

# 五年 2018–2022 高考数学真题按知识点分类汇编 4—指数函数、 对数函数、幂函数（含解析）

## 一、单选题

1. (2022·天津·统考高考真题) 化简  $(2\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2)$  的值为 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 4                      D. 6

2. (2022·天津·统考高考真题) 已知  $a = 2^{0.7}$ ,  $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.7}$ ,  $c = \log_2 \frac{1}{3}$ , 则 ( )

- A.  $a > c > b$               B.  $b > c > a$               C.  $a > b > c$               D.  $c > a > b$

3. (2022·浙江·统考高考真题) 已知  $2^a = 5, \log_8 3 = b$ , 则  $4^{a-3b} =$  ( )

- A. 25                      B. 5                      C.  $\frac{25}{9}$                       D.  $\frac{5}{3}$

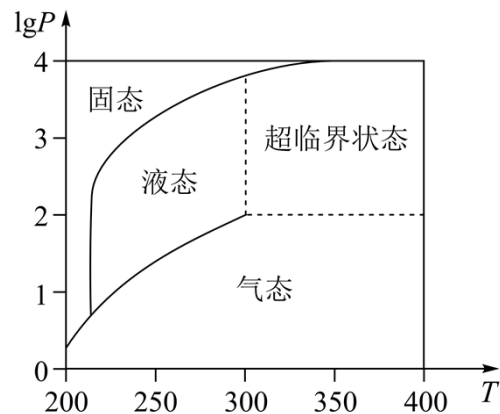
4. (2022·全国·统考高考真题) 已知  $9^m = 10, a = 10^m - 11, b = 8^m - 9$ , 则 ( )

- A.  $a > 0 > b$               B.  $a > b > 0$               C.  $b > a > 0$               D.  $b > 0 > a$

5. (2022·北京·统考高考真题) 已知函数  $f(x) = \frac{1}{1+2^x}$ , 则对任意实数  $x$ , 有 ( )

- A.  $f(-x) + f(x) = 0$                       B.  $f(-x) - f(x) = 0$   
C.  $f(-x) + f(x) = 1$                       D.  $f(-x) - f(x) = \frac{1}{3}$

6. (2022·北京·统考高考真题) 在北京冬奥会上, 国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术, 为实现绿色冬奥作出了贡献. 如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与  $T$  和  $\lg P$  的关系, 其中  $T$  表示温度, 单位是  $K$ ;  $P$  表示压强, 单位是  $\text{bar}$ . 下列结论中正确的是 ( )



- A. 当  $T = 220$ ,  $P = 1026$  时, 二氧化碳处于液态  
B. 当  $T = 270$ ,  $P = 128$  时, 二氧化碳处于气态

C. 当  $T = 300$ ,  $P = 9987$  时, 二氧化碳处于超临界状态

D. 当  $T = 360$ ,  $P = 729$  时, 二氧化碳处于超临界状态

7. (2022·全国·统考高考真题) 设  $a = 0.1e^{0.1}$ ,  $b = \frac{1}{9}$ ,  $c = -\ln 0.9$ , 则 ( )

- A.  $a < b < c$       B.  $c < b < a$       C.  $c < a < b$       D.  $a < c < b$

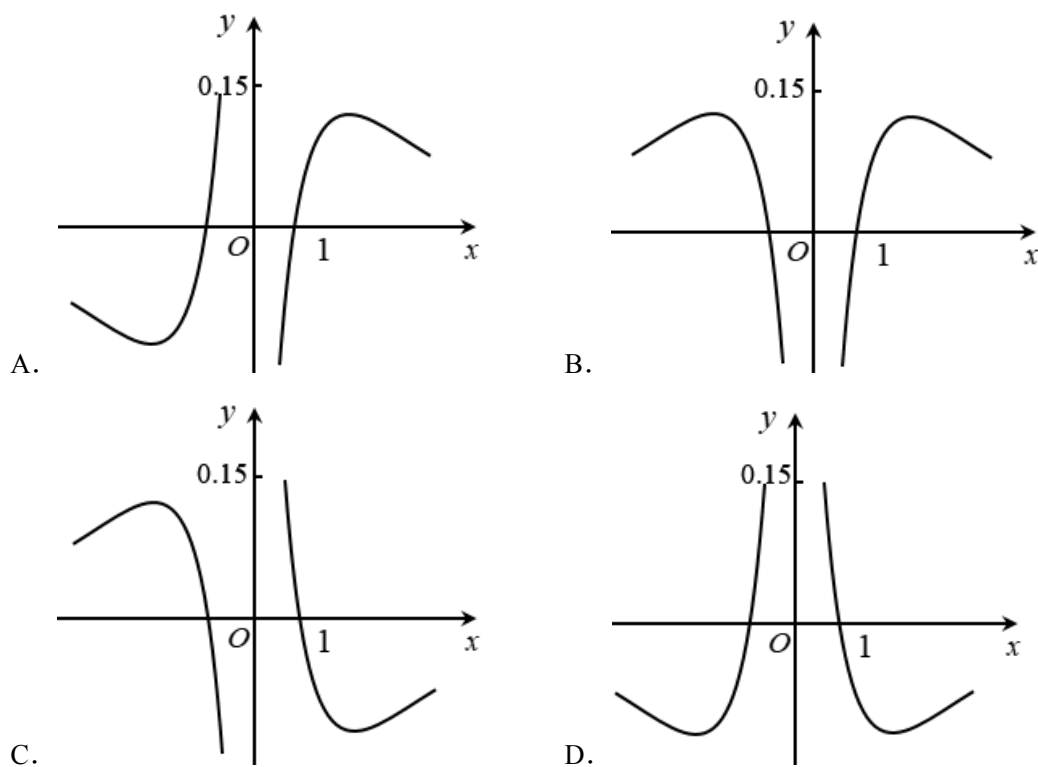
8. (2021·天津·统考高考真题) 设  $a = \log_2 0.3$ ,  $b = \log_{\frac{1}{2}} 0.4$ ,  $c = 0.4^{0.3}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $a < b < c$       B.  $c < a < b$       C.  $b < c < a$       D.  $a < c < b$

9. (2021·天津·统考高考真题) 若  $2^a = 5^b = 10$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} =$  ( )

- A.  $-1$       B.  $\lg 7$       C.  $1$       D.  $\log_7 10$

10. (2021·天津·统考高考真题) 函数  $y = \frac{\ln|x|}{x^2+2}$  的图像大致为 ( )



11. (2021·全国·统考高考真题) 已知  $a = \log_5 2$ ,  $b = \log_8 3$ ,  $c = \frac{1}{2}$ , 则下列判断正确的是 ( )

- A.  $c < b < a$       B.  $b < a < c$       C.  $a < c < b$       D.  $a < b < c$

12. (2021·全国·统考高考真题) 设  $a = 2\ln 1.01$ ,  $b = \ln 1.02$ ,  $c = \sqrt{1.04} - 1$ . 则 ( )

- A.  $a < b < c$       B.  $b < c < a$       C.  $b < a < c$       D.  $c < a < b$

13. (2021·全国·高考真题) 青少年视力是社会普遍关注的问题, 视力情况可借助视力表测量. 通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据, 五分记录法的数据  $L$

和小数记录表的数据  $V$  的满足  $L = 5 + \lg V$ . 已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9, 则其视力的小数记录法的数据为 ( ) ( $\sqrt[3]{10} \approx 1.259$ )

- A. 1.5                      B. 1.2                      C. 0.8                      D. 0.6

14. (2021·全国·统考高考真题) 下列函数中最小值为 4 的是 ( )

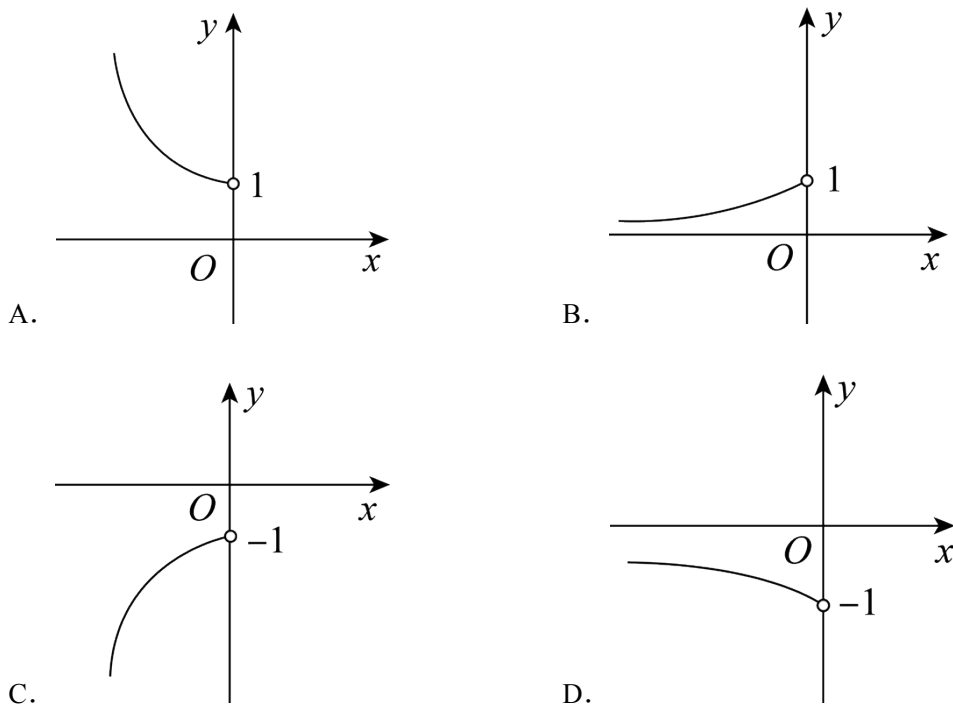
- A.  $y = x^2 + 2x + 4$                       B.  $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$   
 C.  $y = 2^x + 2^{2-x}$                       D.  $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$

15. (2020·山东·统考高考真题) 函数  $f(x) = \frac{1}{\lg x}$  的定义域是 ( )

- A.  $(0, +\infty)$                       B.  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$                       C.  $[0, 1) \cup (1, +\infty)$                       D.  $(1, +\infty)$

16. (2020·山东·统考高考真题) 已知函数  $y = f(x)$  是偶函数, 当  $x \in (0, +\infty)$  时,

$y = a^x (0 < a < 1)$ , 则该函数在  $(-\infty, 0)$  上的图像大致是 ( )



17. (2020·海南·高考真题) 已知函数  $f(x) = \lg(x^2 - 4x - 5)$  在  $(a, +\infty)$  上单调递增, 则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(2, +\infty)$                       B.  $[2, +\infty)$                       C.  $(5, +\infty)$                       D.  $[5, +\infty)$

18. (2020·天津·统考高考真题) 设  $a = 3^{0.7}$ ,  $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-0.8}$ ,  $c = \log_{0.7} 0.8$ , 则  $a, b, c$  的大小

关系为 ( )

- A.  $a < b < c$                       B.  $b < a < c$                       C.  $b < c < a$                       D.  $c < a < b$

19. (2020·全国·统考高考真题) 若  $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$ , 则 ( )

- A.  $\ln(y-x+1) > 0$     B.  $\ln(y-x+1) < 0$     C.  $\ln|x-y| > 0$     D.  $\ln|x-y| < 0$

20. (2020·全国·统考高考真题) 已知  $5^5 < 8^4$ ,  $13^4 < 8^5$ . 设  $a = \log_5 3$ ,  $b = \log_8 5$ ,  $c = \log_{13} 8$ , 则 ( )

- A.  $a < b < c$     B.  $b < a < c$     C.  $b < c < a$     D.  $c < a < b$

21. (2020·全国·统考高考真题) *Logistic* 模型是常用数学模型之一, 可应用于流行病学领域. 有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数  $I(t)$  ( $t$  的单位: 天) 的

*Logistic* 模型:  $I(t) = \frac{K}{1 + e^{-0.23(t-53)}}$ , 其中  $K$  为最大确诊病例数. 当  $I(t^*) = 0.95K$  时, 标志着

已初步遏制疫情, 则  $t^*$  约为 ( ) ( $\ln 19 \approx 3$ )

- A. 60    B. 63    C. 66    D. 69

22. (2020·全国·统考高考真题) 设  $a = \log_3 2$ ,  $b = \log_5 3$ ,  $c = \frac{2}{3}$ , 则 ( )

- A.  $a < c < b$     B.  $a < b < c$     C.  $b < c < a$     D.  $c < a < b$

23. (2020·全国·统考高考真题) 设  $a \log_3 4 = 2$ , 则  $4^{-a} =$  ( )

- A.  $\frac{1}{16}$     B.  $\frac{1}{9}$     C.  $\frac{1}{8}$     D.  $\frac{1}{6}$

24. (2020·全国·统考高考真题) 设函数  $f(x) = \ln|2x+1| - \ln|2x-1|$ , 则  $f(x)$  ( )

- A. 是偶函数, 且在  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  单调递增    B. 是奇函数, 且在  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  单调递减  
C. 是偶函数, 且在  $(-\infty, -\frac{1}{2})$  单调递增    D. 是奇函数, 且在  $(-\infty, -\frac{1}{2})$  单调递减

25. (2019·全国·高考真题) 已知  $a = \log_2 0.2$ ,  $b = 2^{0.2}$ ,  $c = 0.2^{0.3}$ , 则

- A.  $a < b < c$     B.  $a < c < b$     C.  $c < a < b$     D.  $b < c < a$

26. (2019·全国·高考真题) 若  $a > b$ , 则

- A.  $\ln(a-b) > 0$     B.  $3a < 3b$   
C.  $a^3 - b^3 > 0$     D.  $|a| > |b|$

27. (2019·北京·高考真题) 在天文学中, 天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述. 两颗星的星等与亮度满足  $m_2 - m_1 = \frac{5}{2} \lg \frac{E_1}{E_2}$ , 其中星等为  $m_k$  的星的亮度为  $E_k$  ( $k=1, 2$ ). 已知太阳的星等是  $-26.7$ , 天狼星的星等是  $-1.45$ , 则太阳与天狼星的亮度的比值为

- A.  $10^{10.1}$     B. 10.1    C.  $\lg 10.1$     D.  $10^{-10.1}$

28. (2019·天津·高考真题) 已知  $a = \log_2 7$ ,  $b = \log_3 8$ ,  $c = 0.3^{0.2}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为

- A.  $c < b < a$     B.  $a < b < c$

C.  $b < c < a$

D.  $c < a < b$

29. (2019·天津·高考真题) 已知  $a = \log_5 2$ ,  $b = \log_{0.5} 0.2$ ,  $c = 0.5^{0.2}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为

A.  $a < c < b$

B.  $a < b < c$

C.  $b < c < a$

D.  $c < a < b$

30. (2018·天津·高考真题) 已知  $a = \log_2 e$ ,  $b = \ln 2$ ,  $c = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为

A.  $a > b > c$

B.  $b > a > c$

C.  $c > b > a$

D.  $c > a > b$

31. (2018·全国·高考真题) 设  $a = \log_{0.2} 0.3$ ,  $b = \log_2 0.3$ , 则

A.  $a + b < ab < 0$

B.  $ab < a + b < 0$

C.  $a + b < 0 < ab$

D.  $ab < 0 < a + b$

32. (2018·全国·高考真题) 下列函数中, 其图像与函数  $y = \ln x$  的图像关于直线  $x = 1$  对称的是

A.  $y = \ln(1-x)$

B.  $y = \ln(2-x)$

C.  $y = \ln(1+x)$

D.  $y = \ln(2+x)$

33. (2018·天津·高考真题) 已知  $a = \log_3 \frac{7}{2}$ ,  $b = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{3}}$ ,  $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$ , 则  $a, b, c$  的大小关系为

A.  $a > b > c$

B.  $b > a > c$

C.  $c > b > a$

D.  $c > a > b$

## 二、多选题

34. (2020·海南·统考高考真题) 信息熵是信息论中的一个重要概念. 设随机变量  $X$  所有可能的取值为  $1, 2, \dots, n$ , 且  $P(X=i) = p_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ , 定义  $X$  的信息熵

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i. \quad ( \quad )$$

A. 若  $n=1$ , 则  $H(X)=0$

B. 若  $n=2$ , 则  $H(X)$  随着  $p_1$  的增大而增大

C. 若  $p_i = \frac{1}{n} (i=1, 2, \dots, n)$ , 则  $H(X)$  随着  $n$  的增大而增大

D. 若  $n=2m$ , 随机变量  $Y$  所有可能的取值为  $1, 2, \dots, m$ , 且

$$P(Y=j) = p_j + p_{2m+1-j} (j=1, 2, \dots, m), \text{ 则 } H(X) \leq H(Y)$$

## 三、填空题

35. (2020·山东·统考高考真题) 若  $\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} 4 = 0$ , 则实数  $x$  的值是\_\_\_\_\_.

36. (2020·北京·统考高考真题) 函数  $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln x$  的定义域是\_\_\_\_\_.

37. (2020·江苏·统考高考真题) 已知  $y=f(x)$  是奇函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ , 则  $f(-8)$  的值是\_\_\_\_\_.

38. (2018·全国·高考真题) 已知函数  $f(x) = \log_2(x^2 + a)$ , 若  $f(3) = 1$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

#### 四、双空题

39. (2022·全国·统考高考真题) 若  $f(x) = \ln \left| a + \frac{1}{1-x} \right| + b$  是奇函数, 则  $a =$  \_\_\_\_\_,  $b =$  \_\_\_\_\_.

参考答案:

1. B

【分析】根据对数的性质可求代数式的值.

$$\begin{aligned} \text{【详解】原式} &= (2 \times \frac{1}{2} \log_2 3 + \frac{1}{3} \log_2 3)(\log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 2) \\ &= \frac{4}{3} \log_2 3 \times \frac{3}{2} \log_3 2 = 2, \end{aligned}$$

故选: B

2. C

【分析】利用幂函数、对数函数的单调性结合中间值法可得出  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的大小关系.

$$\text{【详解】因为 } 2^{0.7} > \left(\frac{1}{3}\right)^{0.7} > 0 = \log_2 1 > \log_2 \frac{1}{3}, \text{ 故 } a > b > c.$$

故答案为: C.

3. C

【分析】根据指数式与对数式的互化, 幂的运算性质以及对数的运算性质即可解出.

$$\text{【详解】因为 } 2^a = 5, b = \log_8 3 = \frac{1}{3} \log_2 3, \text{ 即 } 2^{3b} = 3, \text{ 所以 } 4^{a-3b} = \frac{4^a}{4^{3b}} = \frac{(2^a)^2}{(2^{3b})^2} = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}.$$

故选: C.

4. A

【分析】法一: 根据指对互化以及对数函数的单调性即可知  $m = \log_9 10 > 1$ , 再利用基本不等式, 换底公式可得  $m > \lg 11$ ,  $\log_8 9 > m$ , 然后由指数函数的单调性即可解出.

【详解】[方法一]: (指对数函数性质)

由  $9^m = 10$  可得  $m = \log_9 10 = \frac{\lg 10}{\lg 9} > 1$ , 而  $\lg 9 \lg 11 < \left(\frac{\lg 9 + \lg 11}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lg 99}{2}\right)^2 < 1 = (\lg 10)^2$ , 所

以  $\frac{\lg 10}{\lg 9} > \frac{\lg 11}{\lg 10}$ , 即  $m > \lg 11$ , 所以  $a = 10^m - 11 > 10^{\lg 11} - 11 = 0$ .

又  $\lg 8 \lg 10 < \left(\frac{\lg 8 + \lg 10}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lg 80}{2}\right)^2 < (\lg 9)^2$ , 所以  $\frac{\lg 9}{\lg 8} > \frac{\lg 10}{\lg 9}$ , 即  $\log_8 9 > m$ ,

所以  $b = 8^m - 9 < 8^{\log_8 9} - 9 = 0$ . 综上,  $a > 0 > b$ .

[方法二]: 【最优解】(构造函数)

由  $9^m = 10$ ，可得  $m = \log_9 10 \in (1, 1.5)$ 。

根据  $a, b$  的形式构造函数  $f(x) = x^m - x - 1 (x > 1)$ ，则  $f'(x) = mx^{m-1} - 1$ ，

令  $f'(x) = 0$ ，解得  $x_0 = m^{\frac{1}{1-m}}$ ，由  $m = \log_9 10 \in (1, 1.5)$  知  $x_0 \in (0, 1)$ 。

$f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增，所以  $f(10) > f(8)$ ，即  $a > b$ ，

又因为  $f(9) = 9^{\log_9 10} - 10 = 0$ ，所以  $a > 0 > b$ 。

故选：A。

【整体点评】法一：通过基本不等式和换底公式以及对数函数的单调性比较，方法直接常用，属于通性通法；

法二：利用  $a, b$  的形式构造函数  $f(x) = x^m - x - 1 (x > 1)$ ，根据函数的单调性得出大小关系，简单明了，是该题的最优解。

5. C

【分析】直接代入计算，注意通分不要计算错误。

【详解】 $f(-x) + f(x) = \frac{1}{1+2^{-x}} + \frac{1}{1+2^x} = \frac{2^x}{1+2^x} + \frac{1}{1+2^x} = 1$ ，故 A 错误，C 正确；

$f(-x) - f(x) = \frac{1}{1+2^{-x}} - \frac{1}{1+2^x} = \frac{2^x}{1+2^x} - \frac{1}{1+2^x} = \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1 - \frac{2}{2^x + 1}$ ，不是常数，故 BD 错误；

故选：C。

6. D

【分析】根据  $T$  与  $\lg P$  的关系图可得正确的选项。

【详解】当  $T = 220$ ， $P = 1026$  时， $\lg P > 3$ ，此时二氧化碳处于固态，故 A 错误。

当  $T = 270$ ， $P = 128$  时， $2 < \lg P < 3$ ，此时二氧化碳处于液态，故 B 错误。

当  $T = 300$ ， $P = 9987$  时， $\lg P$  与 4 非常接近，故此时二氧化碳处于固态，对应的是非超临界状态，故 C 错误。

当  $T = 360$ ， $P = 729$  时，因  $2 < \lg P < 3$ ，故此时二氧化碳处于超临界状态，故 D 正确。

故选：D

7. C

【分析】构造函数  $f(x) = \ln(1+x) - x$ ，导数判断其单调性，由此确定  $a, b, c$  的大小。



**【详解】方法一：构造法**

设  $f(x) = \ln(1+x) - x (x > -1)$ ，因为  $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$ ，

当  $x \in (-1, 0)$  时， $f'(x) > 0$ ，当  $x \in (0, +\infty)$  时  $f'(x) < 0$ ，

所以函数  $f(x) = \ln(1+x) - x$  在  $(0, +\infty)$  单调递减，在  $(-1, 0)$  上单调递增，

所以  $f(\frac{1}{9}) < f(0) = 0$ ，所以  $\ln \frac{10}{9} - \frac{1}{9} < 0$ ，故  $\frac{1}{9} > \ln \frac{10}{9} = -\ln 0.9$ ，即  $b > c$ ，

所以  $f(-\frac{1}{10}) < f(0) = 0$ ，所以  $\ln \frac{9}{10} + \frac{1}{10} < 0$ ，故  $\frac{9}{10} < e^{-\frac{1}{10}}$ ，所以  $\frac{1}{10} e^{\frac{1}{10}} < \frac{1}{9}$ ，

故  $a < b$ ，

设  $g(x) = x e^x + \ln(1-x) (0 < x < 1)$ ，则  $g'(x) = (x+1)e^x + \frac{1}{x-1} = \frac{(x^2-1)e^x+1}{x-1}$ ，

令  $h(x) = e^x(x^2-1)+1$ ， $h'(x) = e^x(x^2+2x-1)$ ，

当  $0 < x < \sqrt{2}-1$  时， $h'(x) < 0$ ，函数  $h(x) = e^x(x^2-1)+1$  单调递减，

当  $\sqrt{2}-1 < x < 1$  时， $h'(x) > 0$ ，函数  $h(x) = e^x(x^2-1)+1$  单调递增，

又  $h(0) = 0$ ，

所以当  $0 < x < \sqrt{2}-1$  时， $h(x) < 0$ ，

所以当  $0 < x < \sqrt{2}-1$  时， $g'(x) > 0$ ，函数  $g(x) = x e^x + \ln(1-x)$  单调递增，

所以  $g(0.1) > g(0) = 0$ ，即  $0.1 e^{0.1} > -\ln 0.9$ ，所以  $a > c$

故选：C.

**方法二：比较法**

解：  $a = 0.1 e^{0.1}$ ， $b = \frac{0.1}{1-0.1}$ ， $c = -\ln(1-0.1)$ ，

$$\textcircled{1} \ln a - \ln b = 0.1 + \ln(1-0.1) \text{ ,}$$

令  $f(x) = x + \ln(1-x), x \in (0, 0.1]$ ，

则  $f'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0$ ，

故  $f(x)$  在  $(0, 0.1]$  上单调递减，

可得  $f(0.1) < f(0) = 0$ ，即  $\ln a - \ln b < 0$ ，所以  $a < b$ ；

$$\textcircled{2} a - c = 0.1 e^{0.1} + \ln(1-0.1) \text{ ,}$$

令  $g(x) = x e^x + \ln(1-x), x \in (0, 0.1]$ ，

$$\text{则 } g'(x) = xe^x + e^x - \frac{1}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x)e^x - 1}{1-x},$$

$$\text{令 } k(x) = (1+x)(1-x)e^x - 1, \text{ 所以 } k'(x) = (1-x^2 - 2x)e^x > 0,$$

所以  $k(x)$  在  $(0, 0.1]$  上单调递增, 可得  $k(x) > k(0) > 0$ , 即  $g'(x) > 0$ ,

所以  $g(x)$  在  $(0, 0.1]$  上单调递增, 可得  $g(0.1) > g(0) = 0$ , 即  $a - c > 0$ , 所以  $a > c$ .

故  $c < a < b$ .

8. D

【分析】根据指数函数和对数函数的性质求出  $a, b, c$  的范围即可求解.

【详解】 $\mathbb{Q} \log_2 0.3 < \log_2 1 = 0, \therefore a < 0,$

$$\mathbb{Q} \log_{\frac{1}{2}} 0.4 = -\log_2 0.4 = \log_2 \frac{5}{2} > \log_2 2 = 1, \therefore b > 1,$$

$$\mathbb{Q} 0 < 0.4^{0.3} < 0.4^0 = 1, \therefore 0 < c < 1,$$

$$\therefore a < c < b.$$

故选: D.

9. C

【分析】由已知表示出  $a, b$ , 再由换底公式可求.

【详解】 $\mathbb{Q} 2^a = 5^b = 10, \therefore a = \log_2 10, b = \log_5 10,$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\log_2 10} + \frac{1}{\log_5 10} = \lg 2 + \lg 5 = \lg 10 = 1.$$

故选: C.

10. B

【分析】由函数为偶函数可排除 AC, 再由当  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x) < 0$ , 排除 D, 即可得解.

【详解】设  $y = f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2 + 2}$ , 则函数  $f(x)$  的定义域为  $\{x | x \neq 0\}$ , 关于原点对称,

$$\text{又 } f(-x) = \frac{\ln|-x|}{(-x)^2 + 2} = f(x), \text{ 所以函数 } f(x) \text{ 为偶函数, 排除 AC;}$$

当  $x \in (0, 1)$  时,  $\ln|x| < 0, x^2 + 2 > 0$ , 所以  $f(x) < 0$ , 排除 D.

故选: B.

11. C

【分析】对数函数的单调性可比较  $a, b$  与  $c$  的大小关系, 由此可得出结论.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/688002055006006063>