专题03 求圆锥曲线的离心率或离心率的取值范围

最新模拟精练

1.（2024上·吉林·高二校联考期末）已知双曲线E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的右焦点为$F$，右顶点为$A$，过点$F$作$x$轴的垂线，垂线与双曲线$E$的一个交点为$P$，$PF$的中点为$Q$，直线$AQ$与直线$OP$（$O$为坐标原点）的交点在双曲线$E$上，则双曲线$E$的离心率为（　）

A．$\sqrt{2}$　　　B．3　　　C．$\sqrt{3}$　　　D．2

【答案】B

【分析】利用双曲线通径的知识明确点P，Q的坐标，根据双曲线的对称性就可以得到B点坐标，再结合Q，A，B三点共线，用向量方法可求a，c的关系，得到离心率.

【详解】易知$A(a,0)$，$F(c,0)$，不妨设$P\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$，则$Q\left(c,\frac{b^2}{2a}\right)$．设直线$AQ$与直线$OP$的交点为B，

因为B在双曲线E上，所以B，P关于原点对称，即$B\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$.

因为Q，A，B三点共线，所以$\overrightarrow{BA}//\overrightarrow{AQ}$.

因为$\overrightarrow{BA}=\left(a+c,\frac{b^2}{a}\right)$，$\overrightarrow{AQ}=\left(c-a,\frac{b^2}{2a}\right)$，

所以$(a+c)\cdot\frac{b^2}{2a}=\frac{b^2}{a}\cdot(c-a)$，所以$3a=c$，$e=\frac{c}{a}=3$.

故选：B

2.（2023上·山东济宁·高二济宁一中校考阶段练习）设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，$P$是椭圆上一点，$|PF_1|=\lambda|PF_2|\left(\frac{1}{3}\le\lambda\le3\right)$，$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$，则椭圆离心率的取值范围为（　）

A．$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{5}}{3}\right]$　　　B．$\left[\frac{1}{2},\frac{5}{9}\right]$

C．$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{10}}{4}\right]$　　　D．$\left[\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right]$

【答案】C

【分析】设$|PF_2|=t$，由椭圆定义和勾股定理得到$e^2=\frac{\lambda^2+1}{(\lambda+1)^2}$，换元后得到$\frac{\lambda^2+1}{(\lambda+1)^2}=2\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

，根据二次函数单调性求出$\frac{1}{2}\leqslant e^2\leqslant\frac{5}{8}$，得到离心率的取值范围.

【详解】设$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，由椭圆的定义可得，$|PF_1|+|PF_2|=2a$，

可设$|PF_2|=t$，可得$|PF_1|=\lambda t$，即有$(\lambda+1)t=2a$，①

由$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{2}$，可得$|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$，即为$(\lambda^2+1)t^2=4c^2$，②

由②÷①^2，可得$e^2=\frac{\lambda^2+1}{(\lambda+1)^2}$，令$m=\lambda+1$，可得$\lambda=m-1$，

即有$\frac{\lambda^2+1}{(\lambda+1)^2}=\frac{m^2-2m+2}{m^2}=2\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$，由$\frac{1}{3}\le\lambda\le3$，

可得$\frac{4}{3}\le m\le4$，即$\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{m}\leqslant\frac{3}{4}$，

则$m=2$时，取得最小值$\frac{1}{2}$；$m=\frac{4}{3}$或4时，取得最大值$\frac{5}{8}$.

即有$\frac{1}{2}\leqslant e^2\leqslant\frac{5}{8}$，得$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant e\leqslant\frac{\sqrt{10}}{4}$.

故选：C

【点睛】方法点睛：求椭圆的离心率或离心率的取值范围，常见有三种方法：①求出a,c，代入公式$e=\frac{c}{a}$；

②根据条件得到关于a,b,c的齐次式，结合$b^2=a^2-c^2$转化为a,c的齐次式，然后等式(不等式)两边分别除以a或a^2转化为关于离心率的方程(不等式)，解方程(不等式)即可得离心率或离心率的取值范围；

③由题目条件得到离心率关于变量的函数，结合变量的取值范围得到离心率的取值范围.

3.（2024上·黑龙江哈尔滨·高二黑龙江省哈尔滨市双城区兆麟中学校联考期末）若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的一条渐近线经过点$(4,3)$，则双曲线的离心率为（　）

A．$\frac{5}{4}$　　B．$\frac{25}{16}$　　C．$\frac{5}{3}$　　D．$\frac{25}{9}$

【答案】A

【分析】求出渐近线方程，得到$\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$，从而得到离心率.

【详解】由题意得$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，

显然$(4,3)$在$y=\frac{b}{a}x$上，故$\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$，

故 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{b^2+a^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{5}{4}$，

即双曲线的离心率为 $\frac{5}{4}$.

故选：A

4．（2023上·高二单元测试）已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左、右顶点分别为 A_1、A_2，垂直于 x 轴的直线 l 与双曲线 C 交于 M、N 两点，且 $\angle MA_1N+\angle MA_2N=180°$，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．$\sqrt{5}$

【答案】A

【分析】由题意，设出点 M 的坐标，结合所给信息可得 $k_{MA_1}\cdot k_{MA_2}$，再利用斜率公式以及离心率公式进行求解即可.

【详解】因为点 M 在双曲线 C 上，不妨设 $M\left(x_0,y_0\right)$，

因为 $\angle MA_1N+\angle MA_2N=180°$，所以 $\angle MA_1x+\angle MA_2x=90°$，

故 $\tan\angle MA_1x\cdot\tan\angle MA_2x=\frac{\sin\angle MA_1x}{\cos\angle MA_1x}\cdot\frac{\sin\angle MA_2x}{\cos\angle MA_2x}$

$=\frac{\sin\angle MA_1x}{\cos\angle MA_1x}\cdot\frac{\sin\left(90°-\angle MA_1x\right)}{\cos\left(90°-\angle MA_1x\right)}=\frac{\sin\angle MA_1x}{\cos\angle MA_1x}\cdot\frac{\cos\angle MA_1x}{\sin\angle MA_1x}=1$，即 $k_{MA_1}\cdot k_{MA_2}=1$.

因为双曲线 C 的左右顶点分别为 $A_1\left(-a,0\right),A_2\left(a,0\right)$，

而点 M 满足 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，

所以 $k_{MA_1}\cdot k_{MA_2}=\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{x_0-a}=\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=\frac{b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)}{x_0^2-a^2}=\frac{b^2}{a^2}=1$，

则双曲线 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{2}$.

故选：　A

5．（2024·吉林白山·统考一模）不与坐标轴垂直的直线 l 过点 $N\left(x_0,0\right)$，$x_0\neq0$，椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 上存在两点 A,B 关于 l 对称，线段 AB 的中点 M 的坐标为 $\left(x_1,y_1\right)$．若 $x_1=2x_0$，则 C 的离心率为（　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【分析】根据点差法求出$k_{OM}\cdot k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}$，再结合$k_l k_{AB}=-1$进行计算得出结果.

【详解】设O为坐标原点，在椭圆C中，设$A(x_2,y_2),B(x_3,y_3)$，则$\begin{cases}\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\\ \frac{x_3^2}{a^2}+\frac{y_3^2}{b^2}=1\end{cases}$，

所以$\frac{(x_2^2-x_3^2)}{a^2}=-\frac{(y_2^2-y_3^2)}{b^2}$，

因为A,B关于l对称，所以$x_2\neq x_3$，所以$-\frac{b^2}{a^2}=\frac{(y_2-y_3)(y_2+y_3)}{(x_2-x_3)(x_2+x_3)}$，

由线段AB的中点M的坐标为(x_1,y_1)，得出$y_2+y_3=2y_1,x_2+x_3=2x_1$.

所以$k_{OM}\cdot k_{AB}=-\frac{b^2}{a^2}$，

又$k_l\cdot k_{AB}=-1$，

$\therefore k_{OM}=\frac{b^2}{a^2}k_l$，即$\frac{y_1}{x_1}=\frac{b^2}{a^2}\frac{y_1}{x_1-x_0}$，

又$x_1=2x_0$，$\therefore\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$，所以所求离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：C.

6．（2023上·江西宜春·高一校考阶段练习）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2,P$为双曲线上的一点，$I$为$\triangle PF_1F_2$的内心，且$\overrightarrow{IF_1}+2\overrightarrow{IF_2}=2\overrightarrow{PI}$，则$C$的离心率为（　）

A．3　　B．$\frac{5}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【答案】D

【分析】延长IP到A且$|IP|=|PA|$，延长IF_2到B且$|IF_2|=|F_2B|$，结合向量的线性关系知I是$\triangle ABF_1$的重心，根据重心和内心的性质，进而得到$|PF_1|=|F_1F_2|=2|PF_2|$，由双曲线定义得到齐次方程，即可求离心率.

【详解】如下图示，延长IP到A且$|IP|=|PA|$，延长IF_2到B且$|IF_2|=|F_2B|$，

所以$\overrightarrow{IF_1}+2\overrightarrow{IF_2}=2\overrightarrow{PI}$，即$\overrightarrow{IF_1}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{0}$，

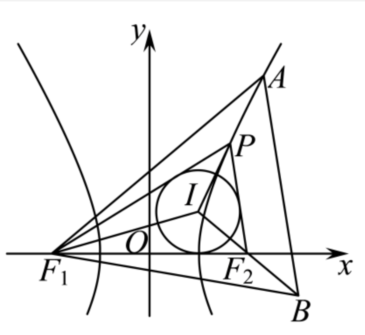
故 I 是 $\triangle ABF_1$ 的重心，即 $S_{\triangle AIF_1}=S_{\triangle BIF_1}=S_{\triangle AIB}$，

又 $S_{\triangle AIF_1}=2S_{\triangle PIF_1}, S_{\triangle BIF_1}=2S_{\triangle F_1IF_2}, S_{\triangle AIB}=4S_{\triangle PIF_2}$，

所以 $S_{\triangle PIF_1}=S_{\triangle F_1IF_2}=2S_{\triangle PIF_2}$，而 I 是 $\triangle PF_1F_2$ 的内心，则 $|PF_1|=|F_1F_2|=2|PF_2|$，

由 $|PF_1|-|PF_2|=2a, |F_1F_2|=2c$，则 $|PF_2|=2a$，故 $2c=4a$，即 $e=\frac{c}{a}=2$.

故选：D



【点睛】关键点睛：利用向量的线性关系构造重心，结合重心和内心的性质得到 $|PF_1|=|F_1F_2|=2|PF_2|$，再根据双曲线定义得到双曲线参数的齐次方程.

7．（2024上·江苏·高三统考期末）已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$（$k\neq 0$）的图象是双曲线，其两条渐近线为 x 轴和 y 轴，两条渐近线的夹角为 $\frac{\pi}{2}$，将双曲线绕其中心旋转可使其渐近线变为直线 $y=\pm x$，由此可求得其离心率为 $\sqrt{2}$.已知函数 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{x}$ 的图象也是双曲线，其两条渐近线为直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 和 y 轴，则该双曲线的离心率是（ ）

A．$\sqrt{3}$　　B．$2\sqrt{3}$　　C．$\frac{2}{3}\sqrt{3}$　　D．$\frac{4}{3}\sqrt{3}$

【答案】C

【分析】根据双曲线的性质，结合旋转即可求解.

【详解】在第一象限内，函数 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{x}$ 的图象位于 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上方，

由于 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 和 y 轴是渐近线，所以两条渐近线之间的夹角 $2\theta=\frac{\pi}{3}$，故 $\theta=\frac{\pi}{6}$，

不妨将双曲线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{x}$ 绕其中心旋转逆时针旋转 $30°$,则可得到其焦点在 y 轴上的双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，且两条渐近线之间的夹角 $2\theta=\frac{\pi}{3}$，因此其中一条渐近线的倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$，