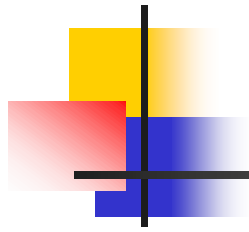




# 《自动控制原理》

---

## 第四章 根轨迹分析法



---

**4.1 根轨迹法的基本概念**

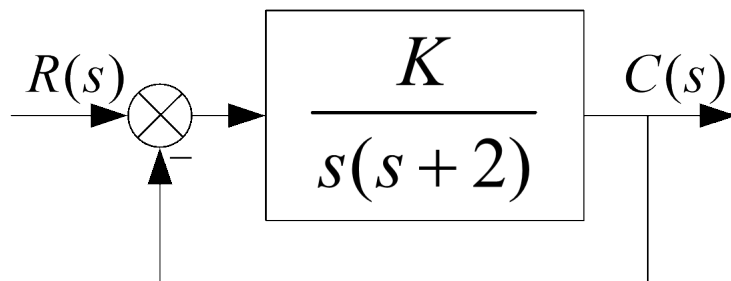
**4.2 绘制根轨迹的基本条件和规则**

**4.3 特殊根轨迹**

**4.4 用根轨迹法分析系统性能**

# 4.1 根轨迹法的基本概念

对于如图所示单位反馈系统



系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

其中 $K$ 称为根轨迹增益（注意和开环增益不同）

系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$$



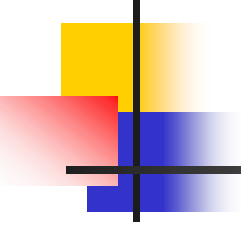
系统的特征方程为

$$s^2 + 2s + K = 0$$

系统的特征根或闭环极点为

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - K}$$

闭环极点随变量 $K$ 的变化而变化，从而影响系统的瞬态响应，系统具有不同的动态过程。因为系统闭环极点的位置影响系统的瞬态响应及品质指标。



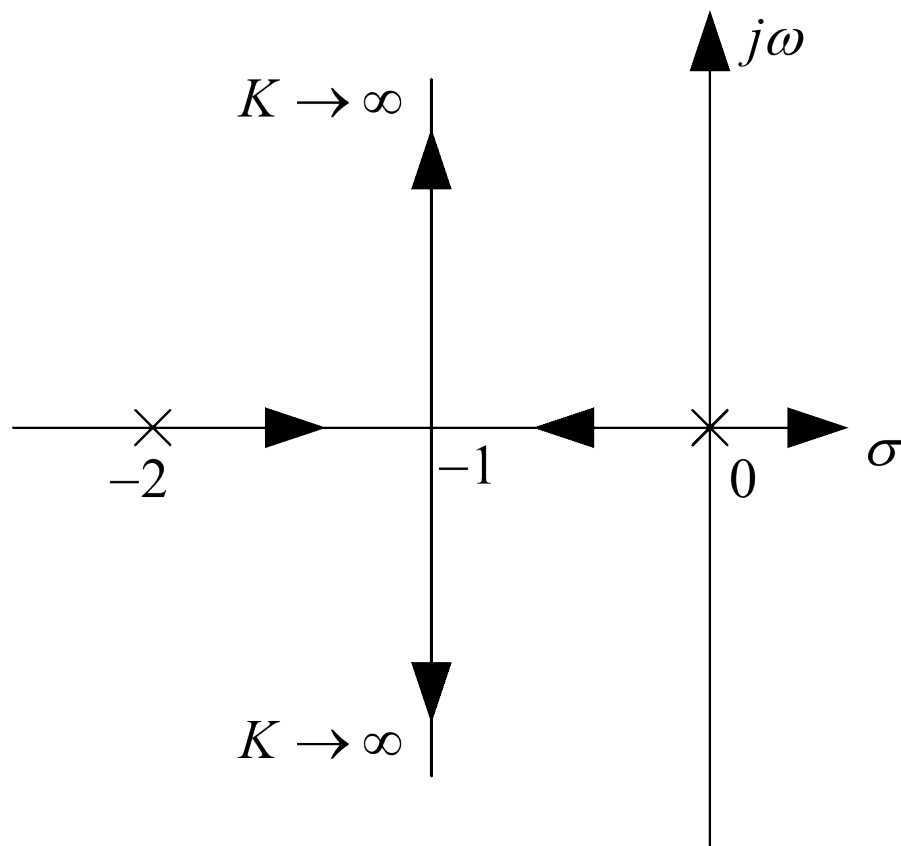
1、当 $K=0$ 时；系统特征根 $s_1=0$ ， $s_2=-2$ ，与开环极点重合。

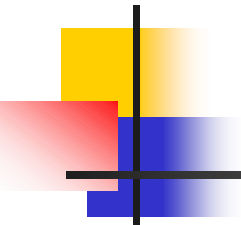
2、当 $0<K<1$ 时，系统特征根 $s_1$ 、 $s_2$ 均为负实根，系统呈过阻尼状态，阶跃响应单调变化。

3、当 $K=1$ 时， $s_1=s_2=-1$ ，两根重合，系统呈临界阻尼状态，阶跃响应为等幅振荡过程。

4、当 $1<K<\infty$ 时，系统特征根 $s_1$ 、 $s_2$ 为一对共轭复根，且实部为负，虚部随 $K$ 增大而增大。系统呈欠阻尼状态，阶跃响应为衰减振荡过程。

当 $K$ 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时，系统特征根在 $s$ 平面上移动的轨迹如图所示，箭头表示 $K$ 增大的方向。





由此可见，当 $K$ 由 $0$ 至 $\infty$ 变化时，特征根 $s_1$ 、 $s_2$ 均在 $s$ 平面的左半平面，因此，系统对所有 $K$ 值均是稳定的。但是系统在不同的 $K$ 值下，其动态特性不同，为了使系统尽可能达到稳、准、快的要求，应多次改变 $K$ 值，以调节闭环极点在 $s$ 平面的位置，达到寻求理想的输出特性曲线的目的。

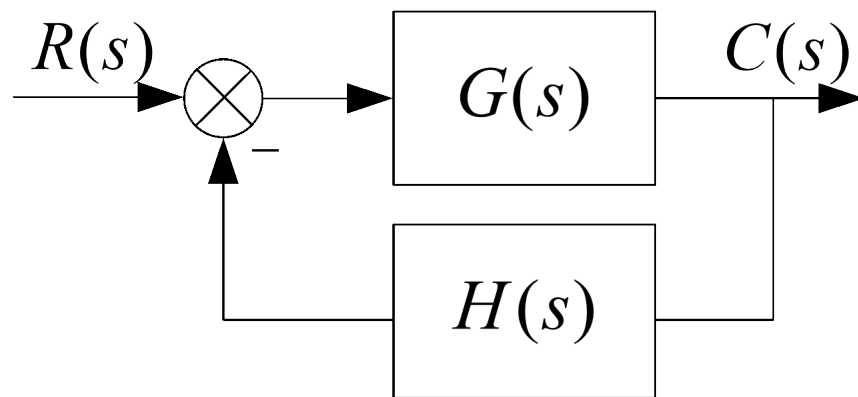
但每改变一次 $K$ 值，需重新求解一次闭环特征方程，这使得系统的分析、计算工作量很大，特别是当系统高于三阶时，求解特征根是非常困难的；特别是当参数变化时，要求出特征方程的根就更加困难了。

## 4.2 绘制根轨迹的基本条件和规则

### 4.2.1 根轨迹方程

所谓根轨迹就是当系统的某个参数从 $0 \rightarrow +\infty$ 变化时，系统特征根在 $s$ 平面上移动所形成的轨迹。而用图解的方法绘制根轨迹的依据是根轨迹方程。

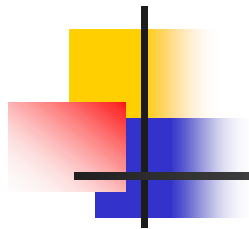
如图示系统结构图



系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)$$





系统的闭环传递函数为：
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

则系统的闭环特征方程为：

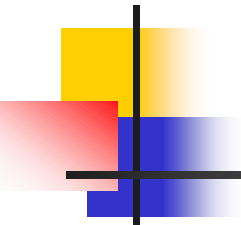
$$1 + G(s)H(s) = 0$$

因此，满足开环传递函数等于-1的 $s$ ，即为闭环特征根，也就是根轨迹上的一个点。

一般系统的开环传递函数可表示成如下形式

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -1 \quad n \geq m$$

$z_i$ 为开环传递函数的零点， $K$ 为开环传递函数的极点， $p_i$ 为根轨迹增益。



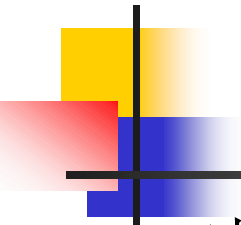
因为开环传递函数 $G(s)H(s)$ 为复变量 $s$ 的函数，所以可以将其用幅值和相角表示，根据等式两边幅值和相角相等的条件，可将特征方程式表示成幅值条件和相角条件。

■ 幅值条件：

$$\frac{K \prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = 1$$

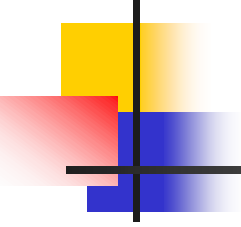
■ 相角条件：

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = \pm(2k + 1) \times \pi \quad (k=0,1,2,\dots)$$



对于系统中某个参数从 $0 \rightarrow +\infty$ 变化时，满足以上两式的所有 $s$ 点，均为闭环极点，也就是根轨迹上的所有点。以上两式是绘制系统根轨迹及应用根轨迹分析和设计控制系统的重要依据。

复平面上的 $s$ 点如果是闭环极点，那么它与开环零、极点所组成的向量必须满足幅值条件和相角条件。由于根轨迹的幅值条件与根轨迹增益 $K$ 有关，而相角条件与 $K$ 无关。所以在绘制根轨迹时，一般先用相角条件（充分必要条件）确定轨迹上的点；然后利用幅值条件（必要条件）确定根轨迹上该点对应的 $K$ 值；最后将复平面上所有满足相角条件的 $s$ 点顺序连成曲线，这种方法被称为试探法。



根据幅值条件与相角条件，采用试探法尽管可逐点精确绘制根轨迹，但它很麻烦，需要在 $s$ 平面上任选足够多的实验点，来根据相角条件判断是否为根轨迹上的点，计算量大，不便于人工绘制，仅适用于计算机绘制。所以，人们根据相角条件和幅值条件推导出了若干绘制根轨迹的规则，利用这些规则可以简捷绘出根轨迹的大致图形，并为精确绘制根轨迹指明方向。



## 4.2.2 绘制根轨迹的基本规则

### 1、根轨迹的分支数

根据根轨迹方程可得：

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K \prod_{j=1}^m (s - z_j) = 0$$

由于 $n \geq m$ ，特征方程的阶次等于开环极点数 $n$ ，而 $n$ 阶特征方程就对应应有 $n$ 个特征根或 $n$ 个闭环极点，所以其根轨迹的分支数就等于开环极点数 $n$ 。

当 $K$ 从 $0 \rightarrow +\infty$ 变化时，每个特征根都由起点向终点连续移动，形成一条根轨迹。

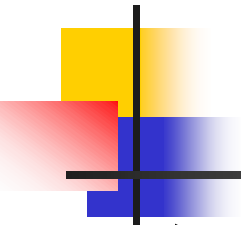


## 2、根轨迹的起点与终点

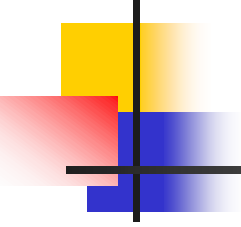
根轨迹的起点是指根轨迹上对应于 $K=0$ 的点；终点是指根轨迹上对应 $K=+\infty$ 的点。

根据幅值条件式，可得

$$\frac{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} = \frac{1}{K}$$

- 
- 当 $K=0$ 时，上式的右边 $1/K \rightarrow +\infty$ 。上式的左边，只有 $s \rightarrow p_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) 时为无穷大。也就是说，当 $K=0$ 时，只有 $s \rightarrow p_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) 时，等式才成立。所以，根轨迹的起点一定位于系统的 $n$ 个开环极点处。
  - 当 $K \rightarrow +\infty$ 时，上式的右边 $1/K=0$ 。而等式的左边，当 $s \rightarrow z_j$ 时为0，即根轨迹终止于开环零点。
  - 另外，当 $n > m$ 时，无穷远点，即 $s \rightarrow +\infty$ 时，等式

$$\frac{\prod_{j=1}^m |s - z_j|}{\prod_{i=1}^n |s - p_i|} \approx \frac{1}{s^{n-m}} \Big|_{s \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

- 
- 故当 $n > m$ 时，有  $m$ 支根轨迹终止于开环零点，其余 $(n - m)$ 支根轨迹趋向无穷远处。
  - 由此可见， $n$ 阶系统的 $n$ 支根轨迹（ $n$ 个分支）分别起始于  $n$ 个开环极点，其中  $m$ 支终止于 $m$ 个开环零点，其余 $(n - m)$ 支终止于无穷远处。
  - 如果把趋向无穷远处根轨迹的终点称为无限开环零点，有限数值的开环零点称为有限开环零点，那么可以说根轨迹必终止于开环零点处。





---

### 3、根轨迹的对称性

由于系统闭环特征方程式是一实系数方程，其特征根为实根或共轭复根，所以当 $K$ 从 $0 \rightarrow +\infty$ 连续变化时，根轨迹必然对称于实轴，且连续变化。



例4.1 已知系统开环传递函数为

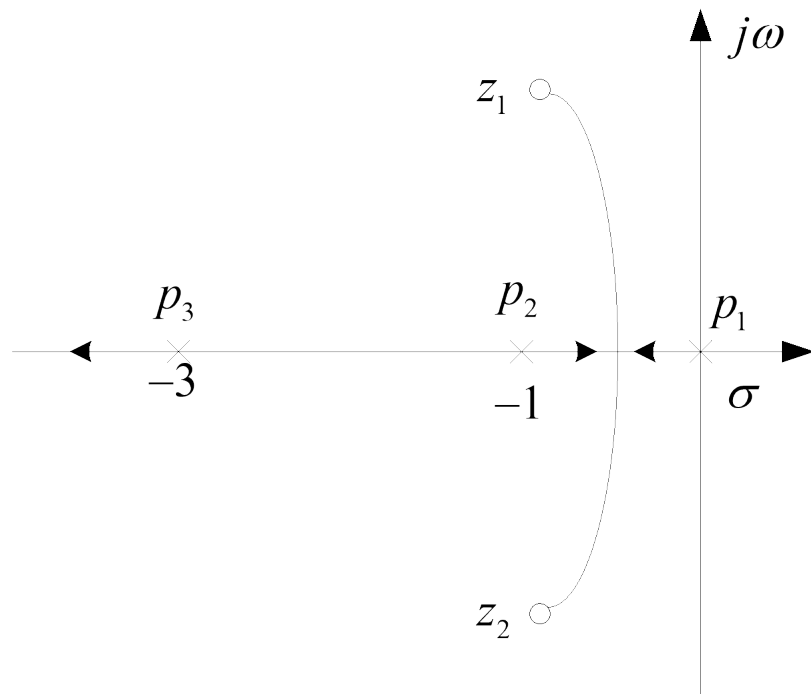
$$G(s)H(s) = \frac{K [s + (1 - j)][s + (1 + j)]}{s(s + 1)(s + 3)}$$

试确定系统的根轨迹。

解：由开环传递函数知： $n=3$ 、 $m=2$ ，因此系统有3条根轨迹；

根轨迹的起点为 $p_1=0$ ， $p_2=-1$ ， $p_3=-3$ ；

根轨迹的终点为 $z_1=-1+j$ ， $z_2=-1-j$ ；另外 $n-m=1$ 条根轨迹终止于无穷远点。

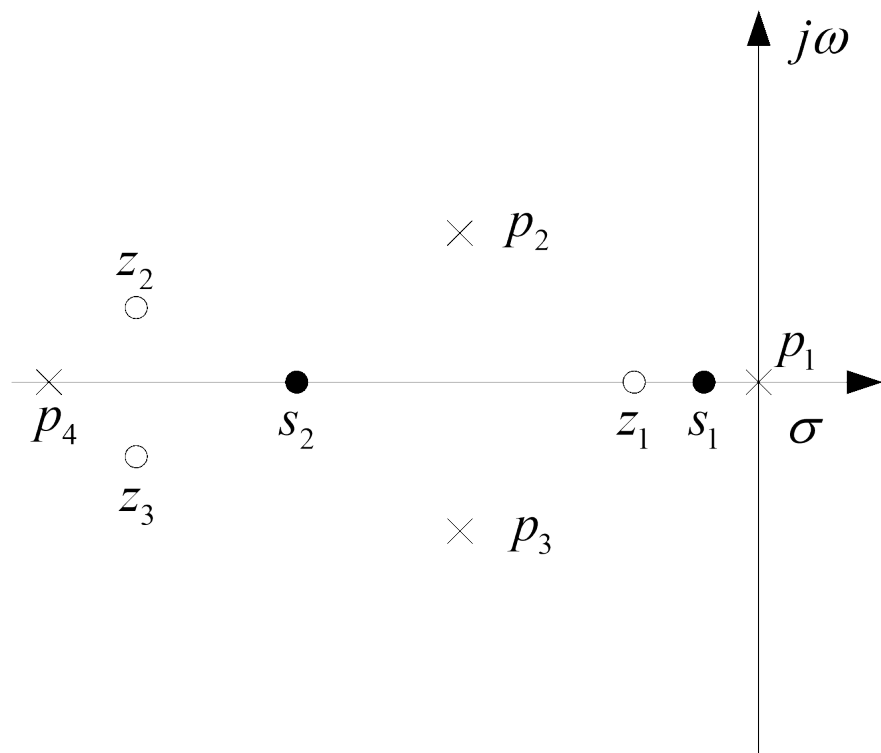


其中，“X”表示开环传递函数的极点（根轨迹的起点）；“O”表示开环传递函数的零点（根轨迹的终点）。

是否存在另一种画法呢？

## 4、实轴上的根轨迹

设系统的开环零点、极点分布如图所示，其零极点将实轴分成了若干个区间段。

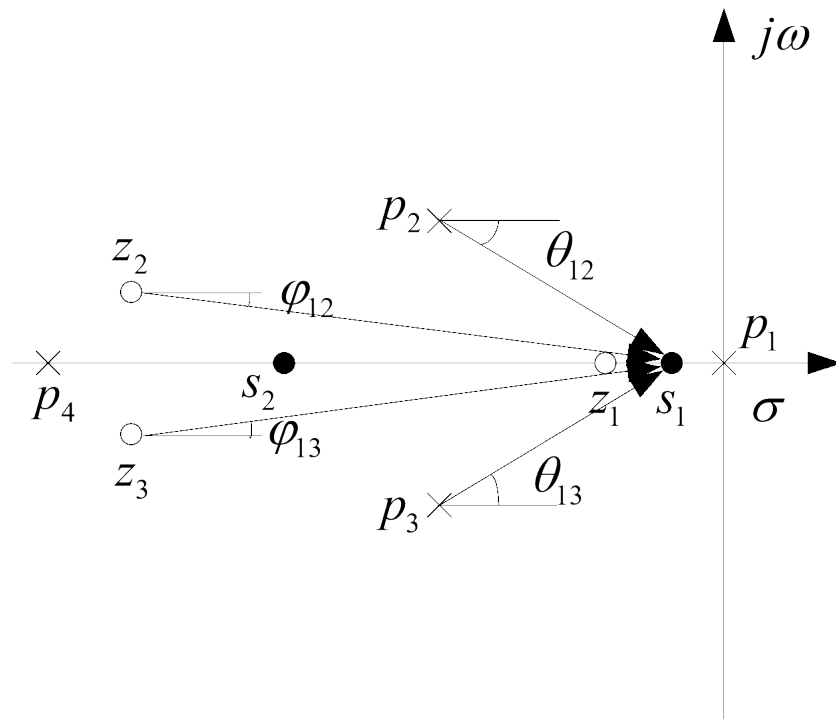


(1) 在  $[z_1 \ p_1]$  区间上取一点  $s_1$ ，由各开环零极点向该点分别引矢量，如图所示。设

$$\angle(s_1 - z_j) = \varphi_{1j} \quad , \quad \text{则有: } \angle(s_1 - p_i) = \theta_{1i}$$

$$\theta_{12} = -\theta_{13}$$

$$\varphi_{12} = -\varphi_{13}$$

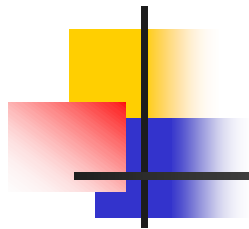




此时：

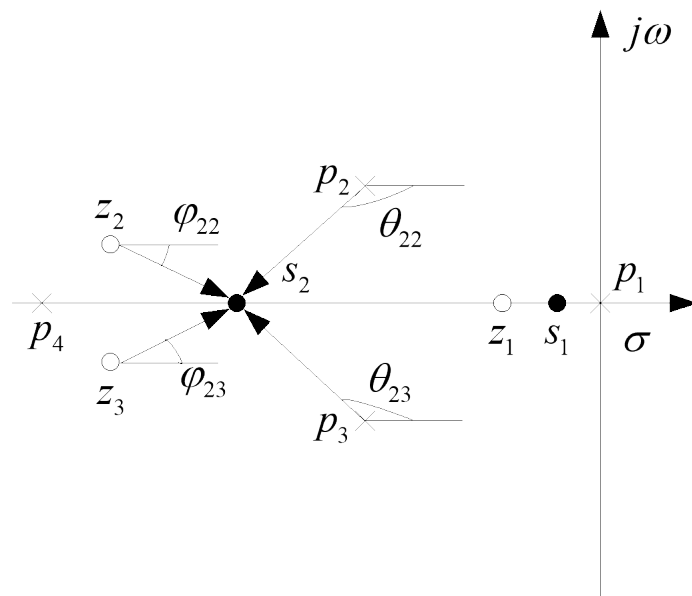
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \angle(s_1 - z_j) - \sum_{i=1}^4 \angle(s_1 - p_i) &= \varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13} - \theta_{11} - \theta_{12} - \theta_{13} - \theta_{14} \\ &= \varphi_{11} - \theta_{11} - \theta_{14} = -180^\circ \end{aligned}$$

可见  $s_1$  满足相角方程，是根轨迹上的一个点。



(2) 在 $[p_4 \ z_1]$ 区间上取一点 $s_2$ ，由各开环零极点向改点分别引矢量，如图所示。设 $\angle(s_2 - z_j) = \varphi_{2j}$ ，则有： $\angle(s_2 - p_i) = \theta_{2i}$

$$\theta_{22} = -\theta_{23} \quad \varphi_{22} = -\varphi_{23}$$





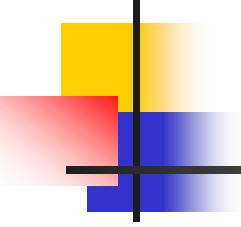
---

此时：

$$\sum_{j=1}^3 \angle(s_2 - z_j) - \sum_{i=1}^4 \angle(s_2 - p_i) = \varphi_{21} + \varphi_{22} + \varphi_{23} - \theta_{21} - \theta_{22} - \theta_{23} - \theta_{24}$$
$$= \varphi_{21} - \theta_{21} - \theta_{24} = 0^\circ$$

可见  $s_2$  不满足相角方程，不是根轨迹上的一个点。





---

综上所述，实轴上的根轨迹只能是那些其右侧实数开环零点和开环极点总数为奇数的区间段。而 $s$ 平面上的共轭复数开环零极点对确定实轴上的根轨迹没有影响。



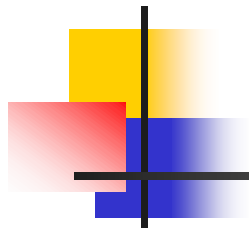
## 5、根轨迹的渐近线

当 $n>m$ 时，有  $n-m$  条根轨迹终止于无穷远点，其方向需要由根轨迹的渐近线来确定。

### (1) 渐近线与实轴的夹角

设某无穷远点是根轨迹上的点，记为 $s$ ，则其到各开环零极点与实轴正方向的夹角都可看做相等，记为 $\theta$ 。则 $s$ 应该满足相角方程：

$$\sum_{j=1}^m \angle(s - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s - p_i) = \pm(2k + 1)\pi$$



即  
则

$$m\theta - n\theta = \pm(2k + 1)\pi$$

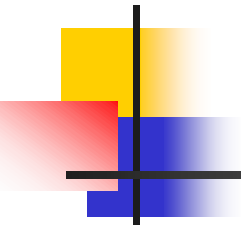
$$\theta = \frac{m(2k + 1)\pi}{n - m}, k = 0, 1, 2, \dots$$

显然，渐近线的数目等于终点在无穷远点的根轨迹的数目。



## (2) 渐近线与实轴的交点

假设在根轨迹上无穷远处有一点 $s$ ，即当 $s \rightarrow \infty$ 时，由于系统开环零、极点与根轨迹上无限远 $s$ 点构成的向量差别很小，几乎重合。因而，可以将从各个不同的开环零、极点指向 $s$ 点的向量，用从同一点 $\sigma_A$ 处指向无限远 $s$ 点的向量来代替，即用向量 $(s - \sigma_A)$ 来代替向量 $(s - z_i)$ 和 $(s - p_1)$ 。



由根轨迹方程，得：

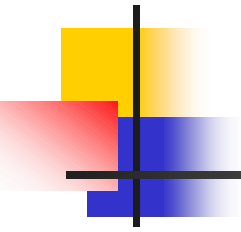
$$\frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = -\frac{1}{K}$$

当 $s \rightarrow \infty$ 时，认为

$$s - z_1 = s - z_2 = \dots = s - z_m = s - p_1 = s - p_2 = \dots = s - p_n = s - \sigma_A$$

带入得

$$\frac{1}{(s - \sigma_A)^{n-m}} = -\frac{1}{K}$$



因为：

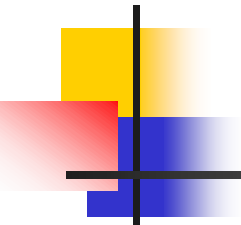
$$-K = \frac{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}{\prod_{j=1}^m (s - z_j)} = s^{n-m} + \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j \right) s^{n-m-1} + \dots$$

将 $-K$ 的表达式带入，得到

$$(s - \sigma_a)^{n-m} = s^{n-m} + (n-m)\sigma_a s^{n-m-1} + \dots = -K = s^{n-m} + \left( \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j \right) s^{n-m-1} + \dots$$

为保证第二项系数相等，因此有

$$\sigma_A = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m}$$



例4.2 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)}$$

试绘制出系统的根轨迹。

解：  $n=3$ ，  $m=0$ ， 系统有3条根轨迹， 且全部终止于无穷远点；

根轨迹的起点为  $p_1=0$ ，  $p_2=-1$ ，  $p_3=-3$ ；

实轴上的根轨迹：  $[-1,0]$ ，  $(-\infty,-3]$  区间段；



渐近线与实轴的夹角：

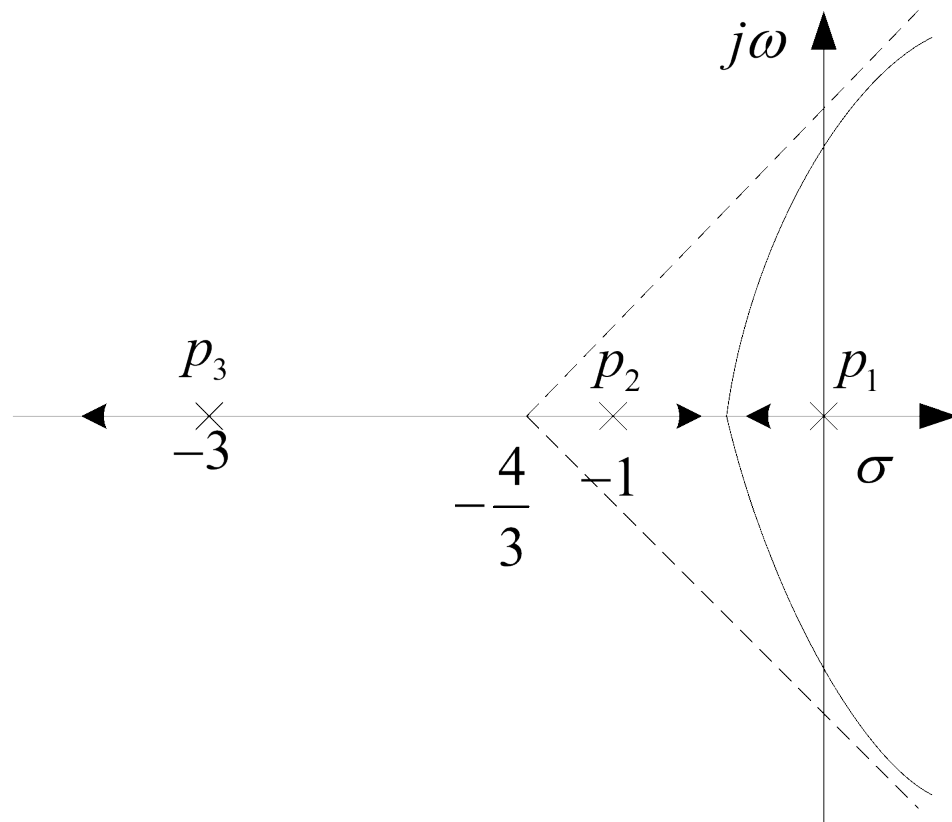
$$\theta = \frac{m(2k+1)\pi}{3} = \pm 60^\circ, \pm 180^\circ \quad k = 0, 1$$

渐近线与实轴的交点：

$$\sigma_A = \frac{0-1-3-0}{3} = -\frac{4}{3}$$

因此根轨迹如图所示，图中虚轴为根轨迹的渐近线。



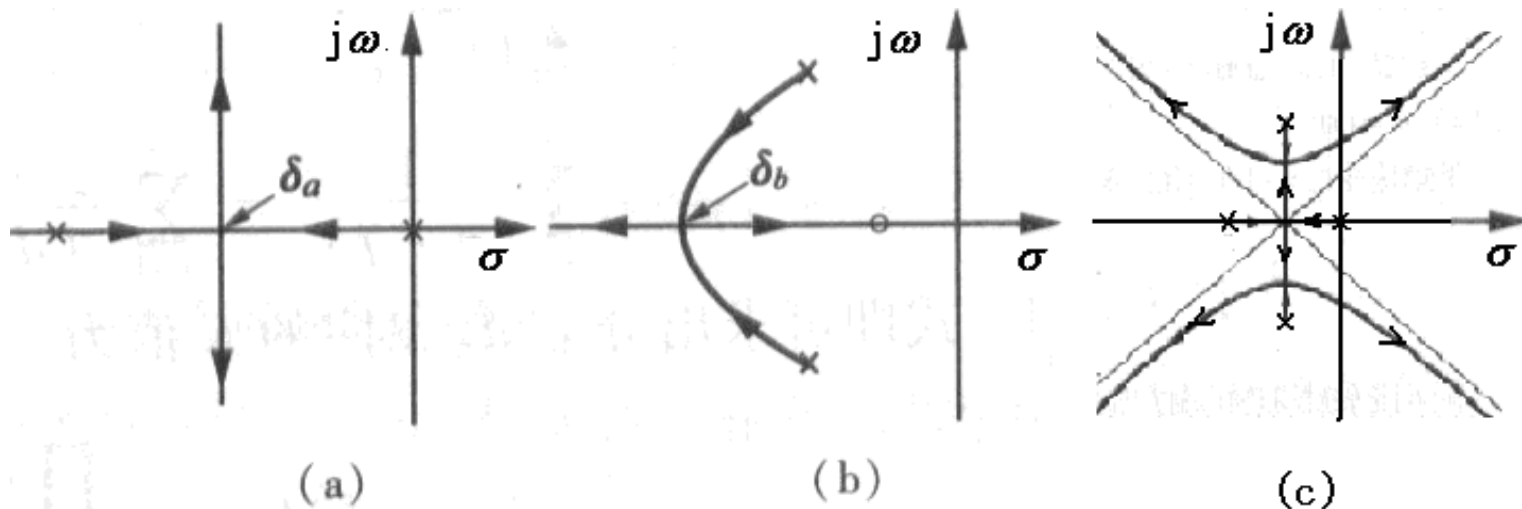


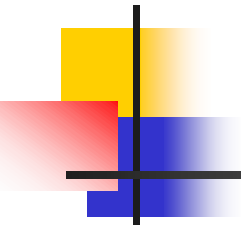
有两条根轨迹在 $[-1, 0]$ 的实轴上交汇，那交汇点的坐标是什么呢？

## 6、根轨迹的分离点与会合点

根轨迹在实轴相交后进入复平面的点称为根轨迹的分离点，而根轨迹由复平面进入实轴的交汇点称为根轨迹的会合点。

分离点与会合点实际上是闭环特征方程的**重根**。





鉴于分离点和会合点是特征方程的重根，因此，可用求解特征方程重根的方法对它们进行求解。

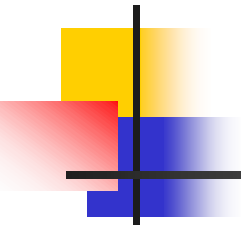
设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{KB(s)}{A(s)}$$

则，闭环特征方程为  $KB(s) + A(s) = 0$

由代数方程式解的性质知，当

$$D(s) = A(s) + KB(s) = 0 \qquad D'(s) = A'(s) + KB'(s) = 0$$



---

化简方程可得：

$$A(s)B'(s) - A'(s)B(s) = 0$$

即可确定系统的分离点和会合点。

应该注意，按照该式求出的根并非都是分离点和会合点，只有位于根轨迹上的那些重根才是真正的分离点和会合点。



例4.3 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+3)}$$

求解根轨迹的分离点和会合点。

解：由系统的开环传递函数可得：

$$G(s)H(s) = \frac{KB(s)}{A(s)} = \frac{K}{s(s+1)(s+3)}$$

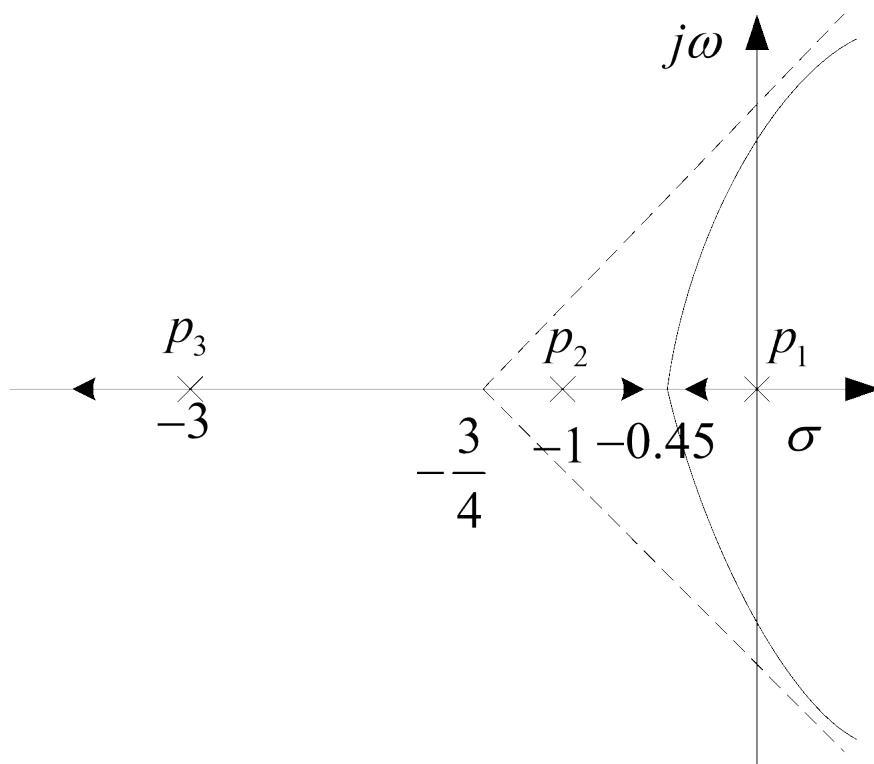
因此

$$A(s)B'(s) + A'(s)B(s) = 3s^2 + 8s + 3 = 0$$

求解得到

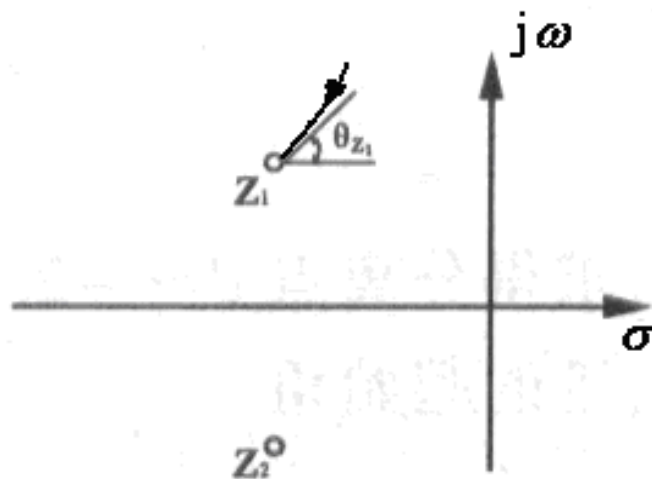
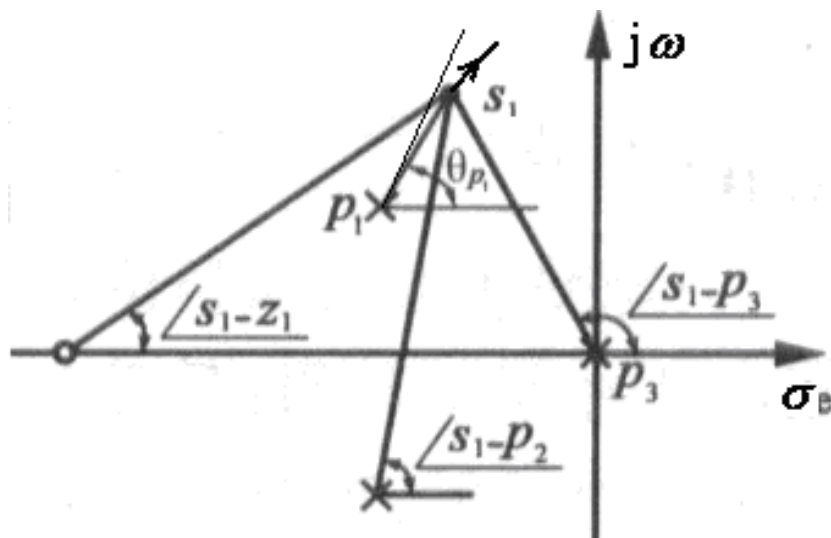
$$s_1 = -0.45, s_2 = -2.22$$

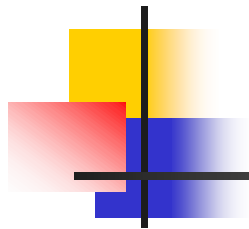
$s_1$ 在根轨迹的范围内，因此 $s_1$ 为分离点。而 $s_2$ 不在根轨迹上，故舍去。



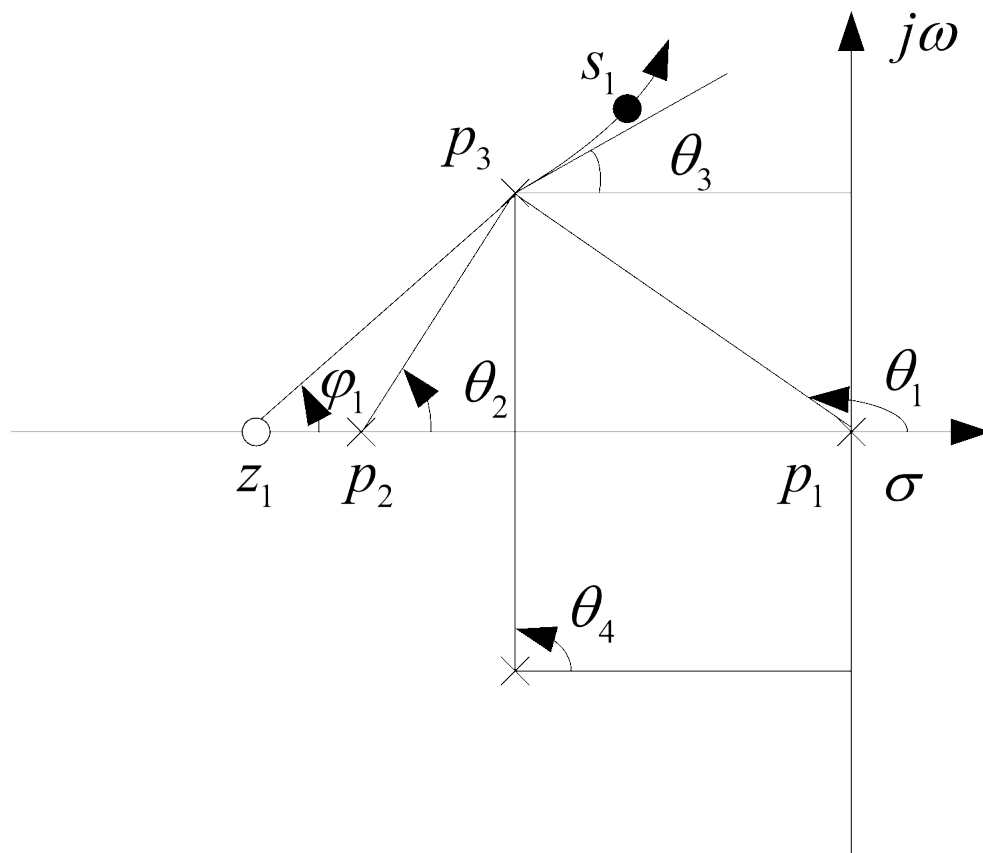
## 7、根轨迹的出射角与入射角

根轨迹的出射角，是指起始于复数开环极点的根轨迹在起点处的切线与正实轴方向的夹角。而根轨迹的入射角，是指终止于复数开环零点的根轨迹在终点处的切线与正实轴方向的夹角。

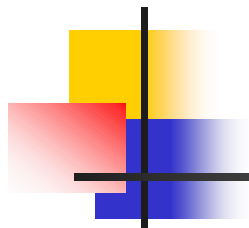




设某系统的开环零极点分布如图所示。其中起点 $p_3$ 的出射角为 $\theta_3$ ， $s_1$ 为根轨迹上的一点。







则 $s_1$ 应该满足相角方程

$$\angle(s_1 - z_1) - \angle(s_1 - p_1) - \angle(s_1 - p_2) - \angle(s_1 - p_3) - \angle(s_1 - p_4) = \pm(2k + 1)\pi$$

当 $s_1 \rightarrow p_3$ 时,  $\angle(s_1 - p_3) = \theta_3$

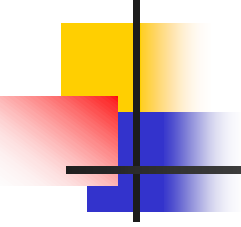
代入上式可得:

$$\angle(s_1 - z_1) - \angle(s_1 - p_1) - \angle(s_1 - p_2) - \theta_3 - \angle(s_1 - p_4) = \pm(2k + 1)\pi$$

即  $\theta_3 = \pm(2k + 1)\pi + \varphi_1 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_4)$

因此可推导出根轨迹出射角的一般公式

$$\theta_l = \pm(2k + 1)\pi + \sum_{j=1}^m \varphi_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^n \theta_i$$



---

式中， $\theta_l$  为待求开环复数极点  $p_l$  的出射角；  
 $\theta_i$  为其他开环极点到  $p_l$  的矢量相角；  
 $\varphi_j$  为开环零点  $p_l$  到的矢量相角。

同理，可计算入射角的公式为

$$\varphi_k = \pm(2k + 1)\pi + \sum_{i=1}^n \theta_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \varphi_j$$



例4.4 已知系统开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s^2 + s + 1.25}$$

试绘制系统的根轨迹。

解：因为 $n=2$ ， $m=1$ ，系统有两条根轨迹，且有 $n-m=1$ 条无穷远点的终点；

根轨迹的起点为 $p_1=-(0.5+j)$ ， $p_2=-(0.5-j)$ ，根轨迹的一个终点为 $z_1=-1$ ；另一个终点为无穷远点；

实轴上的根轨迹是 $(-\infty, -1]$ 区间段；



根轨迹有一条渐近线，为复实轴；

根轨迹的会合点，根据公式

$$s^2 + 2s + 0.25 = 0$$

求得两个根分别为 $s_1 = -0.13$ ， $s_2 = -1.87$ ；分析 $s_1$ 不在根轨迹上，舍去， $s_2$ 是根轨迹在实轴上的会合点；

因为

$$\angle(p_1 - z_1) = \arctan 2 = 63.4^\circ, \angle(p_1 - p_2) = 90^\circ$$

求得

$$\theta_1 = 180^\circ + 63.4^\circ - 90^\circ = 153.4^\circ$$

$$\theta_2 = -153.4^\circ$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/677106116130006116>