

通项公式的求法

一、公式法

$$a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1), \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2). \end{cases}$$

二、迭加法

若 $a_{n+1} = a_n + f(n)$, 则:

$$a_n = a_1 + \sum_{k=2}^n (a_k - a_{k-1}) = a_1 + \sum_{k=2}^n f(k-1) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

三、叠乘法

若 $a_{n+1} = f(n)a_n$, 则:

$$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} = a_1 f(1) f(2) \cdots f(n-1) (n \geq 2).$$

四、化归法

通过恰当的恒等变形，如配方、因式分解、取对数、取倒数等，转化为等比数列或等差数列。

(1) 若 $a_{n+1}=pa_n+q$ ，则：
$$a_{n+1}-\lambda=p(a_n-\lambda).$$

(2) 若 $a_{n+1}=\frac{pa_n}{r+qa_n}$ ，则：
$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{r}{p}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{q}{p}.$$

(3) 若 $a_{n+1}=pa_n+q(n)$ ，则：
$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{q(n)}{p^{n+1}}.$$

(4) 若 $a_{n+1}=pa_n^q$ ，则：
$$\lg a_{n+1}=q\lg a_n+\lg p.$$

五、归纳法

先计算数列的前若干项，通过观察规律，猜想通项公式，进而用数学归纳法证之。

例 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1=1$ ， $a_{n+1}=2a_n+3\times 2^{n-1}$ ，求 $\{a_n\}$ 的通项公式。

$$a_n=(3n-1)\times 2^{n-2}$$

典型例题

1. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $S_n = \frac{S_{n-1}}{2S_{n-1}+1} (n \geq 2)$, 求 a_n .

解: 由 $S_n = \frac{S_{n-1}}{2S_{n-1}+1}$ 知: $\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}} = 2$.

$\therefore \{\frac{1}{S_n}\}$ 是以 $\frac{1}{S_1} = \frac{1}{a_1} = 1$ 为首项, 公差为 2 的等差数列.

$$\therefore \frac{1}{S_n} = 1 + 2(n-1) = 2n-1. \therefore S_n = \frac{1}{2n-1}.$$

$$\therefore a_1 = 1, \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = -\frac{2}{(2n-1)(2n-3)}.$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1, & n=1, \\ -\frac{2}{(2n-1)(2n-3)}, & n \geq 2. \end{cases}$$

2. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 7n - 8$, (1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 求 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 T_n .

解: (1) 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = -14$; 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 8$,

$$\text{故 } a_n = \begin{cases} -14, & n=1, \\ 2n-8, & n \geq 2. \end{cases}$$

(2) 由 (1) 知, 当 $n \leq 4$ 时, $a_n \leq 0$; 当 $n \geq 5$ 时, $a_n > 0$;

$$\therefore \text{当 } n \leq 4 \text{ 时, } T_n = -S_n = -n^2 + 7n + 8,$$

$$\begin{aligned} \text{当 } n \geq 5 \text{ 时, } T_n &= -S_4 + S_n - S_4 = S_n - 2S_4 \\ &= n^2 - 7n - 8 - 2(-20) \\ &= n^2 - 7n + 32. \end{aligned}$$

$$\text{故 } T_n = \begin{cases} -n^2 + 7n + 8, & n \leq 4, \\ n^2 - 7n + 32, & n \geq 5. \end{cases}$$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1, a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$, 求 a_n .

解法一 $\because a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1(n\in\mathbf{N}^*),$

$$\therefore a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+1, a_{n-1}=\frac{1}{2}a_{n-2}+1.$$

两式相减得: $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2}(a_{n-1}-a_{n-2})$

$\therefore \{a_n-a_{n-1}\}$ 是以 $a_2-a_1=\frac{1}{2}$ 为首项, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

$$\therefore a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$$\therefore a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$$

$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=2-2^{1-n}.$$

即 $a_n=2-2^{1-n}.$

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$, 求 a_n .

解法二 由解法一知 $a_n-a_{n-1}=2^{1-n}$, 又 $a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+1$,

消去 a_{n-1} 得 $a_n=2-2^{1-n}$.

解法三 $\because a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+1$, 令 $a_n+\lambda=\frac{1}{2}(a_{n-1}+\lambda)$, 则 $\lambda=-2$.

$\therefore a_n-2=\frac{1}{2}(a_{n-1}-2)$.

$\therefore \{a_n-2\}$ 是以 $a_1-2=-1$ 为首项, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

$\therefore a_n-2=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

即 $a_n=2-2^{1-n}$.

4. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足条件 $\lg S_n + (n-1)\lg b = \lg(b^{n+1} + n - 2)$, 其中, $b > 0$ 且 $b \neq 1$. (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 若对 $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 4$ 时, 恒有 $a_{n+1} > a_n$, 试求 b 的取值范围.

解: (1) 由已知得 $\lg S_n b^{n-1} = \lg(b^{n+1} + n - 2)$, $\therefore S_n b^{n-1} = b^{n+1} + n - 2 (b > 1)$.

$\therefore S_n = b^2 + \frac{n-2}{b^{n-1}} (b > 1)$. 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = b^2 - 1$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = b^2 + \frac{n-2}{b^{n-1}} - b^2 - \frac{n-3}{b^{n-2}} = \frac{(1-b)n + 3b - 2}{b^{n-1}}$.

故 $a_n = \begin{cases} b^2 - 1, & n=1, \\ \frac{(1-b)n + 3b - 2}{b^{n-1}}, & n \geq 2. \end{cases}$

(2) 由已知 $\frac{(1-b)(n+1) + 3b - 2}{b^n} > \frac{(1-b)n + 3b - 2}{b^{n-1}}$ 对 $n \geq 4$ 恒成立.

即 $(n-3)b^2 - 2(n-2)b + (n-1) > 0$ 对 $n \geq 4$ 恒成立.

亦即 $(b-1)[(n-3)b - (n-1)] > 0$ 对 $n \geq 4$ 恒成立.

$\therefore b > 1$, $\therefore b > \frac{n-1}{n-3}$ 对 $n \geq 4$ 恒成立.

而 $\frac{n-1}{n-3}$ 当 $n=4$ 时有最大值 3, $\therefore b > 3$.

5. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等比中项为 $\frac{1}{5}S_5$, $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等差中项为 1, 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n .

解法1: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=a$, 公差为 d , 则通项公式为 $a_n=a+(n-1)d$, 前 n 项和为 $S_n=na+\frac{n(n-1)d}{2}$.

依题意有 $\begin{cases} \frac{1}{3}S_3 \cdot \frac{1}{4}S_4 = (\frac{1}{5}S_5)^2, & (S_5 \neq 0) \\ \frac{1}{3}S_3 + \frac{1}{4}S_4 = 2, \end{cases}$ 由此可得:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(3a+3d) \cdot \frac{1}{4}(4a+6d) = \frac{1}{25}(5a+10d)^2, \\ \frac{1}{3}(3a+3d) + \frac{1}{4}(4a+6d) = 2. \end{cases} \quad \text{整理得} \begin{cases} 3ad+5d^2=0, \\ 4a+5d=4. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} d=0, \\ a=1, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} d=-\frac{12}{5}, \\ a=4. \end{cases} \therefore a_n=1 \text{ 或 } a_n=-\frac{12}{5}n+\frac{32}{5}.$$

经验证知 $a_n=1$ 时, $S_n=5$; 另一种情况时, $S_n=-4$, 均合题意.

$\therefore a_n=1$ 或 $a_n=-\frac{12}{5}n+\frac{32}{5}$ 即为所求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

5. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等比中项为 $\frac{1}{5}S_5$, $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等差中项为 1, 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n .

解法2: $\because S_n$ 是等差数列的前 n 项和, 故可设 $S_n = an^2 + bn$,

$$\text{依题意得: } \begin{cases} \frac{1}{3}(a \times 3^2 + b \times 3) \cdot \frac{1}{4}(a \times 4^2 + b \times 4) = \frac{1}{25}(a \times 5^2 + b \times 5)^2, \\ \frac{1}{3}(a \times 3^2 + b \times 3) + \frac{1}{4}(a \times 4^2 + b \times 4) = 2. \end{cases}$$

$$\text{整理得 } \begin{cases} 13a^2 + 3ab = 0, \\ 7a + 2b = 2. \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} a = 0, \\ b = 1, \end{cases} \quad \text{或 } \begin{cases} a = -\frac{6}{5}, \\ b = \frac{26}{5}. \end{cases}$$

$$\therefore S_n = n \quad \text{或} \quad S_n = -\frac{6}{5}n^2 + \frac{26}{5}n.$$

在等差数列中, $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$, a_1 亦适合公式.

$$\therefore a_n = 1 \quad \text{或} \quad a_n = -\frac{12}{5}n + \frac{32}{5}.$$

5. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等比中项为 $\frac{1}{5}S_5$, $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等差中项为 1, 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n .

解法3: $\because S_n$ 是等差数列的前 n 项和, \therefore 数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列.

$$\text{依题意得: } \begin{cases} \frac{S_3}{3} + \frac{S_5}{5} = 2 \cdot \frac{S_4}{4}, \\ \frac{S_3}{3} \cdot \frac{S_4}{4} = (\frac{S_5}{5})^2, \\ \frac{S_3}{3} + \frac{S_4}{4} = 2, \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} S_3=3, \\ S_4=4, \\ S_5=5, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} S_3=\frac{24}{5}, \\ S_4=\frac{8}{5}, \\ S_5=-4, \end{cases}$$

$$\therefore a_4 = S_4 - S_3 = 1, a_5 = S_5 - S_4 = 1 \text{ 或 } a_4 = -\frac{16}{5}, a_5 = -\frac{28}{5}.$$

$$\therefore a_n = 1 \text{ 或 } a_n = -\frac{12}{5}n + \frac{32}{5}.$$

5. 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等比中项为 $\frac{1}{5}S_5$, $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等差中项为 1, 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n .

解法4: 依题意 $S_3=3a_2$, $S_4=2(a_2+a_3)$, $S_5=5a_3$,

$$\text{代入} \begin{cases} \frac{S_3}{3} \cdot \frac{S_4}{4} = \left(\frac{S_5}{5}\right)^2, \\ \frac{S_3}{3} + \frac{S_4}{4} = 2, \end{cases} \quad \text{整理得:} \begin{cases} a_2(a_2+a_3) = 2a_3^2, \\ 3a_2+a_3 = 4, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_2=1, \\ a_3=1, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_2=\frac{8}{5}, \\ a_3=-\frac{4}{5}. \end{cases}$$

$$\therefore a_n=1 \text{ 或 } a_n=-\frac{12}{5}n+\frac{32}{5}.$$

6. 已知 $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}a_n (n \in \mathbb{N}_+)$, 且 $a_1 = a$, 求 a_n .

解: $a_1 = a = 4 - 2^2 + 2^0 a,$

$$a_2 = 2 + \frac{1}{2}a = 4 - 2^1 + 2^{-1}a,$$

$$a_3 = 2 + \frac{1}{2}a_2 = 3 + \frac{1}{4}a = 4 - 2^0 + 2^{-2}a,$$

$$a_4 = 2 + \frac{1}{2}a_3 = \frac{7}{2} + \frac{1}{8}a = 4 - 2^{-1} + 2^{-3}a,$$

$$a_5 = 2 + \frac{1}{2}a_4 = 4 - 2^{-2} + 2^{-4}a,$$

故猜想: $a_n = 4 - 2^{3-n} + 2^{1-n}a$, 用数学归纳法证明如下:

证明从略.

故 $a_n = 4 - 2^{3-n} + 2^{1-n}a$.

解法二: 构造等比数列求解(略).

7. 设数列 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $S_3^2=9S_2, S_4=4S_2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{由 } S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} \text{ 及已知条件得: } (3a_1 + 3d)^2 = 9(2a_1 + d), \quad \textcircled{1}$$

$$4a_1 + 6d = 4(2a_1 + d), \quad \textcircled{2}$$

由 $\textcircled{2}$ 得: $d = 2a_1$, 代入 $\textcircled{1}$ 有: $9a_1^2 = 4a_1$.

解得: $a_1 = 0$ 或 $a_1 = \frac{4}{9}$.

当 $a_1 = 0$ 时, $d = 0$, 与已知条件矛盾, 舍去;

当 $a_1 = \frac{4}{9}$ 时, $d = \frac{8}{9}$. $\therefore a_n = \frac{4}{9} + \frac{8}{9}(n-1) = \frac{8}{9}n - \frac{4}{9}$.

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{8}{9}n - \frac{4}{9}$.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1=2, a_1+a_2+a_3=12$, (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 令 $b_n=a_n \cdot 3^n$, 求数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和的公式.

解: (1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

则由已知得 $3a_1+3d=12$, 又 $a_1=2$,

$$\therefore d=2. \therefore a_n=2+(n-1) \times 2=2n.$$

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n$.

(2) 由 $b_n=a_n \cdot 3^n=2n \cdot 3^n$ 得数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和

$$S_n=2 \cdot 3+4 \cdot 3^2+\cdots+(2n-2) \cdot 3^{n-1}+2n \cdot 3^n \quad \textcircled{1}$$

$$\therefore 3S_n=2 \cdot 3^2+4 \cdot 3^3+\cdots+(2n-2) \cdot 3^n+2n \cdot 3^{n+1} \quad \textcircled{2}$$

将 ① 式减 ② 式得:

$$-2S_n=2(3+3^2+\cdots+3^n)-2n \cdot 3^{n+1}=3(3^n-1)-2n \cdot 3^{n+1}.$$

$$\therefore S_n=\frac{3(1-3^n)}{2}+n \cdot 3^{n+1}.$$

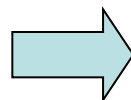
世界古代史专题复习

• 知识体系

世界古代史

古代希腊

自然环境



城邦特点

雅典民主

(梭伦 → 克里斯提尼 → 伯利克里)

人文思想

泰勒斯、普罗塔格拉

苏格拉底、柏拉图、亚里斯多德

古代罗马

政体演变:

(君主制 → 贵族共和 → 帝制)

法制完善:

《十二铜表法》

公民法

万民法

查士丁尼法典

一、古代希腊：

• 1. 古希腊文明的发展历程

爱琴文明：{ 克里特文明（前2000年—前1400年）
迈锡尼文明（前16世纪上—前12世纪）

荷马时代

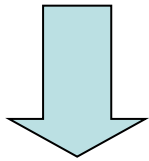
黑暗时代：（前12世纪—前9世纪）

城邦时代：（前8世纪—前6世纪）

一、古代希腊：

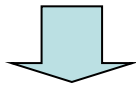
• 2. 古希腊的民主政治：

地理环境：多山地、多港湾、少耕地 



有利于航海、文化交流；促进商品生产，海外贸易；发展海外殖民

城邦特征：小国寡民、各邦长期独立自主



政体形式：贵族制、民主制、君主制、寡头制、僭主制

一、古代希腊：

- 3.雅典城邦的民主政治

形成

特点

表现

评价

一、古代希腊.

• 3. 雅典城

背景：平民与贵族矛盾；工商业奴隶主崛起
目的：消除矛盾，维护奴隶主贵族统治
内容：解负令；依财产划分等级；改革国家机构；鼓励发展工商业

形

梭伦改革

背景：各阶层利益冲突（平原、海岸、山地）
内容：地域代替氏族；500人议事会；比例代表制；陶片放逐法

克

成

前509年 雅典昆伯利改革

取消任高官的财产资格；发放津贴

伯利克里改革

前5世纪，雅典民主政治进一步完善



一、古代希腊：

• 3.雅典城邦的民主政治

特点：人民主权，轮番而治

表现：{ 公民大会
五百人议事会
民众法庭



一、古代希腊：

• 3.雅典城邦的民主

差额选举制、任期制、议会制、比例代表制

评

积极：

为人类提供民主治理新形式
创立民主运作新方式
为后世民主政治积累宝贵经验
促进雅典政治经济文化发展

价

局限：

不是现代意义上的民主
只是男性公民的民主
轮番而治容易导致民主权利的滥用

一、古代希腊：

• 4. 古希腊的早期人文思想

背景：工商界

哲学之父，创立朴素唯物主义世

强调人的价值、人的决定作用；
从认识自然转向认识社会

代表人物

泰勒斯：

普罗塔格拉：“人是万物的尺度” 前五世纪

发展

一、古代希腊：

• 4. 古希腊的

使哲学成为一门研究
“人”的学问

代表人物

苏格拉底：前5世纪

认识人自己

对理念的讨论其实是对事物共性的讨论

柏拉图：

思想：

统治
唯心

必须由懂哲学的人做国王
是早期乌托邦思想的体现

贡献：

创立
《理
《法律篇》

强调法治，认为法律应该成为所有人的准则，包括统治者在内

使哲学成为一门独立的学科
所有真正思想家中的永恒巨人

• 4. 古希腊的早期人文思想

代表人物 **亚里士多德** 《形而上学》

经历：
师从柏拉图，曾在《雅典学园》
教授亚里士多德
创立学园，
坚持唯物主义，反对唯心主义理念论

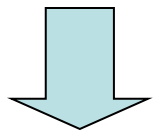
品质：**吾爱吾师，吾尤爱真理**

贡献：
创立逻辑学，提出“三段论”
在《政治学》中，提出法治优于人治
伦理学中，提出“中道”理论

二、古代罗马

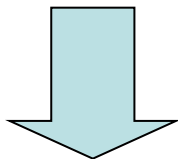
• 1.政体演变

君主制：公元前6世纪末之前



贵族共和：

- 执政官（最高行政长官）
- 元老院（国家决策机构）
- 公民大会（选公职人员；通过提案）
- 平民保民官（监督政府与行为）



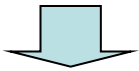
帝国体制：

- 屋大维（前27年，元首制）
- 戴克里先（公元3世纪，公开君主制）

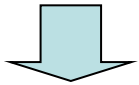
二、古代罗马

- **2.罗马法**（演变历程）

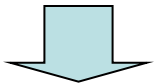
《十二铜表法》：从习惯法到成文法



公民法：调整公民之间的关系（前3世纪前）



万民法：罗马帝国时期，一切自由民的法律



查士丁尼法典：东罗马帝国，形成完整的法律体系

二、古代罗马

- **2.罗马法**（核心内容）

①调整财产关系，规定奴隶制和私有财产神圣不可侵犯

②保护自由民的权力，法律面前人人平等

二、古代罗马

- **2.罗马法**（历史意义）

①巩固了罗马帝国的统治（社会稳定、经济发展、维护奴隶制等）

②影响广泛，对近代欧美资本主义国家产生重要影响



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/685103004042011310>