

高中数学笔记



书山有路勤为径，
学海无涯苦作舟。

目录

第一章 函数.....	1
一、定义域.....	1
1. 具体函数定义域.....	1
2. 抽象函数的定义域:.....	1
二、值域的六种求法.....	2
1. 分离常数法.....	2
2. 判别式法.....	2
3. 配方法.....	2
4. 代数换元法.....	2
5. 均值不等式.....	2
6. 特殊函数有界法.....	3
三、奇函数及其性质.....	3
1. 常见的奇函数:.....	3
2. 奇函数性质:.....	3
四、常见的偶函数及其性质.....	4
1. 常见的偶函数.....	4
2. 偶函数的性质.....	4
五、函数的周期性.....	5
六、函数的对称性.....	6
1. 类型.....	6
2. 特点.....	6
七、函数对称性与周期性综合考虑.....	6
八、函数的翻折.....	7
九、抽象函数与具体函数的对应.....	8
十、高斯函数性质.....	9
1. 概念.....	9
2. 性质.....	9
十一、函数不动点与稳定点.....	10
1. 不动点.....	10
2. 稳定点.....	10
3. 动点与稳定点的性质.....	10
4. 导数习题集.....	10
第二章 三角函数.....	12
一、同角三角函数基本关系.....	12
1. 平方关系.....	12
2. 商数关系.....	13
二、各次三角函数.....	13
1. 概念.....	13
三、和差配凑法.....	14
四、三角函数的平移变换(上加下减,左加右减).....	14
1. 特点.....	14
五、导数在三角函数中的应用.....	15

1. 对称轴.....	15
2. 求导.....	16
六、射影定理.....	16
七、三角形面积公式.....	16
八、三角形中的平方差公式.....	17
九、正切恒等式.....	17
1. 公式.....	17
2. 三角函数习题.....	18
第三章 平面向量.....	19
一、平面向量共线定理.....	19
二、左右拆分法则.....	19
三、降维秒杀(实质是特殊值法).....	20
四、平面向量特殊值法的应用.....	20
五、“k”值法(共起点).....	21
六、向量共线模型的三角形形式.....	21
七、向量极化恒等式.....	22
八、平面向量的坐标系.....	23
九、奔驰定理.....	23
十、三角形“四心”风采.....	23
1. 重心.....	23
2. 垂心.....	24
3. 内心.....	24
4. 外心.....	24
5. 平面向量习题集.....	24
第四章 不等式.....	25
一、均值不等式“1”的调用.....	25
二、合并法.....	26
三、轮换对称不等式.....	26
四、部分对称不等式.....	27
五、对称不等式与均值不等式的结合.....	27
六、对称不等式与三角形的结合.....	28
七、柯西不等式的三维形式.....	28
八、柯西不等式与均值不等式的结合.....	29
九、柯西不等式的三维形式.....	29
十、柯西不等式的三维形式与均值不等式的结合.....	30
十一、不等式题集.....	32
第五章 数列.....	32
一、数列的通项公式.....	32
二、等差数列的通项公式.....	35
三、等差数列前n项和.....	35
四、等比数列的前n项和.....	37
五、等差数列求和.....	37
六、周期数列求和.....	38
七、裂项相消数列求和.....	38
八、数列习题集.....	39

高中数学笔记

第一章 函数

一、定义域

1. 具体函数定义域

$$\begin{cases} a. \text{分母不为} 0, \frac{1}{x} \Rightarrow x \neq 0 \\ b. \sqrt[n]{x} (n \text{为偶数}) \Rightarrow x \geq 0 \\ c. x^0 \Rightarrow x \neq 0 \\ d. \log_a x \Rightarrow x > 0 \end{cases}$$

例 1: 求 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-\log_2 x}}$ 的定义域

解:

$$\begin{cases} 2-\log_2 x > 0 \Rightarrow x \leq 4 \\ 2-\log_2 x \neq 0 \Rightarrow x \neq 4 \Rightarrow 0 < x < 4 \\ x > 0 \Rightarrow x > 0 \end{cases}$$

\therefore 定义域为 $(0, 4)$

例 2: 求 $f(x) = \ln(x^2 - 4x - 12)$ 的定义域

解: 有 $x^2 - 4x - 12 > 0 \Rightarrow x < -2$ 或 $x > 6$
 \therefore 定义域为 $(-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$

2. 抽象函数的定义域:

例 1: E 为 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 0)$, 则 $f(2x-1)$ 的定义域为

解: 抽象函数的定义域求法抓单个 x 的极值范围和括号里对多个的取值范围相同

解题, 由

$f(x)$ 的定义域为 $(-1, 0]$

$\therefore f < x \leq 0$

$2x-1$ 与 x 都是括号里的

$\therefore -1 < 2x-1 \leq 0 \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2}$

\therefore 定义域为 $(0, \frac{1}{2}]$

例 2: 已知函数 $y = f(x+1)$ 的定义域为 $[-2, 3]$, 则 $y = f(x-1)$ 的定义域是?

解: $\because f(x+1)$ 的定义域为 $[-2, 3]$
 $\therefore -2 \leq x \leq 3$
 \therefore 括号里的 “ $x+1$ ” 范围为
 $-1 \leq x+1 \leq 4$
 括号里 “ $x-1$ ” 与 “ $x+1$ ” 范围相同
 $\therefore -1 \leq x-1 \leq 4$
 $\therefore 0 \leq x \leq 5$
 \therefore 定义域为 $[0, 5]$

二、值域的六种求法

1. 分离常数法

例: 求函数 $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ 的值域
 解: $f(x) = \frac{3x+1}{x-2} = \frac{3(x-2)+7}{x-2} = 3 + \frac{7}{x-2}$
 $\because \frac{7}{x-2} \neq 0$
 $\therefore f(x) \neq 3$
 \therefore 值域为 $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

2. 判别式法

例: 求 $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-x+1}$ 的值域
 解: 令 $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-x+1} = y$
 $\Rightarrow y(x^2-x+1) = x^2-x$
 $\Rightarrow (y-1)x^2 - (y-1)x + y = 0$
 a. 当 $y-1=0 \Rightarrow y=1$, 方程无解
 b. 当 $y-1 \neq 0$ 时, $\Delta = (y-1)^2 - 4y(y-1) \geq 0$
 $\therefore -\frac{1}{3} \leq y \leq 1$
 \therefore 值域为 $[-\frac{1}{3}, 1)$

3. 配方法

例: 求 $f(x) = 4^x - 4^{-x} - 2(2^x + 2^{-x})$ 的最大值域
 解: 令 $t = 2^x + 2^{-x} (t \geq 2)$, 则 $t^2 = 4^x + 4^{-x} + 2$
 $\therefore 4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$
 $\therefore f(x) = t^2 - 2 - 2t = (t-1)^2 - 3$
 $\therefore f(x)_{\min} = f(1) = -3$
 \therefore 值域为 $[-3, +\infty)$

4. 代数换元法

例: 求 $f(x) = 2x + 4\sqrt{1-x}$ 的值域
 解: 令 $t = \sqrt{1-x} (t \geq 0)$, 则 $x = 1-t^2$
 $\therefore f(x) = -2t^2 + 4t + 2$
 $\therefore f(x)_{\max} = f(1) = 4$
 \therefore 值域为 $(-\infty, 4]$

5. 均值不等式

例: 求函数 $y = \frac{3x}{x^2+x+1}$ 的值域 ($x \geq 0$)
 解: 当 $x \neq 0$ 时, $y = \frac{3}{x + \frac{1}{x} + 1}$
 $\because x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2 (x > 0)$
 $\therefore y \leq \frac{3}{2+1} = 1$
 $\therefore y$ 的值域为 $[0, 1]$

6 以上内容仅为本文档的试下载部分, 为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文, 请访问:

<https://d.book118.com/678066103134006076>

解: \because 函数的定义域为 \mathbb{R}

$$\therefore y(e^x + 1) = e^x - 1$$

$$\Rightarrow e^x(y - 1) = -y - 1$$

a. 当 $y - 1 = 0$ 时, 方程不成立

$$b. \text{当 } y - 1 \neq 0 \text{ 时, } e^x = \frac{-y - 1}{y - 1}$$

$$\because e^x > 0$$

$$\therefore \frac{-y - 1}{y - 1} > 0 \Rightarrow -1 < y < 1$$

\therefore 值域为 $(-1, 1)$

三、奇函数及其性质

1. 常见的奇函数:

$$(1) f(x) = a^x - a^{-x} \quad (2) f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$$

$$(3) f(x) = \log_a \frac{1-x}{1+x} \text{ 或者 } f(x) = \log_a \frac{1+x}{1-x} \quad (4) f(x) = \log_a (\sqrt{x^2 + 1} \pm x) (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$$

例: 若 $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, 则 $f(x)$ 是

- A. 奇函数, 且在 $(0, 1)$ 上是增函数 B. 奇函数, 且在 $(0, 1)$ 是减函数
C. 偶函数, 且在 $(0, 1)$ 上是增函数 D. 偶函数, 且在 $(0, 1)$ 是减函数

2. 奇函数性质:

- (1) 奇函数 $f(x)$ 的定义域包含 0, 则 $f(0) = 0$
- (2) $f(x)$ 是奇函数, 又是周期函数, 则 $f(x)$ 的半周期是零点
- (3) 奇函数为 $f(x)$ 在所对称的区间单调性相同
- (4) 奇函数 $f(x) = g(x) + a$, 则 $f(x) + f(-x) = 2a$
- (5) “美眉函数” $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值为 M , 最小值为 N . 则 $M + N = 2f(\frac{a+b}{2})$.

若区间未知, 则 $f(\frac{a+b}{2}) = f(0)$

例: 若 $f(x) = \lg(a + \frac{2}{1+x})$ 为奇函数, 则实数 $a = ?$

解: $\because f(x)$ 为奇函数且在 $x = 0$ 外有意义

$$\therefore f(0) = 0, \text{ 即 } \lg(a + \frac{2}{1+x}) = 0 \Rightarrow a = -1 \text{ (性质1)}$$