华大新高考联盟 2023 届高三 4 月教学质量测评

数 学

本试卷共 6 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟．

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上．

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．回答非选择题时，将答案写在答题卡上．写在本试卷上无效．

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回．

一、选择题；本题共 **8** 小题**.**每小题 **5** 分**.**共 **40** 分**.**在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的**.**

1. 设集合 $A=\{x\mid 3x^2-2x-8<0\},B=\{x\mid y=\ln(7x-4)\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\left\{x\middle|-\frac{4}{3}<x<\frac{4}{7}\right\}$　　B. $\left\{x\middle|\frac{4}{7}<x<\frac{4}{3}\right\}$　　C. $\left\{x\middle|\frac{4}{7}<x<2\right\}$　　D. $\left\{x\middle|-2<x<\frac{4}{7}\right\}$

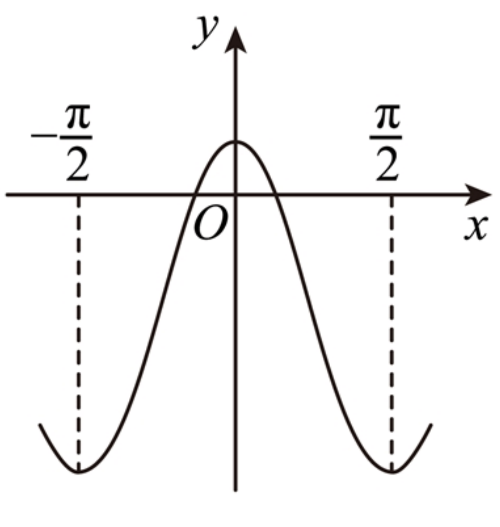
2. 已知 $z=\frac{7-4\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}+\mathrm{i}^{2023}\cdot(5-\mathrm{i})$，则在复平面内，复数 z 所对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 某老师为了奖励考试成绩优异的同学，在微信群里发了一个拼手气红包 .已知甲、乙、丙三人抢到的红包金额超过 1 元的概率分别为 $\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$，则这三人中至少有两人抢到的红包超过 1 元的概率为（　　）

A. $\frac{11}{24}$　　B. $\frac{3}{8}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

4. 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如下图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能为（　　）



A. $\cos(4\cos x)+\cos(4\sin x)$　　B. $\cos\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\cos\left(4\sin\frac{1}{2}x\right)$

C. $\sin\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(4\sin\frac{1}{2}x\right)$　　D. $\cos\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\frac{3}{4}$

5. 过点$A(2,5)$的直线l与函数$f(x)=\frac{5x-11}{x-2}$的图象交于M，N两点，若O为坐标原点，$B(5,1)$，则$\cos\left\langle\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON},\overrightarrow{AB}\right\rangle=$（　　）

A. $-\frac{14\sqrt{58}}{145}$　　B. $-\frac{7\sqrt{58}}{145}$　　C. $-\frac{14\sqrt{29}}{145}$　　D. $-\frac{7\sqrt{29}}{145}$

6. 已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$的上、下底面面积分别为$\frac{9\sqrt{3}}{4}$、$9\sqrt{3}$，若$AA_1=\sqrt{30}$，则该正三棱台的外接球的表面积为（　　）

A. 40π　　B. 80π　　C. 30π　　D. 60π

7. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，倾斜角为$\theta$的直线$l$经过点$A(a,0)$和点$B$，其中$\overrightarrow{BF_1}=2\overrightarrow{BD},F_2D\perp F_1B,|F_2D|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$，若$\cos\theta=\frac{7\sqrt{31}}{62}$，则双曲线$C$的渐近线方程为（　　）

A. $y=\pm2x$　　B. $y=\pm x$　　C. $y=\pm\frac{5}{3}x$　　D. $y=\pm\frac{4}{3}x$

8. 若函数$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}+m\cos x$在$[0,+\infty)$上单调递增，则实数 m 的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,0]$　　B. $\left(-\infty,\frac{\mathrm{e}}{2}\right]$　　C. $(-\infty,1]$　　D. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

二、选择题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 **5** 分，部分选对的得 **2** 分，有选错的得 **0** 分.

9. 《尘劫记》是元代一部经典的古典数学著作，里面记载了一个有趣的数学问题：假设每对老鼠每月生子一次，每月生 12 只，且雌雄各半.1 个月后，有一对老鼠生了 12 只小老鼠，一共 14 只；2 个月后，每对老鼠各生 12 只小老鼠，一共 98 只，……，以此类推.记每个月新生的老鼠数量为a_n，每个月老鼠的总数量为b_n，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为S_n,T_n，可知$a_1=12,b_1=14,a_2=84,b_2=98$，则下列说法正确的是（　　）

A. $a_6=12\times7^6$　　B. $b_6=2\times7^6$　　C. $S_6=2\times7^6-2$　　D. $T_6=\frac{7^8-7}{3}$

10. 已知函数$f(x)=x(x+1)(x-1)$，过点$(1,0)$的直线l与曲线$y=f(x)$相切，则与直线l垂直的直线为（　　）

A. $4x-y+2=0$　　B. $x-2y+8=0$　　C. $x+y-5=0$　　D. $2x+4y-3=0$

11. 已知函数 $f\left(x\right)=2\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}-2\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{3}$，则下列说法错误的是（　　）

A. 函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 6π

B. $\left(\pi,0\right)$ 是函数 $f\left(x\right)$ 图象的一个对称中心

C. 将函数 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后得到一个偶函数

D. 函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,10\pi\right]$ 上有 7 个零点

12. 已知抛物线 $C: x^2=2py(p>0)$ 的焦点到准线的距离为 2，过点 $A\left(a,a-5\right)$ 作抛物线 C 的两条切线，切点分别为 P，Q，若 $\frac{|PQ|}{|PA|}=2$，则点 A 到原点的距离为（　　）

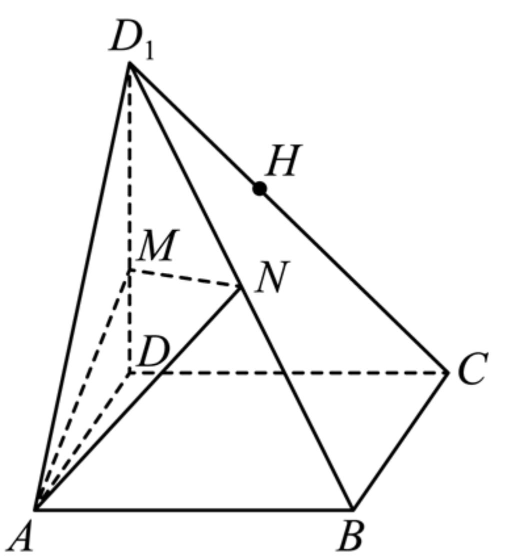
A. $2\sqrt{29}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{13}$　　D. $\frac{5\sqrt{29}}{3}$

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分**.**

13. 若圆 $C_1: x^2+y^2-4x+2y=0$ 与圆 $C_2: x^2+y^2-8x+10y+16=0$ 交于 *P*，*Q* 两点，则直线 *PQ* 的方程为______.

14. 已知 $\left(2x^{\frac{2}{5}}-\frac{4}{x^4}\right)^n$ 的展开式中各项的系数之和为 256，记展开式中 x^{-10} 的系数为 a，则 $\frac{a}{128}=$______.

15. 如图，已知四棱锥 D_1-ABCD 的底面 *ABCD* 为平行四边形，*M* 是棱 DD_1 上靠近点 *D* 的三等分点，*N* 是 BD_1 的中点，平面 *AMN* 交 CD_1 于点 *H*，则，$\frac{D_1H}{D_1C}=$_______.



16. 已知 $a=\ln 3$，$b=\log_{11}3$，现有如下说法：① $a<2b$；② $a+b>3ab$；③ $b-a<-ab$.则正确的说法有______.（横线上填写正确命题的序号）

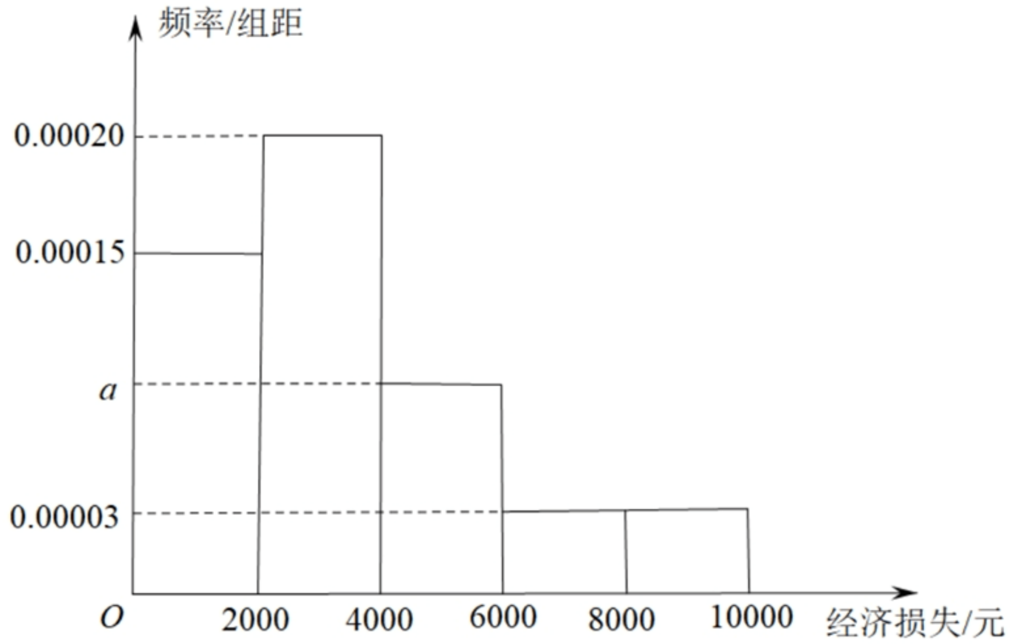
四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分**.**解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤**.**

17. 记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}=n$，且$\frac{S_2}{3},a_{k+1},S_{k+3}$是等比数列$\{b_n\}$的前三项.

（1）求b_5的值；

（2）求数列$\left\{\frac{1}{a_{3n+2}a_{3n+5}}+a_{4n-3}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

18. 某地区突发小型地质灾害，为了了解该地区受灾居民的经济损失，制定合理的补偿方案，研究人员经过调查后将该地区所有受灾居民的经济损失情况统计如下图所示.



（1）求a的值以及所有受灾居民的经济损失的平均值；

（2）以频率估计概率，若从所有受灾居民中随机抽取4人，记受灾居民的经济损失在$[2000,4000)$的人数为X，求X的分布列以及数学期望$E(X)$.

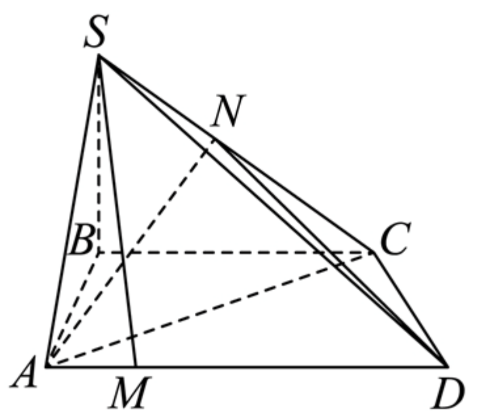
19. 已知在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且

$$b\cos\left(\frac{3\pi}{2}+A\right)+\sin(\pi+B)\sqrt{\frac{6}{1-\cos 2C}}=0.$$

（1）求$c\sin A$的值；

（2）若$2(b\sin C-a\tan C)=c\tan C$.且$S_{\triangle ABC}\geq\lambda$.求实数$\lambda$的取值范围.

20. 已知四棱锥$S-ABCD$如图所示，其中$SB=\sqrt{3}$，$AB=1$，$AD=3\sqrt{3}$，$\angle ABC=\angle ABS=\angle DAB=3\angle ADC=90^\circ$，平面$SBA\perp$平面$ABCD$，点$M$在线段$AD$上，$AM=\frac{\sqrt{3}}{6}$，点$N$在线段$SC$上.



（1）求证：$AC\perp SM$；

（2）若平面ADN与平面$ABCD$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$，求SN的值.

21. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的右焦点为$F$，点$P$，$Q$在椭圆$C$上运动，且$\left|PF\right|$的最小值为$\sqrt{6}-\sqrt{3}$；当点$P$不在$x$轴上时点$P$与椭圆$C$的左、右顶点连线的斜率之积为$-\frac{1}{2}$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）已知直线$l:x-2y=0$与椭圆C在第一象限交于点A，若$\angle PAQ$的内角平分线的斜率不存在.探究：直线PQ的斜率是否为定值，若是，求出该定值；若不是.请说明理由.

22. 已知函数$f\left(x\right)=mx\left(\ln x-1\right)-x^2$

（1）若函数$f\left(x\right)$在$\left[3,9\right]$上有两个零点，求实数m的取值范围.

（2）若关于x的不等式$f\left(x\right)+m^2\le f'\left(x\right)+1$在$\left[1,+\infty\right)$上恒成立，求实数$m$的取值范围.

参考答案

一、选择题；本题共8小题.每小题5分.共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合$A=\left\{x\mid 3x^2-2x-8<0\right\},B=\left\{x\middle|y=\ln\left(7x-4\right)\right\}$，则$A\cap B=$（　　）

A. $\left\{x\middle|-\frac{4}{3}<x<\frac{4}{7}\right\}$　　B. $\left\{x\middle|\frac{4}{7}<x<\frac{4}{3}\right\}$　　C. $\left\{x\middle|\frac{4}{7}<x<2\right\}$　　D. $\left\{x\middle|-2<x<\frac{4}{7}\right\}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意求解集合A,B，进而可求$A\cap B$.

【详解】由题意可得：

$A=\left\{x\mid 3x^2-2x-8<0\right\}=\left\{x\mid-\frac{4}{3}<x<2\right\},B=\left\{x\middle|y=\ln\left(7x-4\right)\right\}=\left\{x\middle|7x-4>0\right\}=\left\{x\middle|x>\frac{4}{7}\right\}$，

所以$A\cap B=\left\{x\middle|\frac{4}{7}<x<2\right\}$.

故选：C.

2. 已知$z=\frac{7-4\mathrm{i}}{\left(1-\mathrm{i}\right)^2}+\mathrm{i}^{2023}\cdot\left(5-\mathrm{i}\right)$，则在复平面内，复数$z$所对应的点位于（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【分析】根据虚数单位的性质结合复数的除法求复数 z，进而判断复数 z 所对应的点所在象限.

【详解】$\because z=\dfrac{7-4\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}+\mathrm{i}^{2023}\cdot(5-\mathrm{i})=\dfrac{7-4\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}+(-\mathrm{i})\cdot(5-\mathrm{i})=\dfrac{7}{2}\mathrm{i}+2-5\mathrm{i}-1=1-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，

$\therefore$ 复数 z 所对应的点为 $\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$，位于第四象限 .

故选：D.

3. 某老师为了奖励考试成绩优异的同学，在微信群里发了一个拼手气红包 .已知甲、乙、丙三人抢到的红包金额超过 1 元的概率分别为 $\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}$，则这三人中至少有两人抢到的红包超过 1 元的概率为（　　）

A. $\dfrac{11}{24}$　　B. $\dfrac{3}{8}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

【答案】 A

【解析】

【分析】根据互斥事件的概率加法公式结合独立事件的概率除法公式分析运算 .

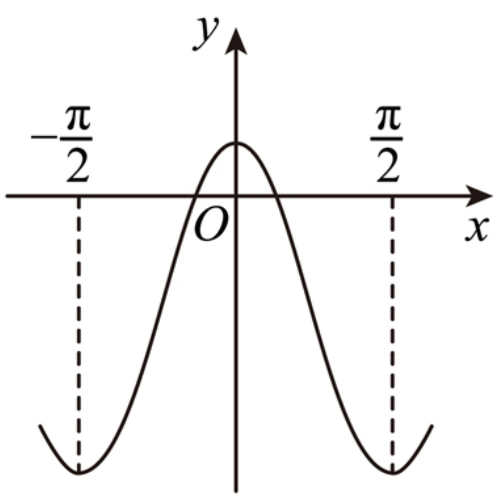
【详解】三人抢到的红包都超过 1 元的概率为 $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$，

三人中仅有两人抢到的红包超过 1 元的概率为 $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{2}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{4}+\left(1-\dfrac{2}{3}\right)\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{8}$，

所以三人中至少有两人抢到的红包超过 1 元的概率为 $\dfrac{1}{12}+\dfrac{3}{8}=\dfrac{11}{24}$.

故选：A.

4. 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如下图所示，则 $f(x)$ 的解析式可能为（　　）



A. $\cos(4\cos x)+\cos(4\sin x)$　　B. $\cos\left(4\cos\dfrac{1}{2}x\right)+\cos\left(4\sin\dfrac{1}{2}x\right)$

C. $\sin\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(4\sin\frac{1}{2}x\right)$　　D. $\cos\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\frac{3}{4}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据图象可得出$f\left(x\right)$为偶函数，且$f\left(0\right)>0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)<-1$，然后逐项求解判断，即可得出答案.

【详解】由图象可得，$f\left(x\right)$为偶函数，且$f\left(0\right)>0$，且$f\left(\frac{\pi}{2}\right)<-1$.

A 项，若$f\left(x\right)=\cos\left(4\cos x\right)+\cos\left(4\sin x\right)$，则$f\left(-x\right)=\cos\left(4\cos\left(-x\right)\right)+\cos\left(4\sin\left(-x\right)\right)$

$=\cos\left(4\cos x\right)+\cos\left(4\sin x\right)=f\left(x\right)$,

所以$f\left(x\right)$为偶函数.

而$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(4\cos\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(4\sin\frac{\pi}{2}\right)=1+\cos 4>0$，不满足题意，故 A 项错误；

B 项，若$f\left(x\right)=\cos\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\cos\left(4\sin\frac{1}{2}x\right)$，则$f\left(-x\right)=\cos\left(4\cos\left(-\frac{1}{2}x\right)\right)+\cos\left(4\sin\left(-\frac{1}{2}x\right)\right)$

$=\cos\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\cos\left(4\sin\frac{1}{2}x\right)=f\left(x\right)$,

所以$f\left(x\right)$为偶函数.

$f\left(0\right)=\cos\left(4\cos 0\right)+\cos\left(4\sin 0\right)=\cos 4+1>0$,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(4\cos\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(4\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\cos 2\sqrt{2}$,

因为$\frac{2\pi}{3}<2\sqrt{2}<\pi$，所以$\cos 2\sqrt{2}<\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，所以$f\left(\frac{\pi}{2}\right)<-1$满足题意，故 B 项正确；

C 项，若$f\left(x\right)=\sin\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(4\sin\frac{1}{2}x\right)$，则$f\left(-x\right)=\sin\left(4\cos\left(-\frac{1}{2}x\right)\right)+\sin\left(4\sin\left(-\frac{1}{2}x\right)\right)$

$=\sin\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)-\sin\left(4\sin\frac{1}{2}x\right)\neq f\left(x\right)$,

所以$f\left(x\right)$不是偶函数，故C 项错误；

D 项，若$f\left(x\right)=\cos\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\frac{3}{4}$，则

$f\left(-x\right)=\cos\left(4\cos\left(-\frac{1}{2}x\right)\right)+\frac{3}{4}=f\left(x\right)=\cos\left(4\cos\frac{1}{2}x\right)+\frac{3}{4}=f\left(x\right)$,

所以$f\left(x\right)$为偶函数.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(4\cos\frac{\pi}{4}\right)+\frac{3}{4}=\cos 2\sqrt{2}+\frac{3}{4}>-1$，故 D 项错误.

故选：B.

5. 过点$A\left(2,5\right)$的直线l与函数$f\left(x\right)=\frac{5x-11}{x-2}$的图象交于$M$，$N$两点，若$O$为坐标原点，$B\left(5,1\right)$，则$\cos\left\langle \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON},\overrightarrow{AB}\right\rangle=$（　　）

A. $-\frac{14\sqrt{58}}{145}$　　B. $-\frac{7\sqrt{58}}{145}$　　C. $-\frac{14\sqrt{29}}{145}$　　D. $-\frac{7\sqrt{29}}{145}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据函数的对称性分析可得　A 为线段MN的中点，结合向量的坐标运算求解.

【详解】$\because f\left(x\right)=\frac{5x-11}{x-2}=5-\frac{1}{x-2}$,

可知$f\left(x\right)$是由$y=-\frac{1}{x}$向右平移 2 个单位，再向上平移 5 个单位得到

故$A\left(2,5\right)$函数$f\left(x\right)$的对称中心，则A 为线段MN的中点，

可得$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OA}=\left(4,10\right),\overrightarrow{AB}=\left(3,-4\right)$,

所以$\cos\left\langle \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON},\overrightarrow{AB}\right\rangle=\frac{\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{-28}{2\sqrt{29}\times 5}=-\frac{14\sqrt{29}}{145}$.

故选：C.

6. 已知正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的上、下底面面积分别为$\frac{9\sqrt{3}}{4}$、$9\sqrt{3}$，若$AA_1=\sqrt{30}$，则该正三棱台的外接球的表面积为（　　）

A. 40π　　B. 80π　　C. 30π　　D. 60π

【答案】D

【解析】

【分析】先求上、下底面正三角形的边长，根据外接球的性质结合勾股定理求半径，即可得结果

【详解】若正三角形的边长为a，则其面积为$\frac{1}{2}a\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

由题意可得：$AB=3, A_1B_1=6$，

取$\triangle ABC,\triangle A_1B_1C_1$的外接圆的圆心为$O,O_2$，正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的外接球的球心$O_1$，连接

$OA,OO_2,O_1A,O_1A_1,O_2A_1$，过A作底面的投影$M$，

可得$OA=O_2M=\sqrt{3},O_2A_1=2\sqrt{3}$，则$MA_1=\sqrt{3}$，

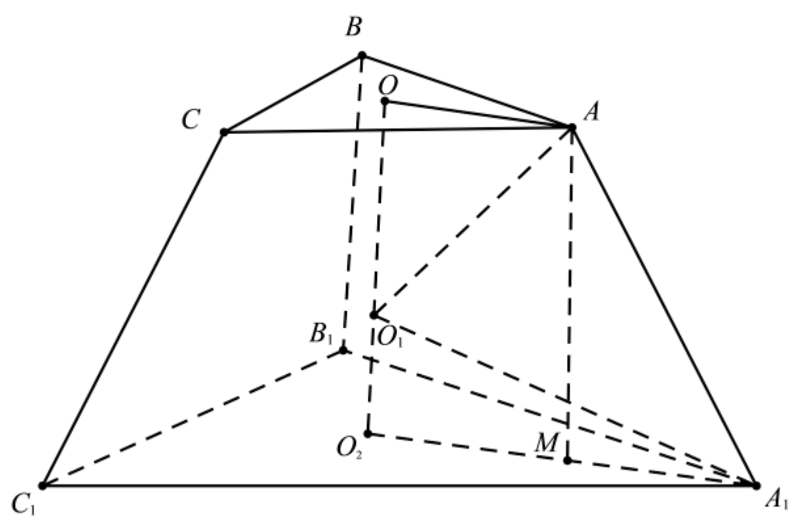
由$AA_1=\sqrt{30}$，可得$OO_2=MA=\sqrt{AA_1^2-MA_1^2}=3\sqrt{3}$，

设外接球的半径为R，则$O_1A=O_1A_1=R$，

可得$\begin{cases} R^2=OA^2+OO_1^2=3+OO_1^2 \\ R^2=O_2A_1^2+O_2O_1^2=12+\left(3\sqrt{3}-OO_1\right)^2 \end{cases}$，解得$\begin{cases} R=\sqrt{15} \\ OO_1=2\sqrt{3} \end{cases}$，

所以该正三棱台的外接球的表面积$S=4\pi R^2=60\pi$.

故选：D.



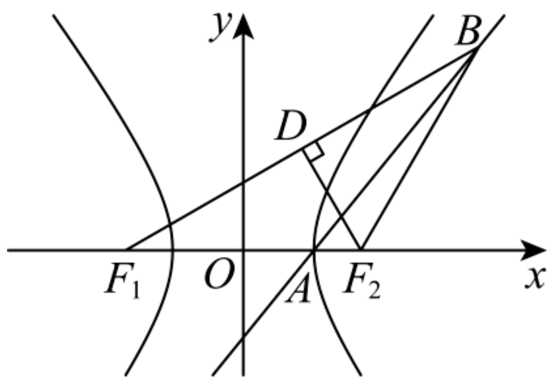
7. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，倾斜角为$\theta$的直线$l$经过点$A\left(a,0\right)$和点$B$，其中$\overrightarrow{BF_1}=2\overrightarrow{BD},F_2D\perp F_1B,\left|F_2D\right|=\frac{1}{2}\left|F_1F_2\right|$，若$\cos\theta=\frac{7\sqrt{31}}{62}$，则双曲线$C$的渐近线方程为（　　）

A. $y=\pm 2x$　　B. $y=\pm x$　　C. $y=\pm\frac{5}{3}x$　　D. $y=\pm\frac{4}{3}x$

【答案】D

【解析】

【分析】由条件分析得: D是BF_1的中点，且$\triangle F_1F_2B$是底角为30°的等腰三角形，作出简图，根据正弦定理可得a、b的关系，得出结果.

【详解】

由$\overrightarrow{BF_1}=2\overrightarrow{BD},F_2D\perp F_1B$可得$D$是$BF_1$的中点，且$\triangle F_1F_2B$是以$F_2$为顶点的等腰三角形，

又因为$|F_2D|=\frac{1}{2}|F_1F_2|$，所以$\angle BF_1F_2=30^\circ$，

在$\triangle AF_2B$中，由正弦定理可得$\frac{BF_2}{\sin\theta}=\frac{AF_2}{\sin\left(60^\circ-\theta\right)}$，即$\frac{2c}{\sin\theta}=\frac{c-a}{\sin\left(60^\circ-\theta\right)}$，

即$\frac{2c}{\sin\theta}=\frac{c-a}{\sin60^\circ\cos\theta-\cos60^\circ\sin\theta}=\frac{c-a}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta}$，

由$\cos\theta=\frac{7\sqrt{31}}{62}$可得$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{7\sqrt{31}}{62}\right)^2}=\frac{5\sqrt{93}}{62}$，

代入上式化简可得：$3c=5a$，则$9c^2=25a^2$，则$9\left(a^2+b^2\right)=25a^2$，解得$\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$.

故渐近线为：$y=\pm\frac{4}{3}x$.

故选：D.

8. 若函数$f\left(x\right)=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}+m\cos x$在$\left[0,+\infty\right)$上单调递增，则实数$m$的取值范围为（　　）

A. $\left(-\infty,0\right]$　　B. $\left(-\infty,\frac{e}{2}\right]$　　C. $\left(-\infty,1\right]$　　D. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意可得$f'\left(x\right)\geq0$在$\left[0,+\infty\right)$上恒成立，构建$g\left(x\right)=f'\left(x\right)$，结合定点$g\left(0\right)=0$分析运算.

【详解】因为$f\left(x\right)=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}+m\cos x$，则$f'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)-m\sin x$，

由题意可得$f'\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)-m\sin x\geq0$在$\left[0,+\infty\right)$上恒成立，

构建$g\left(x\right)=f'\left(x\right)$，则$g'\left(x\right)=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)-m\cos x$，

注意到$g(0)=0$，则$g'(0)=\frac{1}{2}-m\ge 0$，解得$m\le\frac{1}{2}$，

若$m\le\frac{1}{2}$，则$g'(x)=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)-m\cos x\ge\frac{1}{4}\times 2\sqrt{e^{\frac{x}{2}}\times e^{-\frac{x}{2}}}-m\cos x=\frac{1}{2}-m\cos x$，

当且仅当$e^{\frac{x}{2}}=e^{-\frac{x}{2}}$，即$x=0$时，等号成立，

若$0\le m\le\frac{1}{2}$，因为$\cos x\le 1$，则$-m\cos x\ge -m$，

可得$g'(x)\ge\frac{1}{2}-m\cos x\ge\frac{1}{2}-m\ge 0$；

若$m<0$，因为$\cos x\ge -1$，则$-m\cos x\ge -m$，

可得$g'(x)\ge\frac{1}{2}-m\cos x\ge\frac{1}{2}-m>0$；

综上所述：当$m\le\frac{1}{2}$时，$g'(x)\ge 0$在$[0,+\infty)$上恒成立，

则$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，可得$g(x)\ge g(0)=0$，符合题意；

故实数m的取值范围为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

故选：D.

【点睛】方法定睛：两招破解不等式的恒成立问题

（1）分离参数法

第一步：将原不等式分离参数，转化为不含参数的函数的最值问题；

第二步：利用导数求该函数的最值；

第三步：根据要求得所求范围.

（2）函数思想法

第一步：将不等式转化为含待求参数的函数的最值问题；

第二步：利用导数求该函数的极值；

第三步：构建不等式求解.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 《尘劫记》是元代一部经典的古典数学著作，里面记载了一个有趣的数学问题：假设每对老鼠每月生子一次，每月生 12 只，且雌雄各半.1 个月后，有一对老鼠生了 12 只小老鼠，一共 14 只；2 个月后，每对老鼠各生 12 只小老鼠，一共 98 只，……，以此类推.记每个月新生的老鼠数量为a_n，每个月老鼠的总数量为b_n，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n,T_n，可知$a_1=12,b_1=14,a_2=84,b_2=98$，则下列说法正

确的是（　　）

A. $a_6=12\times7^6$　　B. $b_6=2\times7^6$　　C. $S_6=2\times7^6-2$　　D. $T_6=\dfrac{7^8-7}{3}$

【答案】AC

【解析】

【分析】根据题意分析可得数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均为等比数列，结合等比数列分析运算.

【详解】由题意可得：$a_{n+1}=12\times\dfrac{1}{2}b_n=6b_n, b_{n+1}=a_{n+1}+b_n=7b_n$，

即$b_{n+1}=7b_n$，且$b_1=14$，

所以数列$\{b_n\}$是以首项$b_1=14$，公比$q=7$的等比数列，则$b_n=14\times7^{n-1}=2\times7^n$，

可得$T_n=\dfrac{14(1-7^n)}{1-7}=\dfrac{7^{n+1}-7}{3}$，

当$n\geq2$时，$a_n=6b_{n-1}=12\times7^{n-1}$，且$a_1=12$满足上式，

故$a_n=12\times7^{n-1}$，

可得$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{12\times7^n}{12\times7^{n-1}}=7$，即数列$\{a_n\}$是以首项$a_1=12$，公比$q=7$的等比数列，

可得$S_n=\dfrac{12(1-7^n)}{1-7}=2\times7^n-2$，

综上可得：$a_6=12\times7^6$，$b_6=2\times7^7$，$S_6=2\times7^6-2$，$T_6=\dfrac{7^7-7}{3}$.

故A、C正确，B、D错误.

故选：AC.

10. 已知函数$f(x)=x(x+1)(x-1)$，过点$(1,0)$的直线l与曲线$y=f(x)$相切，则与直线l垂直的直线为（　　）

A. $4x-y+2=0$　　B. $x-2y+8=0$　　C. $x+y-5=0$　　D. $2x+4y-3=0$

【答案】AD

【解析】

【分析】首先求出函数的导函数，设切点坐标为$(x_0,x_0^3-x_0)$，即可表示出切线方程，再将$(1,0)$代入方程，即可得到关于x_0的方程，解得x_0，从而求出切线的斜率，再一一判断即可.

【详解】$f(x)=x(x+1)(x-1)=x(x^2-1)=x^3-x$，则$f'(x)=3x^2-1$，

设切点坐标为$(x_0,x_0^3-x_0)$，则$f'(x_0)=3x_0^2-1$，所以切线方程为$y-(x_0^3-x_0)=(3x_0^2-1)(x-x_0)$，

又切线过点$(1,0)$，所以$0-(x_0^3-x_0)=(3x_0^2-1)(1-x_0)$，

即$2x_0^3-3x_0^2+1=0$，故$(2x_0+1)(x_0-1)^2=0$，解得$x_0=1$或$x_0=-\frac{1}{2}$，

所以直线l的斜率为$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=3\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{1}{4}$或$f'(1)=3\times1^2-1=2$，

对于A：直线$4x-y+2=0$的斜率为4，符合题意，故A正确；

对于B：直线$x-2y+8=0$的斜率为$\frac{1}{2}$，不符合题意，故B错误；

对于C：直线$x+y-5=0$的斜率为-1，不符合题意，故C错误；

对于D：直线$2x+4y-3=0$的斜率为$-\frac{1}{2}$，符合题意，故D正确；

故选：AD

11. 已知函数$f(x)=2\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}-2\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{3}$，则下列说法错误的是（　　）

A. 函数$f(x)$的最小正周期为6π

B. $(\pi,0)$是函数$f(x)$图象的一个对称中心

C. 将函数$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位后得到一个偶函数

D. 函数$f(x)$在$[0,10\pi]$上有7个零点

【答案】ABC

【解析】

【分析】首先利用二倍角公式及辅助角公式化简函数解析式，再根据正弦函数的性质一一判断即可

【详解】$f(x)=2\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}-2\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{3}$

$=\sin\frac{2x}{3}-\sqrt{3}\cos\frac{2x}{3}-\sqrt{3}$

$=2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{2x}{3}\right)-\sqrt{3}$

$=2\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$，

即$f(x)=2\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$，故最小正周期$T=\frac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$，故A错误；