+2m^2-m=(x+m)^2+m^2-m$，

∴顶点 A 的坐标为 $(-m,m^2-m)$；