高中数学笔记

书山有路勤为径，

学海无涯苦作舟。

目录

高中数学笔记

第一章 函数

一、定义域

1.具体函数定义域

$$\begin{cases} a.\text{分母不为}0, \dfrac{1}{x} \Rightarrow x \neq 0 \\ b.\sqrt[n]{x}(n\text{为偶数}) \Rightarrow x \geqslant 0 \\ c.x^0 \Rightarrow x \neq 0 \\ d.\log_a x \Rightarrow x > 0 \end{cases}$$

例 1：求 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\text{-}\log_2 x}}$ 的定义域

解：

$$\begin{cases} 2\text{-}\log_2 x > 0 \Rightarrow x \leqslant 4 \\ 2-\log_2 x \neq 0 \Rightarrow x \neq 4 \Rightarrow 0 < x < 4 \\ x > 0 \Rightarrow x > 0 \end{cases}$$

∴定义域为（0, 4）

例 2：求 $f(x)=\ln(x^2-4x-12)$ 的定义域

解：有 $x^2-4x-12>0 \Rightarrow x<2\text{或}x>6$

∴定义域为（-∞,-2）∪（6,+∞）

2.抽象函数的定义域：

例 1:E 为 $f(x)$ 的定义域为（−1, 0），则 $f(2x-1)$ 的定义域为

解：抽象函数的定义域求法抓单个 x 的极值范围和括号里对多个的取值范围相同解题，由

$f(x)$的定义域为（-1, 0]

$\therefore f<x\leqslant 0$

$2x-1$与x都是括号里的

$\therefore \text{-}1<2x-1\leqslant 0 \Rightarrow 0<x\leqslant \dfrac{1}{2}$

∴定义域为（$0,\dfrac{1}{2}$]

例 2：已知函数 $y=f(x+1)$的定义域为$[-2,3]$，则$y=f(x-1)$的定义域是？

解：∵ $f(x+1)$的定义域为[-2, 3]

∴ $-2 \leqslant x \leqslant 3$

∴括号里的“$x+1$”范围为

$-1 \leqslant x+1 \leqslant 4$

括号里“x-1”与“x+1”范围相同

∴ $-1 \leqslant x-1 \leqslant 4$

∴ $0 \leqslant x \leqslant 5$

∴定义域为[0, 5]

二、值域的六种求法

1.分离常数法

例：求函数$f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$的值域

解：$f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+7}{x-2}=3+\dfrac{7}{x-2}$

∵ $\dfrac{7}{x-2} \neq 0$

∴ $f(x) \neq 3$

∴值域为（-∞，3）∪（3，+∞）

2.判别式法

例：求$f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}$的值域

解：令$f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}=y$

$\Rightarrow y(x^2-x+1)=x^2-x$

$\Rightarrow (y-1)x^2-(y-1)x+y=0$

$a.$当$y-1=0 \Rightarrow y=1$,方程无解

$b.$当$y-1 \neq 0$时，$\Delta=(y-1)^2-4y(y-1) \geqslant 0$

∴ $-\dfrac{1}{3} \leqslant y \leqslant 1$

∴值域为$[-\dfrac{1}{3}, 1)$

3.配方法

例：求$f(x)=4^x-4^{-x}-2(2^x+2^{-x})$的最大值域

解：令$t=2^x+2^{-x}(t \geqslant 2)$.则$t^2=4^x+4^{-x}+2$

∴ $4^x+4^{-x}=t^2-2$

∴ $f(x)=t^2-2-2t=(t-1)^2-3$

∴ $f(x)_{\min}=f(1)=-3$

∴值域为$[-3,+\infty]$

4.代数换元法

例：求$f(x)=2x+4\sqrt{1-x}$的值域

解：令$t=\sqrt{1-x}(t \geqslant 0)$.则$x=1-t^2$

∴ $f(x)=-2t^2+4t+2$

∴ $f(x)_{\max}=f(1)=4$

∴值域为$(-\infty, 4]$

5.均值不等式

例：求函数$y=\dfrac{3x}{x^2+x+1}$的值域$(x \geqslant 0)$

解：当$x \neq 0$时，$y=\dfrac{3}{x+\dfrac{1}{x}+1}$

∵ $x+\dfrac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \dfrac{1}{x}}=2(x>0)$

∴ $y \leqslant \dfrac{3}{2+1}=1$

∴ y的值域为$[0,1]$

6

例：求函数 $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 的值域

解：$\because$ 函数的定义域为R

$\therefore y(e^x+1)=e^x-1$

$\Rightarrow e^x(y-1)=-y-1$

$a.$当$y-1=0$时，方程不成立

$b.$当$y-1\neq 0$时，$e^x=\frac{-y-1}{y-1}$

$\because e^x>0$

$\therefore \frac{-y-1}{y-1}>0\Rightarrow -1<y<1$

$\therefore$ 值域为$(-1,1)$

三、奇函数及其性质

1.常见的奇函数：

（1）$f(x)=a^x-a^{-x}$　　（2）$f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}(a>0,且a\neq 1)$

（3）$f(x)=\log_a\frac{1-x}{1+x}$或者$f(x)=\log_a\frac{1+x}{1-x}$　　（4）$f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}\pm x)(a>0,且a\neq 1)$

例：若$f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$.则$f(x)$是

A. 奇函数，且在（0,1）上是增函数　　B. 奇函数，且在（0,1）是减函数
C. 偶函数，且在（0,1）上是增函数　　D. 偶函数，且在（0,1）是减函数

2.奇函数性质：

（1）奇函数 $f(x)$的定义域包含 0，则 $f(0)=0$
（2）$f(x)$是奇函数，又是周期函数，则 $f(x)$的半周期是零点
（3）奇函数为 $f(x)$在所对称的区间单调性相同
（4）奇函数 $f(x)=g(x)+a$,则 $f(x)+f(-x)=2a$
（5）“美眉函数”$f(x)$在区间$[a,b]$上的最大值为 M，最小值为 N.则 $M+N=2f(\frac{a+b}{2})$.

若区间未知，则 $f(\frac{a+b}{2})=f(0)$

例1：若$f(x)=\lg(a+\frac{2}{1+x})$为奇函数，则实数$a=?$

解：$\because f(x)$为奇函数且在$x=0$外有意义

$\therefore f(0)=0$,即$\lg(a+\frac{2}{1+x})=0\Rightarrow a=-1$（性质1）