2023-2024学年高二数学下学期期中仿真模拟试卷05
数　学
（新高考九省联考题型）

（考试时间：120分钟　试卷满分：150分）

注意事项：

1．本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答第I卷时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3．回答第II卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

4．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．空间四边形$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{c}$，点$P$为$AB$中点，点$Q$为$CD$靠近$D$的三等分点，则$\overrightarrow{PQ}$等于（　　）

A．$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$　　B．$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

C．$-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$　　D．$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

2．已知随机变量ξ服从正态分布$N\left(1,2\right)$，则$D\left(2\xi+4\right)=$（　　）

A．4　　B．6　　C．11　　D．8

3．用1，2，3，4四个数字组成没有重复数字的三位偶数，共有（　　）

A．6个　　B．18个　　C．24个　　D．12个

4．$\left(2-x\right)^5$展开式中的第三项为（　　）

A．$10x^2$　　B．$40x^3$　　C．$-40x^3$　　D．$80x^2$

5．一个袋中有4个红球，3个黑球，小明从袋中随机取球，设取到一个红球得2分，取到一个黑球得1分，从袋中任取4个球，则小明得分大于6分的概率是（　　）

A．$\frac{13}{35}$　　B．$\frac{14}{35}$　　C．$\frac{18}{35}$　　D．$\frac{22}{35}$

6．在数学中，有一个被称为自然常数（又叫欧拉数）的常数$\mathrm{e}\approx 2.71828$．小明在设置银行卡的数字密码时，打算将自然常数的前6位数字2，7，1，8，2，8进行某种排列得到密码.如果排列时要求2不排第一个，两个8相邻，那么小明可以设置的不同的密码个数为（　　）

A．30　　B．32　　C．36　　D．48

7．某保险公司将其公司的被保险人分为三类：“谨慎的”“一般的”“冒失的”．统计资料表明，这三类人在一年内发生事故的概率依次为0.05，0.15，0.30.若该保险公司的被保险人中“谨慎的”被保险人占20%，“一般的”被保险人占50%，“冒失的”被保险人占30%，则该保险公司的一个被保险人在一年内发生事故的概率是（　　）

A．0.155　　B．0.175　　C．0.016　　D．0.096

8．已知实数x，y满足$e^y\ln x = ye^x$，$y>1$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A. $x+y<2$　　B. $y>x$　　C. $y<x+1$　　D. $xy<e^2$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9．某大学的3名男生和3名女生利用周末到社区进行志愿服务，当天活动结束后，这6名同学排成一排合影留念，则下列说法正确的是（　　）

A. 若要求3名女生相邻，则这6名同学共有144种不同的排法

B. 若要求女生与男生相间排列，则这6名同学共有36种排法

C. 若要求3名女生互不相邻，则这6名同学共有144种排法

D. 若要求男生甲不在排头女生乙不在排尾，则这6名同学共有480种排法

10．一个口袋中有大小形状完全相同的3个红球和4个白球，从中取出2个球.下列命题正确的是（　　）

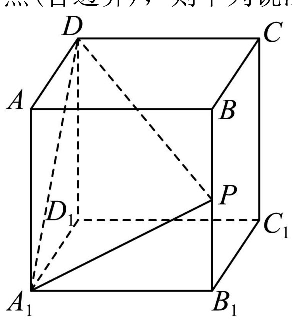
A. 如果是不放回地抽取，那么取出2个红球和取出2个白球是对立事件

B. 如果是不放回地抽取，那么第2次取到红球的概率等于第1次取到红球的概率

C. 如果是有放回地抽取，那么取出1个红球1个白球的概率是$\frac{24}{49}$

D. 如果是有放回地抽取，那么在至少取出一个红球的条件下，第2次取出红球的概率是$\frac{7}{11}$

11．如图，在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P为棱BB_1的中点，Q为正方形BB_1C_1C内一动点(含边界)，则下列说法中正确的是（　　）



A. 若D_1Q∥平面A_1PD，则动点Q的轨迹是一条线段

B. 存在Q点，使得$D_1Q\perp$平面A_1PD

C. 当且仅当Q点落在棱CC_1上某点处时，三棱锥$Q-A_1PD$的体积最大

D. 若$D_1Q=\frac{\sqrt{6}}{2}$，那么Q点的轨迹长度为$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12．已知点$A(-1,2,-1)$，平面α经过原点O，且垂直于向量$\vec{n}=(1,-1,3)$，则点A到平面α的距离为__________.

13.有5人参加某会议，现将参会人安排到酒店住宿，要在a、b、c三家酒店选择一家，且每家酒店至少有一个参会人入住，则这样的安排方法共有______.

14.已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，P，Q，R分别在棱AB，CC_1，D_1A_1上，且满足$AP=CQ=D_1R=a(0<a<1)$，G是PQR的重心，若直线DG与平面CPQ所成角为$45°$，则a的值为________.

四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．已知$\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$展开式中的第3项与倒数第2项的二项式系数之和为55.

（1）求n的值；

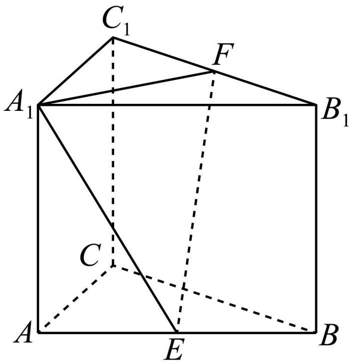
（2）求展开式中所有的有理项.

16．甲、乙两位同学参加学校组织的数学文化知识答题游戏，规则如下：甲同学先回答2道题，至少答对一道题后，乙同学才有机会答题，同样也是两次答题机会.两位同学每答对一道题可获得5积分，答错不得分，甲同学每道题答对的概率均为$\dfrac{3}{4}$，乙同学每道题答对的概率均为$\frac{1}{2}$，每道题答对与否互不影响.

（1）求乙同学有机会答题的概率；

（2）记X为甲和乙同学一共拿到的积分，求X的分布列和数学期望.

17．如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E,F 分别是棱 AB,B_1C_1 的中点，$\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$.

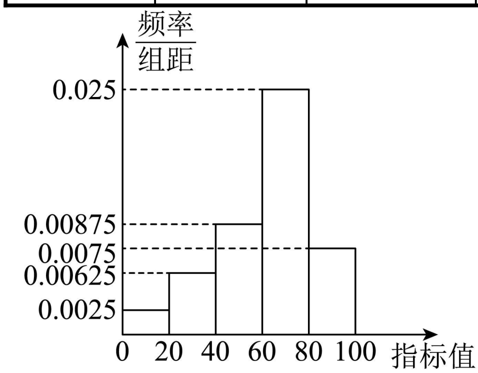


（1）证明：$EF\perp BC$；

（2）若 $AC=2,BC=4$，平面 A_1EF 与平面 ABC 所成的锐二面角的角余弦值为 $\dfrac{1}{3}$，求直线 EF 与平面 ABC 所成角的正弦值.

18．为了检测某种抗病毒疫苗的免疫效果，需要进行动物与人体试验.研究人员将疫苗注射到200只小白鼠体内，一段时间后测量小白鼠的某项指标值，按$[0,20),[20,40),[40,60),[60,80),[80,100)$分组，绘制频率分布直方图如图所示，实验发现小白鼠体内产生抗体的共有160只，其中该项指标值不小于60的有110只，假设小白鼠注射疫苗后是否产生抗体相互独立.

抗体	指标值		合计
	小于60	不小于60	
有抗体			
没有抗体			
合计			



（1）填写下面的2×2列联表，判断能否有95%的把握认为注射疫苗后小白鼠产生抗体与指标值不小于60有关.

（2）为检验疫苗二次接种的免疫抗体性，对第一次注射疫苗后没有产生抗体的40只小白鼠进行第二次注射疫苗，结果又有20只小自鼠产生抗体.

（i）用频率估计概率，求一只小白鼠注射2次疫苗后产生抗体的概率p；

（ii）以（i）中确定的概率p作为人体注射2次疫苗后产生抗体的概率，进行人体接种试验，记2个人注射2次疫苗后产生抗体的数量为随机变量X，求X的概率分布.

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$（其中$n=a+b+c+d$为样本容量）

$P(\chi^2\geq k_0)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.100	0.050	0.025
k_0	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024

19．已知函数 $f\left(x\right)=ax\mathrm{e}^{x}-\ln\left(x+1\right)\left(a\in\mathbf{R}\right)$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的极值点的个数；

（2）若 $f\left(x\right)\geq 2\ln a-3\ln 2-3$ 恒成立，求实数a的最大值.

2023-2024学年高二数学下学期期中仿真模拟试卷05

数　学

（新高考九省联考题型）

（考试时间：120分钟　试卷满分：150分）

注意事项：

1．本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答第I卷时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。

3．回答第II卷时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

4．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．空间四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{c}$，点 P 为 AB 中点，点 Q 为 CD 靠近 D 的三等分点，则 $\overrightarrow{PQ}$ 等于（　　）

A．$\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$　　B．$\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

C．$-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$　　D．$-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

【答案】D

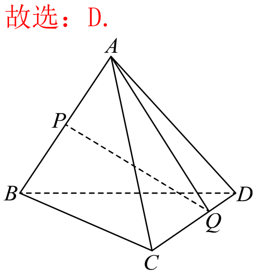
【解析】在四面体$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{c}$，

点 P 为 AB 中点，点 Q 为 CD 靠近 D 的三等分点，则

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$$

故选：D.



2．已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1,2)$，则 $D(2\xi+4)=$（　　）

A．4　　B．6　　C．11　　D．8

【答案】D

【解析】∵随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1,2)$，∴ $D(\xi)=2$，

则 $D(2\xi+3)=2^2\times D(\xi)=8$．

故选：D.

3．用1，2，3，4四个数字组成没有重复数字的三位偶数，共有（　　）

A．6个　　B．18个　　C．24个　　D．12个

【答案】D

【解析】先排个位数，有2种选择，再排十位和百位，由$3\times 2=6$种选择，

根据分步乘法计数原理可得共有$2\times 6=12$个不重复的三位偶数，

故选：D

4．$(2-x)^5$展开式中的第三项为（　　）

A．$10x^2$　　B．$40x^3$　　C．$-40x^3$　　D．$80x^2$

【答案】D

【解析】由题设，展开式通项为$T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r 2^{5-r}(-x)^r=(-1)^r 2^{5-r}\mathrm{C}_5^r x^r$，

第三项有$r=2$，则$T_3=(-1)^2 2^3\mathrm{C}_5^2 x^2=80x^2$.

故选：D

5．一个袋中有4个红球，3个黑球，小明从袋中随机取球，设取到一个红球得2分，取到一个黑球得1分，从袋中任取4个球，则小明得分大于6分的概率是（　　）

A．$\dfrac{13}{35}$　　B．$\dfrac{14}{35}$　　C．$\dfrac{18}{35}$　　D．$\dfrac{22}{35}$

【答案】A

【解析】记得分为X，则X的可能取值为5，6，7，8，

因为$P(X=7)=\dfrac{C_4^3C_3^1}{C_7^4}=\dfrac{12}{35}$，$P(X=8)=\dfrac{C_4^4C_3^0}{C_7^4}=\dfrac{1}{35}$，

所以$P(X>6)=P(X=7)+P(X=8)=\dfrac{12}{35}+\dfrac{1}{35}=\dfrac{13}{35}$.

故选：A

6．在数学中，有一个被称为自然常数（又叫欧拉数）的常数$\mathrm{e}\approx 2.71828$.小明在设置银行卡的数字密码时，打算将自然常数的前6位数字2，7，1，8，2，8进行某种排列得到密码.如果排列时要求2不排第一个，两个8相邻，那么小明可以设置的不同的密码个数为（　　）

A．30　　B．32　　C．36　　D．48

【答案】C

【解析】由题意，设置的密码可分为8排第一位和8不排第一位两类：

若8排第一位，则两个8占第一、二位，

再从四个位置中选两个位置给2，最后排7和1，共$\mathrm{C}_4^2\mathrm{A}_2^2=12$种；

若8不排第一位，则7或者1排第一位，

两个8捆绑，与两个2，以及7和1剩的数排列，共$\dfrac{\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_4^4}{2}=24$种，

所以设置的不同密码个数共36种，

故选：C.

7．某保险公司将其公司的被保险人分为三类：“谨慎的”“一般的”“冒失的”.统计资料表明，这三类人在一年内发生事故的概率依次为0.05，0.15，0.30.若该保险公司的被保险人中“谨慎的”被保险人占20%，“一般的”被保险人占50%，“冒失的”被保险人占30%，则该保险公司的一个被保险人在一年内发生事故的概率是（　　）

A．0.155　　B．0.175　　C．0.016　　D．0.096

【答案】B

【解析】设事件B_1表示“被保险人是‘谨慎的’”，事件B_2表示“被保险人是‘一般的’”，事件

B_3表示“被保险人是‘冒失的’”，则$P(B_1)=20\%$，$P(B_2)=50\%$，$P(B_3)=30\%$. 设事件A表示“被保险人在一年内发生事故”，则$P(A|B_1)=0.05$，$P(A|B_2)=0.15$，$P(A|B_3)=0.30$. 由全概率公式，得$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=0.05\times20\%+0.15\times50\%+0.30\times30\%=0.175$.

故选：B

8．已知实数x，y满足$\mathrm{e}^y\ln x=y\mathrm{e}^x$，$y>1$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A．$x+y<2$　　B．$y>x$　　C．$y<x+1$　　D．$xy<\mathrm{e}^2$

【答案】B

【解析】由$\mathrm{e}^y\ln x=y\mathrm{e}^x$可得$\frac{\mathrm{e}^y}{y}=\frac{\mathrm{e}^x}{\ln x}$，由于$y>1$，$\mathrm{e}^y>0$，所以$\frac{\mathrm{e}^y}{y}>0,\therefore\frac{\mathrm{e}^x}{\ln x}>0$，则$\ln x>0,$

故$x>1$，则$x+y>2$，故A错误，

令$f(x)=x-\ln x$，则$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，当$x>1$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，故$f(x)>f(1)=1$，所以$x-\ln x>1$，故$x-\ln x>0$，

由于$x>\ln x>0$，所以$\frac{\mathrm{e}^x}{x}<\frac{\mathrm{e}^x}{\ln x}$，又$\frac{\mathrm{e}^y}{y}=\frac{\mathrm{e}^x}{\ln x}$，则$\frac{\mathrm{e}^y}{y}>\frac{\mathrm{e}^x}{x}$，

令$g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x},g'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x}$，当$x>1$时，$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，由于$x>1$，$y>1$，且$\frac{\mathrm{e}^y}{y}>\frac{\mathrm{e}^x}{x}$，即$g(y)>g(x)$，所以$y>x>1$，故B正确，

令$h(x)=x+1-\mathrm{e}\ln x,h'(x)=1-\frac{\mathrm{e}}{x}=\frac{x-\mathrm{e}}{x}$，故当$x>\mathrm{e},h'(x)>0,$当$1<x<\mathrm{e},h'(x)<0,$故$x=\mathrm{e},h(x)_{\min}=\mathrm{e}+1-\mathrm{e}>0$，因此$x+1>\mathrm{e}\ln x\Rightarrow\frac{\mathrm{e}^x}{\ln x}>\frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1}$，又$\frac{\mathrm{e}^y}{y}=\frac{\mathrm{e}^x}{\ln x}$，所以$\frac{\mathrm{e}^y}{y}>\frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1}$，结合$g(x)$的单调性可得$y>x+1$，故C错误，

由$\mathrm{e}^y\ln x=y\mathrm{e}^x$得$\mathrm{e}^{y-x}=\frac{y}{\ln x},\because y-x>1,\therefore\mathrm{e}^{y-x}>\mathrm{e},$故$\frac{y}{\ln x}>\mathrm{e}$，所以$y>\mathrm{e}\ln x,$

则$xy>\mathrm{e}x\ln x$，由于$x>\mathrm{e},y=x>0,y=\ln x>0$且均为单调递增，所以$m(x)=x\ln x$在$x>\mathrm{e}$单调递增，故$m(x)>m(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，故当$x>\mathrm{e}$时，$xy>\mathrm{e}x\ln x>\mathrm{e}^2$，故D错误，

故选：B

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9．某大学的3名男生和3名女生利用周末到社区进行志愿服务，当天活动结束后，这6名同学排成一排合影留念，则下列说法正确的是（　　）

A．若要求3名女生相邻，则这6名同学共有144种不同的排法

B．若要求女生与男生相间排列，则这6名同学共有36种排法

C．若要求3名女生互不相邻，则这6名同学共有144种排法

D．若要求男生甲不在排头女生乙不在排尾，则这6名同学共有480种排法

【答案】AC

【解析】选项A，将3名女生捆绑在一起，再与3名男生进行全排列，则有$A_3^3A_4^4=144$（种），故A正确，

选项B，要求女生与男生相间排列，采用插空法，则有$2A_3^3A_3^3=72$（种），故B错误，

选项C，先排3名男生，3名女生插空，则有$A_3^3A_4^3=144$（种），故C正确，

选项D，若男生甲在排尾，则有$A_5^5=120$（种）；若男生甲不在排头也不在排尾，则有$A_4^1A_4^1A_4^4=384$（种），

所以男生甲不在排头女生乙不在排尾，共有$120+384=504$种排法，故D错误.

故选：AC.

10．一个口袋中有大小形状完全相同的3个红球和4个白球，从中取出2个球.下列命题正确的是（　　）

A. 如果是不放回地抽取，那么取出2个红球和取出2个白球是对立事件

B. 如果是不放回地抽取，那么第2次取到红球的概率等于第1次取到红球的概率

C. 如果是有放回地抽取，那么取出1个红球1个白球的概率是$\frac{24}{49}$

D. 如果是有放回地抽取，那么在至少取出一个红球的条件下，第2次取出红球的概率是$\frac{7}{11}$

【答案】BCD

【解析】对于A：如果是不放回地抽取，那么得到的取球结果有（红红）（白白）（白红）（红白），取出两个红球和取出两个白球不是对立事件，故A错误；

对于B：如果是不放回地抽取，那么第2次取到红球的概率为$\frac{3\times2+4\times3}{7\times6}=\frac{3}{7}$，第1次取到红球的概率为$\frac{3}{7}$，故B正确；

对于C：如果是有放回地抽取，那么取出1个红球1个白球的概率是$\frac{2\times C_4^1\times C_3^1}{C_7^1\times C_7^1}=\frac{24}{49}$，故C正确；

对于D：至少取出一个红球的概率为$P_1=1-P(\text{两白})=1-\frac{4\times4}{7\times7}=\frac{33}{49}$，

至少取出一个红球且第二次取出红球的概率$P_2=P$（两红）$+P$（第一次白第二次红）$=(\frac{3}{7})^2+\frac{4\times3}{7\times7}=\frac{3}{7}$，

故$P=\frac{P_2}{P_1}=\frac{\frac{3}{7}}{\frac{33}{49}}=\frac{7}{11}$，故D正确.

故选：BCD

11．如图，在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P为棱BB_1的中点，Q为正方形BB_1C_1C内一动点(含边界)，则下列说法中正确的是（　　）