通项公式的求法

一、公式法

$$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1),\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2).\end{cases}$$

二、迭加法

若 $a_{n+1}=a_n+f(n)$，则：

$$a_n=a_1+\sum_{k=2}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_1+\sum_{k=2}^{n}f(k-1)=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k).$$

三、叠乘法

若 $a_{n+1}=f(n)a_n$，则：

$$a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=a_1f(1)f(2)\cdots f(n-1)(n\geqslant 2).$$

四、化归法

通过恰当的恒等变形, 如配方、因式分解、取对数、取倒数等, 转化为等比数列或等差数列.

(1)若 $a_{n+1}=pa_n+q$, 则: $a_{n+1}-\lambda=p(a_n-\lambda)$.

(2)若 $a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{r+qa_n}$, 则: $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{r}{p}\cdot\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{q}{p}$.

(3)若 $a_{n+1}=pa_n+q(n)$, 则: $\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\dfrac{a_n}{p^n}+\dfrac{q(n)}{p^{n+1}}$.

(4)若 $a_{n+1}=pa_n^q$, 则: $\lg a_{n+1}=q\lg a_n+\lg p$.

五、归纳法

先计算数列的前若干项, 通过观察规律, 猜想通项公式, 进而用数学归纳法证之.

例 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3\times2^{n-1}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

$a_n=(3n-1)\times2^{n-2}$

典型例题

1.在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$S_n=\dfrac{S_{n-1}}{2S_{n-1}+1}(n\geqslant 2)$，求 a_n.

解: 由 $S_n=\dfrac{S_{n-1}}{2S_{n-1}+1}$ 知: $\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n-1}}=2$.

$\therefore \{\dfrac{1}{S_n}\}$是以 $\dfrac{1}{S_1}=\dfrac{1}{a_1}=1$ 为首项，公差为 2 的等差数列.

$\therefore \dfrac{1}{S_n}=1+2(n-1)=2n-1$. $\therefore S_n=\dfrac{1}{2n-1}$.

$\because a_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=-\dfrac{2}{(2n-1)(2n-3)}$.

$$\therefore a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ -\dfrac{2}{(2n-1)(2n-3)}, & n\geqslant 2.\end{cases}$$

2.数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-7n-8$, (1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2)求 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 T_n.

解: (1)当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=-14$; 当 $n\geqslant 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=2n-8$,

故 $a_n=\begin{cases}-14, & n=1,\\ 2n-8, & n\geqslant 2.\end{cases}$

(2)由 (1) 知, 当 $n\leqslant 4$ 时, $a_n\leqslant 0$; 当 $n\geqslant 5$ 时, $a_n>0$;

∴当 $n\leqslant 4$ 时, $T_n=-S_n=-n^2+7n+8$,

当 $n\geqslant 5$ 时, $T_n=-S_4+S_n-S_4=S_n-2S_4$

$=n^2-7n-8-2(-20)$

$=n^2-7n+32.$

故 $T_n=\begin{cases}-n^2+7n+8, & n\leqslant 4,\\ n^2-7n+32, & n\geqslant 5.\end{cases}$

3.已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，求$a_n$.

解法一 $\because a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$,

$\therefore a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+1$, $a_{n-1}=\frac{1}{2}a_{n-2}+1$.

两式相减得: $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2}(a_{n-1}-a_{n-2})$

$\therefore\{a_n-a_{n-1}\}$是以$a_2-a_1=\frac{1}{2}$为首项，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列.

$\therefore a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n-2}=(\frac{1}{2})^{n-1}$.

$\therefore a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-1}$

$=2-2^{1-n}$.

即$a_n=2-2^{1-n}$.

3.已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1, a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，求 a_n.

解法二 由解法一知 $a_n-a_{n-1}=2^{1-n}$，又 $a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+1$,

消去 a_{n-1} 得 $a_n=2-2^{1-n}$.

解法三 $\because a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+1$, 令 $a_n+\lambda=\frac{1}{2}(a_{n-1}+\lambda)$，则 $\lambda=-2$.

$\therefore a_n-2=\frac{1}{2}(a_{n-1}-2)$.

$\therefore \{a_n-2\}$ 是以 $a_1-2=-1$ 为首项，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

$\therefore a_n-2=-(\frac{1}{2})^{n-1}$.

即 $a_n=2-2^{1-n}$.

4.数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足条件 $\lg S_n+(n-1)\lg b=\lg(b^{n+1}+n-2)$，其中，$b>0$ 且 $b\neq1$. (1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2)若对 $n\in\mathbf{N}^*$，$n\geq4$ 时，恒有 $a_{n+1}>a_n$，试求 b 的取值范围.

解: (1)由已知得 $\lg S_nb^{n-1}=\lg(b^{n+1}+n-2)$，$\therefore S_nb^{n-1}=b^{n+1}+n-2(b>1)$.

$\therefore S_n=b^2+\dfrac{n-2}{b^{n-1}}(b>1)$. 当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=b^2-1$;

当 $n\geq2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=b^2+\dfrac{n-2}{b^{n-1}}-b^2-\dfrac{n-3}{b^{n-2}}=\dfrac{(1-b)n+3b-2}{b^{n-1}}$.

故 $a_n=\begin{cases} b^2-1, & n=1, \\ \dfrac{(1-b)n+3b-2}{b^{n-1}}, & n\geq2. \end{cases}$

(2)由已知 $\dfrac{(1-b)(n+1)+3b-2}{b^n}>\dfrac{(1-b)n+3b-2}{b^{n-1}}$ 对 $n\geq4$ 恒成立.

即 $(n-3)b^2-2(n-2)b+(n-1)>0$ 对 $n\geq4$ 恒成立.

亦即 $(b-1)[(n-3)b-(n-1)]>0$ 对 $n\geq4$ 恒成立.

$\because b>1$, $\therefore b>\dfrac{n-1}{n-3}$ 对 $n\geq4$ 恒成立.

而 $\dfrac{n-1}{n-3}$ 当 $n=4$ 时有最大值 3, $\therefore b>3$.

5.设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．已知 $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等比中项为 $\frac{1}{5}S_5$，$\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等差中项为 1，求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n.

解法1: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=a$，公差为 d，

则通项公式为 $a_n=a+(n-1)d$，前 n 项和为 $S_n=na+\dfrac{n(n-1)d}{2}$.

依题意有 $\begin{cases}\frac{1}{3}S_3\cdot\frac{1}{4}S_4=(\frac{1}{5}S_5)^2,\ (S_5\neq0)\\ \frac{1}{3}S_3+\frac{1}{4}S_4=2,\end{cases}$ 由此可得:

$$\begin{cases}\frac{1}{3}(3a+3d)\cdot\frac{1}{4}(4a+6d)=\frac{1}{25}(5a+10d)^2,\\ \frac{1}{3}(3a+3d)+\frac{1}{4}(4a+6d)=2.\end{cases}$$ 整理得 $\begin{cases}3ad+5d^2=0,\\ 4a+5d=4.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}d=0,\\ a=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}d=-\frac{12}{5},\\ a=4.\end{cases}$ $\therefore a_n=1$ 或 $a_n=-\frac{12}{5}n+\frac{32}{5}$.

经验证知 $a_n=1$ 时, $S_n=5$; 另一种情况时, $S_n=-4$, 均合题意.

$\therefore a_n=1$ 或 $a_n=-\frac{12}{5}n+\frac{32}{5}$ 即为所求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

5.设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等比中项为 $\frac{1}{5}S_5$, $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等差中项为 1, 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n.

解法2: $\because S_n$ 是等差数列的前 n 项和, 故可设 $S_n=an^2+bn$,

依题意得: $\begin{cases} \frac{1}{3}(a\times3^2+b\times3)\cdot\frac{1}{4}(a\times4^2+b\times4)=\frac{1}{25}(a\times5^2+b\times5)^2, \\ \frac{1}{3}(a\times3^2+b\times3)+\frac{1}{4}(a\times4^2+b\times4)=2. \end{cases}$

整理得 $\begin{cases} 13a^2+3ab=0, \\ 7a+2b=2. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=0, \\ b=1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-\frac{6}{5}, \\ b=\frac{26}{5}. \end{cases}$

$\therefore S_n=n$ 或 $S_n=-\frac{6}{5}n^2+\frac{26}{5}n$.

在等差数列中, $n\geqslant2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}$, a_1 亦适合公式.

$\therefore a_n=1$ 或 $a_n=-\frac{12}{5}n+\frac{32}{5}$.

5.设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等比中项为 $\frac{1}{5}S_5$, $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等差中项为 1, 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n.

解法3: $\because S_n$ 是等差数列的前 n 项和, $\therefore$ 数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列.

依题意得: $\begin{cases} \frac{S_3}{3}+\frac{S_5}{5}=2\cdot\frac{S_4}{4}, \\ \frac{S_3}{3}\cdot\frac{S_4}{4}=(\frac{S_5}{5})^2, \\ \frac{S_3}{3}+\frac{S_4}{4}=2, \end{cases}$ 解得: $\begin{cases} S_3=3, \\ S_4=4, \\ S_5=5, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} S_3=\frac{24}{5}, \\ S_4=\frac{8}{5}, \\ S_5=-4, \end{cases}$

$\therefore a_4=S_4-S_3=1$, $a_5=S_5-S_4=1$ 或 $a_4=-\frac{16}{5}$, $a_5=-\frac{28}{5}$.

$\therefore a_n=1$ 或 $a_n=-\frac{12}{5}n+\frac{32}{5}$.

5.设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和．已知 $\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等比中项为 $\frac{1}{5}S_5$，$\frac{1}{3}S_3$ 与 $\frac{1}{4}S_4$ 的等差中项为 1，求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n.

解法4: 依题意 $S_3=3a_2,\ S_4=2(a_2+a_3),\ S_5=5a_3$,

代入 $\begin{cases} \dfrac{S_3}{3}\cdot\dfrac{S_4}{4}=\left(\dfrac{S_5}{5}\right)^2, \\ \dfrac{S_3}{3}+\dfrac{S_4}{4}=2, \end{cases}$ 整理得: $\begin{cases} a_2(a_2+a_3)=2a_3^{\,2}, \\ 3a_2+a_3=4, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a_2=1, \\ a_3=1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_2=\dfrac{8}{5}, \\ a_3=-\dfrac{4}{5}. \end{cases}$

$\therefore a_n=1$ 或 $a_n=-\dfrac{12}{5}n+\dfrac{32}{5}$.

6.已知 $a_{n+1}=2+\frac{1}{2}a_n(n\in N_+)$，且 $a_1=a$，求 a_n.

解: $a_1=a=4-2^2+2^0a$,

$a_2=2+\frac{1}{2}a=4-2^1+2^{-1}a$,

$a_3=2+\frac{1}{2}a_2=3+\frac{1}{4}a=4-2^0+2^{-2}a$,

$a_4=2+\frac{1}{2}a_3=\frac{7}{2}+\frac{1}{8}a=4-2^{-1}+2^{-3}a$,

$a_5=2+\frac{1}{2}a_4=4-2^{-2}+2^{-4}a$,

故猜想: $a_n=4-2^{3-n}+2^{1-n}a$，用数学归纳法证明如下:

证明从略.

故 $a_n=4-2^{3-n}+2^{1-n}a$.

解法二: 构造等比数列求解(略).

7.设数列 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $S_3^2=9S_2$, $S_4=4S_2$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,

由 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$ 及已知条件得: $(3a_1+3d)^2=9(2a_1+d)$, ①

$4a_1+6d=4(2a_1+d)$, ②

由②得: $d=2a_1$，代入①有: $9a_1^2=4a_1$.

解得: $a_1=0$ 或 $a_1=\dfrac{4}{9}$.

当 $a_1=0$ 时，$d=0$，与已知条件矛盾，舍去;

当 $a_1=\dfrac{4}{9}$时，$d=\dfrac{8}{9}$. $\therefore a_n=\dfrac{4}{9}+\dfrac{8}{9}(n-1)=\dfrac{8}{9}n-\dfrac{4}{9}$.

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{8}{9}n-\dfrac{4}{9}$.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1=2$, $a_1+a_2+a_3=12$, (1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2)令 $b_n=a_n\cdot 3^n$, 求数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和的公式.

解: (1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,

则由已知得 $3a_1+3d=12$, 又 $a_1=2$,

$\therefore d=2$. $\therefore a_n=2+(n-1)\times 2=2n$.

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n$.

(2)由 $b_n=a_n\cdot 3^n=2n\cdot 3^n$ 得数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和

$$S_n=2\cdot 3+4\cdot 3^2+\cdots+(2n-2)\cdot 3^{n-1}+2n\cdot 3^n \quad ①$$

$$\therefore 3S_n=2\cdot 3^2+4\cdot 3^3+\cdots+(2n-2)\cdot 3^n+2n\cdot 3^{n+1} \quad ②$$

将①式减②式得:

$$-2S_n=2(3+3^2+\cdots+3^n)-2n\cdot 3^{n+1}=3(3^n-1)-2n\cdot 3^{n+1}.$$

$$\therefore S_n=\frac{3(1-3^n)}{2}+n\cdot 3^{n+1}.$$

世界古代史专题复习

• 知识体系

世界古代史

- 古代希腊
  - 自然环境 ⇨ 城邦特点
  - 雅典民主（梭伦→克里斯提尼 →伯利克里）
  - 人文思想
    - 泰勒斯、普罗塔格拉
    - 苏格拉底、柏拉图、亚里斯多德
- 古代罗马
  - 政体演变：（君主制 →贵族共和 →帝制）
  - 法制完善：
    - 《十二铜表法》
    - 公民法
    - 万民法
    - 查士丁尼法典

一、古代希腊：

- **1.古希腊文明的发展历程**

爱琴文明：
- 克里特文明（前2000年—前1400年）
- 迈锡尼文明（前16世纪上—前12世纪）

荷马时代

黑暗时代：（前12世纪—前9世纪）

城邦时代：（前8世纪—前6世纪）

一、古代希腊：

- 2.古希腊的民主政治：

地理环境：多山地、多港湾、少耕地

有利于航海、文化交流；促进商品生产，海外贸易；发展海外殖民

城邦特征：小国寡民、各邦长期独立自治

政体形式：贵族制、民主制、君主制、寡头制、僭主制

一、古代希腊：

- **3.雅典城邦的民主政治**

形成

特点

表现

评价

一、古代希腊：

- 3.雅典城

背景：平民与贵族矛盾；工商业奴隶主崛起
目的：消除矛盾，维护奴隶主贵族统治
内容：解负令；依财产划分等级；改革国家机构；鼓励发展工商业

梭伦改革

形

背景：各阶层利益冲突（平原、海岸、山地）
内容：地域代替氏族；500人议事会；比例代表制；陶片放逐法

克

前509

成

取消任高官的财产资格；发放津贴

伯利克里改革

前5世纪，雅典民主政治进一步完善

一、古代希腊：

- **3.雅典城邦的民主政治**

特点：人民主权，轮番而治

表现：
- 公民大会
- 五百人议事会
- 民众法庭

一、古代希腊：

- **3.雅典城邦的民**

差额选举制、任期制、议会制、比例代表制

评价
- 积极：
  - 为人类提供 … 新形式
  - 创立民主运作新方式
  - 为后世民主政治积累宝贵经验
  - 促进雅典政治经济文化发展
- 局限：
  - 不是现代意义上的民主
  - 只是男性公民的民主
  - 轮番而治容易导致民主权利的滥用

一、古代希腊：

- **4.古希腊的早期人文思想**

背景：工商……发展

代表人物

- 泰勒斯：
- 普罗塔格拉：“人是万物的尺度” 前五世纪

哲学之父，创立朴素唯物主义世界观

强调人的价值、人的决定作用；从认识自然转向认识社会

一、古代希腊：

- 4.古希腊的

代表人物

苏格拉底：前5世纪

认识人自己

柏拉图：

思想：

统治

唯心

贡献：

创立

《理

《法律篇》

使哲学成为一门研究“人”的学问

对理念的讨论其实是对事物共性的讨论

必须由懂哲学的人做国王是早期乌托邦思想的体现

强调法治，认为法律应该成为所有人的准则，包括统治者在内

使哲学成为一门独立的学科
所有真正思想家中的永恒巨人

- 4.古希腊的早期人文思想

代表人物　亚里士多德　《形而上学》

经历：
- 师从柏拉图，学在“雅典学园”
- 教授亚
- 创立学园，

坚持唯物主义，反对唯心主义理念论

品质：吾爱吾师，吾尤爱真理

贡献：
- 创立逻辑学，提出”三段论“
- 在《政治学》中，提出法治优于人治
- 伦理学中，提出”中道“理论

二、古代罗马

- **1.政体演变**

君主制：公元前6世纪末之前

↓

贵族共和：
- 执政官（最高行政长官）
- 元老院（国家决策机构）
- 公民大会（选公职人员；通过提案）
- 平民保民官（监督政府与行为）

↓

帝国体制：
- 屋大维（前27年，元首制）
- 戴克里先（公元3世纪，公开君主制）

二、古代罗马

- **2.罗马法**（演变历程）

《十二铜表法》：从习惯法到成文法

↓

公民法：调整公民之间的关系（前3世纪前）

↓

万民法：罗马帝国时期，一切自由民的法律

↓

查士丁尼法典：东罗马帝国，形成完整的法律体系

二、古代罗马

- **2.罗马法**（核心内容）

①调整财产关系，规定奴隶制和私有财产神圣不可侵犯

②保护自由民的权力，法律面前人人平等

二、古代罗马

- **2.罗马法**（历史意义）

①巩固了罗马帝国的统治（社会稳定、经济发展、维护奴隶制等）

②影响广泛，对近代欧美资本主义国家产生重要影响