# 第二章 方程（组）与不等式（组）

## 2.3 一元二次方程及其应用

### 一、课标解读

1.能根据具体问题中的数量关系列出方程，体会方程是刻画现实世界数量关系的有效模型。

2.理解配方法，能用配方法、公式法、因式分解法解数字系数的一元二次方程.

3.会用一元二次方程根的判别式判别方程是否有实根和两个实根是否相等

4.能利用一元二次方程解决实际应用问题，并根据具体问题的实际意义，检验方程的解是否合理.

### 二、知识点回顾

**知识点 1. 一元二次方程的概念和解法**

1.一元二次方程的概念:只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 2 的整式方程，叫做一元二次方程.它的一般形式是 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$

直接开平方法

形如 $x^2=p$ 或$(mx\pm n)^2=p(p\geq0)$的一元二次方程，可利用平方根的定义，用直接开平方法求解.

配方法

把一元二次方程配成$(x+m)^2=n$ 的形式，再直接开平方求解.

公式法

将方程化为一般形式，确定 a，b，c 的值，然后代入求根公式计算.

因式分解法

(1)将方程右边化为⑤__；

(2)将方程左边分解为两个一次因式的乘积；

(3)令每个因式等于 0，得到两个一元一次方程，解这两个一元一次方程，它们的解就是一元二次方程的解.

**知识点 2. 一元二次方程根的判别式**

1.根的判别式:

一元二次方程 $ax^2+ bx+ c=0(a\#0)$的根的情况可由 $b^2- 4ac$ 来判定，我们将 $b^2- 4ac$ 称为根的判别式.

2.判别式与根的关系:

(1 )$b^2- 4ac>0\Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根;

(2)$b^2- 4ac=0\Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根;

(3)$b^2- 4ac <0\Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

**知识点 3. 一元二次方程的根与系数关系**

$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$两根分别为 $x_1,x_2$ ，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$

**知识点 4. 一元二次方程的应用**

1．列一元二次方程解应用题的步骤：

(1)审题；(2)设未知数；(3)列方程；(4)解方程；(5)检验；(6)答.

2．常见类型：

(1)增长率问题：设 a 为原来量，x 为平均增长率，n 为增长次数，b 为增长后的量，则 $a(1+x)^n=b$；当 x 为下降率时，则有 $a(1-x)^n=b$；

(2)面积问题；

(3)利润问题；

(4)握手问题.

## 三、热点训练

### 热点 1：解一元二次方程

**一练基础**

1．（2021·山东·汶上县南站中学九年级阶段练习）一元二次方程 $x^2-6x-6=0$ 配方后化为（　　）

A．$(x-3)^2=15$　　B．$(x-3)^2=3$　　C．$(x+3)^2=15$　　D．$(x+3)^2=3$

【答案】A

【分析】

先移项，化为 $x^2-6x=6,$ 再方程两边都加 9，从而可得答案.

【详解】

解：∵ $x^2-6x-6=0$，

$\therefore x^2-6x=6,$

两边都加 9 得：$x^2-6x+9=6+9,$

$\therefore (x-3)^2=15,$

故选 A

【点睛】

本题考查的是利用配方法解一元二次方程，掌握"配方法的步骤"是解题的关键.

2．（2019·广东·广州市第六十五中学一模）用换元法解方程 $\frac{x-2}{x^2}+\frac{2x^2}{x-2}=3$ 时，设 $\frac{x-2}{x^2}=y$，则原方程可变形为　（　　　）

A．$y^2-3y+2=0$　　B．$2y^2-3y+1=0$

C．$y^2+3y-2=0$　　D．$2y^2+3y-1=0$

【答案】A

【分析】

根据题意把原式中的 $\frac{x-2}{x^2}$ 换成 y，然后根据等式的性质变形即可.

【详解】

解：根据题意可得：$y+\frac{2}{y}=3$，

等式两边同时乘以 y 可得：$y^2+2=3y$，

移项可得：$y^2-3y+2=0$，

故本题答案应为：A.

【点睛】

等式的性质和换元法解方程是本题的考点，熟练掌握等式的性质是解题的关键.

3．（2021·陕西·榆林市第五中学九年级阶段练习）方程$x\left(x-5\right)=0$的解是______________.

【答案】$x_1=0$，$x_2=5$

【分析】

直接利用因式分解法解一元二次方程即可得解.

【详解】

解：$\because x\left(x-5\right)=0$，

$\therefore x=0$或$x-5=0$，

解得：$x_1=0$，$x_2=5$，

故答案为：$x_1=0$，$x_2=5$.

【点睛】

本题考查了解一元二次方程，能选择适当的方法解一元二次方程是解此题的关键.

4．（2021·广东广州·中考真题）方程 $x^2-4x=0$ 的实数解是 _____.

【答案】$x_1=0$，$x_2=4$.

【分析】

方程利用因式分解法求出解即可.

【详解】

解：方程 $x^2-4x=0$，

分解因式得：$x$（$x-4$）$=0$，

可得 $x=0$ 或 $x-4=0$，

解得：$x_1=0$，$x_2=4$.

故答案为：$x_1=0$，$x_2=4$.

【点睛】

本题考查了解一元二次方程-因式分解法，熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键．

5．（2021·山东淄川·二模）用公式法解一元二次方程，得 $y=\frac{-5\pm\sqrt{5^2+4\times3\times1}}{2\times3}$，请你写出该方程____．

【答案】$3y^2+5y-1=0$

【分析】

根据公式法 $y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 可得 $a,b,c$ 的值，由此即可得．

【详解】

解：设该方程为 $ay^2+by+c=0(a\neq0)$，

由 $y=\frac{-5\pm\sqrt{5^2+4\times3\times1}}{2\times3}$ 得：$a=3,b=5,c=-1$，

则该方程为 $3y^2+5y-1=0$，

故答案为：$3y^2+5y-1=0$．

【点睛】

本题考查了利用公式法解一元二次方程，熟练掌握公式法是解题关键．

6．（2022·福建三明·一模）解方程:$2x^2-4x-1=0$

【答案】$x_1=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$，$x_2=\frac{2-\sqrt{6}}{2}$．

【分析】

此题采用公式法即可求出一元二次方程的解．

【详解】

解：由题意可知：$a=2$，$b=-4$，$c=-1$

$\therefore \Delta=b^2-4ac=24>0$

$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$

$\therefore x_1=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$，$x_2=\frac{2-\sqrt{6}}{2}$．

【点睛】

本题主要是考查了公式法求解一元二次方程，熟练记忆一元二次方程的求根公式，是求解该题的关键．

7．（2021·黑龙江建华·三模）解方程：$(x+2)(x-1)=2x(x-2)+2$

【答案】$x_1=1$，$x_2=4$

【分析】

先把方程化简，再用因式分解法解方程即可．

【详解】

解：$(x+2)(x-1)=2x(x-2)+2$，

化简得，$x^2-5x+4=0$，

$(x-1)(x-4)=0$，

$x-1=0，x-4=0$

解得，$x_1=1$，$x_2=4$．

【点睛】

本题考查了一元二次方程的解法，解题关键是化简方程后选择恰当的方法解方程．

**二练巩固**

8．（2022·福建三明·一模）小华在解方程 $x^2=3x$ 时，只得出一个根 $x=3$，则被他漏掉的一个根是 $x=$________

【答案】0

【分析】

根据因式分解法即可求出答案．

【详解】

解：∵$x^2=3x$，

∴$x^2-3x=0$，

∴ $x(x-3)=0$，

∴$x=0$ 或 $x-3=0$，

∴$x_1=0$，$x_2=3$，

故答案为：0．

【点睛】

本题考查解一元二次方程，解题的关键是熟练运用因式分解法．

9．（2021·山东青岛·九年级单元测试）用配方法解下列方程时，配方有错误的是（　　）

A．$x^2-2x-99=0$ 化为 $(x-1)^2=100$　　B．$x^2+8x+9=0$ 化为 $(x+4)^2=25$

C．$2t^2-7t-4=0$ 化为 $\left(t-\frac{7}{4}\right)^2=\frac{81}{16}$　　D．$3x^2-4x-2=0$ 化为 $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$

【答案】B

【分析】

根据配方的步骤计算即可解题．

【详解】

$x^2+8x+9=0, x^2+8x=-9, x^2+8x+16=-9+16, (x+4)^2=7$

故 $B$ 错误．且 $ACD$ 选项均正确，

故选：$B$

【点睛】

考查了用配方法解一元二次方程，配方步骤：第一步平方项系数化 1；第二步移项，把常数项移到右边；第三步配方，左右两边加上一次项系数一半的平方；第四步左边写成完全平方式；第五步，直接开方即可．

10．（2021·山东·潍坊市寒亭区教学研究室一模）已知 $M=\frac{7}{5}t-2$，$N=t^2-\frac{3}{5}t$（$t$ 为任意实数），则 $M,N$ 的大小关系为（　　）

A．$M>N$　　B．$M<N$　　C．$M=N$　　D．不能确定

【答案】B

【分析】

利用作差法比较即可．

【详解】

根据题意，得

$N-M=t^2-\frac{3}{5}t-\frac{7}{5}t+2$

$=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$，

$\because (t-1)^2\geq 0$

$\therefore (t-1)^2+1\geqslant 1>0$

$\therefore M<N$，

故选 $B$．

【点睛】

本题考查了代数式的大小比较，熟练作差法，灵活运用完全平方公式，配方法的应用，使用实数的非负性是解题的关键．

11．（2021·浙江·绍兴市柯桥区杨汛桥镇中学二模）小丽在解一个三次方程 $x^3-2x+1=0$ 时，发现有如下提示：观察方程可以发现有一个根为 1，所以原方程可以转化为 $(x-1)(x^2+bx+c)=0$．根据这个提示，请你写出这个方程的所有的解______．

【答案】$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$或 1

【分析】

由$(x-1)(x^2+bx+c)=0$变形为$x^3+(b-1)x^2+(c-b)x-c=0$，根据一一对应的原则求得 $b$、$c$ 的值，然后运用因式分解和公式法求解即可．

【详解】

解：∵$(x-1)(x^2+bx+c)=0$，

∴$x^3+(b-1)x^2+(c-b)x-c=0$，

又由题意得：$x^3-2x+1=x^3+(b-1)x^2+(c-b)x-c$，

∴$\begin{cases} b-1=0 \\ c-b=-2 \\ -c=1 \end{cases}$

解得：$\begin{cases} b=1 \\ c=-1 \end{cases}$

∴$(x-1)(x^2+x-1)=0$，

∴$x-1=0$，$x^2+x-1=0$，

∴由求根公式得：$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，

则原方程所有的解为：$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$或 1，

故答案为：$\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$或 1．

【点睛】

本题主要考查了方程的解的定义和公式法求解一元二次方程，解题关键是根据一一对应的关系求出 $b$、$c$ 的值．

**三练拔高**

12．（2021·福建·厦门市第九中学二模）若关于 $x$ 的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$有两个实数根，且其中一个根为另一个根的 2 倍，则称这样的方程为"倍根方程"，以下关于倍根方程的说法，正确的是__________

①方程$x^2-3x+2=0$是倍根方程；

②若$(x-2)(mx-n)=0$是倍根方程，则$n=4m$或$n=m$；

③若点$(p,q)$在双曲线$y=\frac{2}{x}$的图像上，则关于 $x$ 的方程$px^2+3x+q=0$是倍根方程

【答案】①②③

【分析】

①根据倍根方程定义即可得到方程 $x^2+3x+2=0$ 是倍根方程；②根据倍根方程的定义得到 $x_1$，$x_2$，化简可得结论；③根据已知条件得到 $pq=2$，解方程 $px^2+3x+q=0$ 得到方程的根；

【详解】

解：①$x^2-3x+2=0$，

（$x-1$）（$x-2$）$=0$，

$x_1=1$，$x_2=2$，

∴方程 $x^2-3x+2=0$ 是倍根方程；

故①正确；

②解方程（$x-2$）（$mx-n$）$=0$，

得：$x_1=2$，$x_2=\frac{n}{m}$，

∵（$x-2$）（$mx-n$）$=0$ 是倍根方程，

∴$2=\frac{2n}{m}$ 或 $4=\frac{n}{m}$，

即 $m=n$ 或 $n=4m$，

故②正确；

③∵点（$p$，$q$）在反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象上，

∴$pq=2$，

解方程 $px^2+3x+q=0$ 得：$x_1=\frac{-3+1}{2p}=-\frac{1}{p}$，$x_2=\frac{-3-1}{2p}=-\frac{2}{p}$，

∴$x_2=2x_1$，

故③正确；

故答案为①②③.

【点睛】

本题考查了解一元二次方程，根与系数的关系，根的判别式，反比例函数图形上点的坐标特征，正确的理解"倍根方程"的定义是解题的关键.

13．（2021·内蒙古新城·二模）"通过等价变换，化复杂为简单，化陌生为熟悉，化未知为已知"是数学学习中解决问题的基本思维方式．例如：解方程 $x-\sqrt{x}=0$，就可利用该思维方式，设 $\sqrt{x}=y$，将原方程转化为：$y^2-y=0$ 这个熟悉的关于 $y$ 的一元二次方程，解出 $y$，再求 $x$．这种方法又叫"换元法"．请你用这种思维方

式和换元法解决下列问题：

（1）填空：若 2（$x^2+y^2$）$^2$+（$x^2+y^2$）＝0，则 $x^2+y^2$ 的值为_____；

（2）解方程：$x^2-x+2\sqrt{x^2-x}-8=0$.

【答案】（1）0；（2）$x_1=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$

【分析】

（1）设 $x^2+y^2=m\left(m\geq 0\right)$，则原方程可以转变成 $2m^2+m=0$，求出这个一元二次方程即可得到答案；

（2）设 $\sqrt{x^2-x}=t\left(t\geq 0\right)$，则原方程可以转变成 $t^2+2t-8=0$，求出 $t$，再求出 $x$ 即可.

【详解】

解：（1）设 $x^2+y^2=m\left(m\geq 0\right)$，则原方程可以转变成 $2m^2+m=0$

∴ $2m\left(m+1\right)=0$

解得 $m=0$ 或 $m=-1$（舍去）

∴ $m=0$

∴ $x^2+y^2=m=0$

（2）设 $\sqrt{x^2-x}=t\left(t\geq 0\right)$，则原方程可以转变成 $t^2+2t-8=0$

∴ $\left(t+4\right)\left(t-2\right)=0$

解得 $t=2$ 或 $t=-4$（舍去）

∴ $t=2$

∴ $\sqrt{x^2-x}=t=2$

∴ $x^2-x=4$

∴ $x^2-x+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$ 即 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$

解得 $x=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$

∴ $x_1=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$

【点睛】

本题主要考查了用换元法解方程，解题的关键在于能够利用非负性去掉增根，以及熟练掌握解一元二次方

程的方法.

14.（2021·江苏鼓楼·二模）已知关于$x$的一元二次方程$(x-1)(x-2)=m+1$（$m$为常数）.

（1）若它的一个实数根是方程$2(x-1)-4=0$的根，则$m=$_____，方程的另一个根为_____；

（2）若它的一个实数根是关于$x$的方程$2(x-m)-4=0$的根，求$m$的值；

（3）若它的一个实数根是关于$x$的方程$2(x-n)-4=0$的根，求$m+n$的最小值.

【答案】（1）1，$x=0$；（2）$m_1=1$，$m_2=-1$；（3）当$n=-1$时，$m+n$有最小值为-2.

【分析】

(1)求方程 2(*x*-1)-4=0 的根，代入（*x*-1）(*x*-2)=*m*+1 中，确定 *m* 的值；解（*x*-1）(*x*-2)=*m*+1，得到另一个根；

（2）求方程 2(*x*-*m*)-4=0 的根，代入（*x*-1）(*x*-2)=*m*+1 中，确定 *m* 的值；

（3）求方程$2(x-n)-4=0$的根，代入（*x*-1）(*x*-2)=*m*+1 中，用含 *n* 的代数式表示 *m*，构造 *m*+*n* 与 *n* 的二次函数，利用二次函数的性质确定最值.

【详解】

（1）∵2(*x*-1)-4=0，

∴*x*=3，

∴（3-1）(3-2)=*m*+1，

解得 *m*=1，

∴（*x*-1）(*x*-2)=2，

∴ $x^2$-3*x*=0，

∴ $x_1=3,x_2=0$，

故答案为：1，$x=0$.

（2）由$2(x-m)-4=0$，得

$x=2+m$.

则$(2+m-1)(2+m-2)=m+1$

∴ $m^2+m=m+1$，

∴ $m^2=1$，

∴ $m_1=1$，$m_2=-1$.

（3）由$2(x-n)-4=0$，得

$x=2+n$．

则$(2+n-1)(2+n-2)=m+1$．

即$m=n^2+n-1$．

∴$m+n=n^2+2n-1=(n+1)^2-2$；

∴当$n=-1$时，$m+n$有最小值-2．

【点睛】

本题考查了一元一次方程，一元二次方程，二次函数的最值，熟练掌握方程的解法，二次函数的最值是解题的关键．

## 热点2：一元二次方程根的判别式

**一练基础**

1．（2021·山东滨州·中考真题）下列一元二次方程中，无实数根的是（　　）

A．$x^2-2x-3=0$　　B．$x^2+3x+2=0$

C．$x^2-2x+1=0$　　D．$x^2+2x+3=0$

【答案】D

【分析】

计算出各个选项中的Δ的值，然后根据Δ>0有两个不等式的实数根，Δ=0有两个相等实数根，Δ<0无实数根判断即可．

【详解】

解：在$x^2$-2$x$-3=0中，Δ=$b^2$-4$ac$=（-2）$^2$-4×1×（-3）=16>0，即该方程有两个不等实数根，故选项A不符合题意；

在$x^2$+3$x$+2=0中，Δ=$b^2$-4$ac$=$3^2$-4×1×2=1>0，即该方程有两个不等实数根，故选项B不符合题意；

在$x^2$-2$x$+1=0中，Δ=$b^2$-4$ac$=（-2）$^2$-4×1×1=0，即该方程有两个相等实数根，故选项C不符合题意；

在$x^2$+2$x$+3=0中，Δ=$b^2$-4$ac$=$2^2$-4×1×3=-8<0，即该方程无实数根，故选项D符合题意；

故选：D．

【点睛】

本题考查根的判别式，解答本题的关键是明确Δ>0有两个不等式的实数根，Δ=0有两个相等实数根，Δ<0无实数根．

2．（2021·甘肃·古浪县第六中学九年级阶段练习）若关于$x$的一元二次方程$kx^2-2x-1=0$有两个不相等的实

数根，则$k$的取值范围是（　　）

A．$k>-1$　　B．$k>-1$且$k\neq 0$　　C．$k<1$　　D．$k<1$且$k\neq 0$

【答案】B

【分析】

根据一元二次方程的定义和△的意义得到$k\neq 0$且△>0，即（-2）$^2$-4×$k$×（-1）>0，然后解不等式即可得到$k$的取值范围．

【详解】

解：∵关于$x$的一元二次方程$kx^2-2x-1=0$有两个不相等的实数根，

∴$k\neq 0$且△>0，即（-2）$^2$-4×$k$×（-1）>0，

解得$k>-1$且$k\neq 0$．

∴$k$的取值范围为$k>-1$且$k\neq 0$．

故选：B．

【点睛】

本题考查了一元二次方程$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的根的判别式△=$b^2-4ac$：当△>0，方程有两个不相等的实数根；当△=0，方程有两个相等的实数根；当△<0，方程没有实数根．也考查了一元二次方程的定义，掌握根的判别式是解题的关键．

3．已知关于$x$的一元二次方程$(m-1)x^2+x+1=0$有实数根，则$m$的取值范围是（　　）

A．$m\leq\frac{5}{4}$　　B．$m<\frac{5}{4}$且$m\neq 1$　　C．$m\geq\frac{5}{4}$　　D．$m\leq\frac{5}{4}$且$m\neq 1$

【答案】D

【分析】

根据根的判别式和一元二次方程的定义得出不等式组，求出不等式组的解集即可．

【详解】

解：∵关于$x$的一元二次方程$(m-1)x^2+x+1=0$有实数根，

∴$\triangle=1^2-4(m-1)\cdot 1\geq 0$且$m-1\neq 0$，

解得：$m\leq\frac{5}{4}$且$m\neq 1$，

故选：D．

【点睛】

本题考查了根的判别式和一元二次方程的定义，解题的关键是能根据题意得出不等式组的解．

4．（2021·四川内江·中考真题）若关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2+4x-2=0$ 有实数根，则 $a$ 的取值范围为

___.

【答案】$a \geq -2$ 且

【分析】

根据题意可知 $\Delta \geq 0$，代入求解即可.

【详解】

解：一元二次方程 $ax^2+4x-2=0$，

$a=a, b=4, c=-2$，

∵关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2+4x-2=0$ 有实数根，

∴ $\Delta \geq 0$ 且 $a \neq 0$，即 $4^2-4a\times(-2)\geq 0$， $a \neq 0$

解得： $a \geq -2$ 且 $a \neq 0$

故答案为： $a \geq -2$ 且 $a \neq 0$.

【点睛】

本题考查了根的判别式，熟知： $\Delta > 0$，一元二次方程有两个不相等的实数根； $\Delta = 0$，一元二次方程有两个相等的实数根； $\Delta < 0$，方程无实数根，是解题的关键.

5．（2021·广西梧州·中考真题）关于 $x$ 的一元二次方程 $mx^2-2x+1=0$ 有两个不相等的实数根，则实数 $m$ 的取值范围是 ___.

【答案】$m < 1$ 且 $m \neq 0$.

【分析】

由一元二次方程的定义可得 $m \neq 0$，再利用一元二次方程根的判别式列不等式 $\Delta=(-2)^2-4m > 0$, 再解不等式即可得到答案.

【详解】

解：∵ 关于 $x$ 的一元二次方程 $mx^2-2x+1=0$ 有两个不相等的实数根，

$\therefore m \neq 0$ 且 $\Delta=(-2)^2-4m > 0$,

由 $\Delta=(-2)^2-4m > 0$,

可得 $4m < 4$,

$\therefore m < 1$,

综上： $m < 1$ 且 $m \neq 0$，

故答案为：$m<1$且$m\neq 0$.

【点睛】

本题考查的是一元二次方程的定义及一元二次方程根的判别式，掌握利用一元二次方程根的判别式求解字母系数的取值范围是解题的关键.

**二练巩固**

6．（2021·陕西·西安市铁一中学模拟预测）抛物线$y=x^2+2x+a-2$与坐标轴有且仅有两个交点，则$a$的值为（　　）

A．3　　B．2　　C．2或$-3$　　D．2或3

【答案】D

【分析】

抛物线必定与y轴有1个交点，另一个交点在x轴，关键二次函数与一元二次方程的关系解题.

【详解】

解：由题意得，当抛物线与y轴有1个交点，与x轴只有1个交点时，则

$\Delta=b^2-4ac=2^2-4(a-2)=0$

解得$1=a-2$

$\therefore a=3$

当图象过原点并和x轴有2个交点时，则

$0=a-2$

$\therefore a=2$

故选：D.

【点睛】

本题考查二次函数与一元二次方程，是重要考点，掌握相关知识是解题关键.

7．（2021·广东·珠海市九洲中学一模）已知关于$x$的一元二次方程$ax^2-2x+1=0$有两个不相等的实数根，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$a=1$　　B．$a>1$且$a\neq 0$

C．$a<1$且$a\neq 0$　　D．$a\leq 1$或$a\neq 0$

【答案】C

【分析】

由关于$x$的一元二次方程$ax^2-2x+1=0$有两个不相等的实数根，即可得判别式$\Delta>0$以及$a\neq 0$，由此即可求

得 $a$ 的范围.

【详解】

解：$\because$ 关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2-2x+1=0$ 有两个不相等的实数根，

$\therefore \triangle=b^2-4ac=(-2)^2-4\times a\times 1=4-4a>0$，

解得：$a<1$，

$\because$ 方程 $ax^2-2x+1=0$ 是一元二次方程，

$\therefore a\neq 0$，

$\therefore a$ 的范围是：$a<1$ 且 $a\neq 0$.

故选：$C$.

【点睛】

此题考查了一元二次方程判别式的知识．此题比较简单，注意掌握一元二次方程有两个不相等的实数根，即可得$\triangle>0$.

8.（2021·河南洛阳·二模）对于一元二次方程 $x^2-5x+c=0$ 来说，当 $c=\dfrac{25}{4}$ 时，方程有两个相等的实数根，若将 $c$ 的值在 $\dfrac{25}{4}$ 的基础上减小，则此时方程根的情况是（　　）

A．没有实数根　　　　B．有两个相等的实数根

C．有两个不相等的实数根　　　　D．只有一个实数根

【答案】C

【分析】

根据根的判别式即可求出答案.

【详解】

解：由题意可知：△＝25﹣4$c$，

当 $c<\dfrac{25}{4}$ 时，

∴25﹣4$c$＞0，

∴该方程有两个不相等的实数根，

故选：$C$.

【点睛】

本题考查一元二次方程，解题的关键是熟练运用根的判别式，本题属于基础题型.

9.（2019·北京丰台·中考模拟）已知关于 $x$ 的一元二次方程 $x^2-(m+3)x+m+2=0$

（1）求证：方程总有两个实数根；

（2）若方程两个根的绝对值相等，求此时 $m$ 的值．

【答案】（1）见解析；（2）-3 或-1

【分析】

（1）先求出判别式△的值，再对“△”利用完全平方公式变形即可证明；

（2）根据求根公式得出 $x_1=m+2$，$x_2=1$，再由方程两个根的绝对值相等即可求出 $m$ 的值．

【详解】

解：（1）∵ $\Delta=(m+3)^2-4(m+2)=(m+1)^2\geq 0$，

∴方程总有两个实数根；

（2）∵ $x=\dfrac{(m+3)\pm\sqrt{(m+1)^2}}{2}$，

∴ $x_1=m+2$， $x_2=1$．

∵方程两个根的绝对值相等，

∴ $m+2=\pm 1$．

∴ $m=-3$ 或-1．

【点睛】

本题考查的是根的判别式及解一元二次方程，在解答（2）时得到方程的两个根是解题的关键．

10．（2022·福建三明·一模）已知关于 $x$ 的方程 $x^2-5x+m=0$

（1）若方程有一根为 -1，求 $m$ 的值；

（2）若方程无实数根，求 $m$ 的取值范围

【答案】（1）$m$ 的值为 $-6$．（2） $m>\dfrac{25}{4}$

【分析】

（1）将 $x=-1$ 代入原方程，即可求出 $m$ 的值．

（2）令根的判别式 $\varDelta<0$，即可求出 $m$ 的取值范围．

【详解】

（1）解：∵方程有一根为 -1，

$\therefore x=-1$ 是该方程的根，

$\therefore (-1)^2-5\times(-1)+m=0$，解得： $m=-6$，

故 $m$ 的值为 $-6$．

（2）解：∵方程无实数根

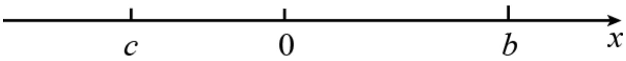
$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times 1\times m < 0$，解得：$m > \frac{25}{4}$．

【点睛】

本题主要是考查了一元二次方程的根以及根的判别式，熟练利用根的判别式，求出对应无实数根的方程中的参数取值，这是解决该题的关键．

**三练拔高**

11．（2021·河南武陟·二模）已知关于 $x$ 的一元二次方程 $2x^2 - bx + c = 0$，其中 $b$，$c$ 在数轴上的对应点如图所示，则这个方程的根的情况是（　　）




A．有两个不相等的实数根　　　　B．有两个相等的实数根

C．无实数根　　　　D．只有一个实数根

【答案】A

【分析】

由数轴可知：$b>0$，$c<0$，然后计算根的判别式的值即可得出答案．

【详解】

由数轴可知：$b>0$，$c<0$；

∴ $\Delta = b^2 - 8c > 0$；

∴有两个不相等的实数根

故选：A

【点睛】

本题主要考查的是一元二次方程的根的判别式，熟练掌握一元二次方程的根的判别式的方法、某点在数轴上的位置确定其正负是解题的关键，属于基础知识题．

12．(2021·云南·昆明市第三中学模拟预测）若关于 $x$ 的不等式组 $\begin{cases} \frac{x-10}{3} \ge 2x \\ 2x-1 < 2a+1 \end{cases}$ 的解集为 $x\le -2$，关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2 - 3x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则符合条件的整数 $a$ 有（　　）个．

A．3　　　　B．4　　　　C．5　　　　D．6

【答案】B

【分析】

求得不等式组的解集可确定 $a>-3$，再根据一元二次方程的定义和判别式的意义得到 $a\neq0$ 且 $\Delta=9-4a>0$，所以 $-3<a<\frac{9}{4}$ 且 $a\neq0$，然后找出此范围内的整数即可．

【详解】

解不等式组 $\begin{cases}\frac{x-10}{3}\geq 2x\\ 2x-1<2a+1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\leq -2\\ x<a+1\end{cases}$，

而此不等式组的解集是 $x\leq-2$，

∴$a+1>-2$，

∴$a>-3$，

∵关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2-3x+1=0$ 有两个不相等的实数根，

∴$\Delta=9-4a>0$ 且 $a\neq0$，

∴ $a<\frac{9}{4}$ 且 $a\neq0$，

∴ $-3<a<\frac{9}{4}$ 且 $a\neq0$，

∴符合条件的整数 $a$ 为－2、－1、1、2 共 4 个．

故选：B．

【点睛】

本题考查了解一元一次不等式组、一元二次方程的定义及其根的判别式，易忽略一元二次方程的二次项系数不为零这个隐含条件．

13．（2021·河北桥东·二模）若 $x$ 比 $(x-1)$ 与 $(x+1)$ 的积小 1，则关于 $x$ 的值，下列说法正确的是（　　）

A．不存在这样 $x$ 的值　　B．有两个相等的 $x$ 的值

C．有两个不相等的 $x$ 的值　　D．无法确定

【答案】C

【分析】

根据题意列出方程，整理为一元二次方程的一般式，然后利用根的判别式即可判断根的情况．

【详解】

解：由题意，得 $(x+1)(x-1)-1=x$，

整理得 $x^2-x-2=0$，

∵ $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-2)=9>0$，

∴方程有两个不相等的实数根，

即 $x_1=2$， $x_2=-1$，

故选 *C*．

【点睛】

本题主要考查列一元二次方程与一元二次方程根的判别式，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根与 $\Delta=b^2-4ac$ 有如下关系：①当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根；②当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根；③当 $\Delta<0$ 时，方程无实数根；上面结论反过来也成立．

14．（2022·全国·九年级）对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$，下列说法：

①若 $a+b+c=0$，则 $b^2-4ac\geq 0$；

②若方程 $ax^2+c=0$ 有两个不相等的实根，则方程 $ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$ 必有两个不相等的实根；

③若 $c$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，则一定有 $ac+b+1=0$ 成立；

④若 $x_0$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，则 $b^2-4ac=\left(2ax_0+b\right)^2$．

其中正确的有（　　）

A．1个　　　　B．2个　　　　C．3个　　　　D．4个

【答案】C

【分析】

按照方程的解的含义、一元二次方程的实数根与判别式的关系、等式的性质、一元二次方程的求根公式等对各选项分别讨论，可得答案．

【详解】

解：①若 $a+b+c=0$，则 $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解，

由一元二次方程的实数根与判别式的关系可知：$\Delta=b^2-4ac\geq 0$，故①正确；

②方程 $ax^2+c=0$ 有两个不相等的实根，

∴$\Delta=0-4ac>0$，

∴$-4ac>0$

则方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$，

∴方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有两个不相等的实根，故②正确；

③∵$c$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，

则 $ac^2+bc+c=0$，