2024-2025学年上海市杨浦区高三上学期期中考试数学检测试题

一、填空题（本大题共有12题，满分54分，第1-6题每题4分，第7-12题每题5分）

1. 不等式$x^2+2x-3<0$的解集是________.（结果用区间表示）

2. 已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\{x\mid x<1\}$，$B=\{x\mid -1<x<3\}$；则$\overline{A\cup B}=$________.（结果用区间表示）

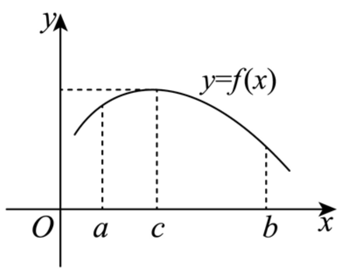
3. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x>0\\ x^2, x\le 0\end{cases}$，则$f(f(-\frac{1}{2}))=$______，

4. 函数$f(x)=2\sin^2 x+\sin 2x$的最小正周期为_______.

5. 已知向量$\vec{a}=(2,m)$，$\vec{b}=(m+1,1)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则$m=$__________.

6. 在二项式$\left(\boldsymbol{x}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2x}}\right)^8$的展开式中，前三项的系数依次成________数列.（填写“等差”或“等比”）

7. 已知函数$f(x)$的导数存在，$y=f(x)$的部分图像如图所示，设$S(t)(a\le t\le b)$是由曲线$y=f(x)$与直线$x=a$，$x=t$及x轴围成的平面图形的面积，则在区间$[a,b]$上，$S'(t)$的最大值在$t=$________处取到.



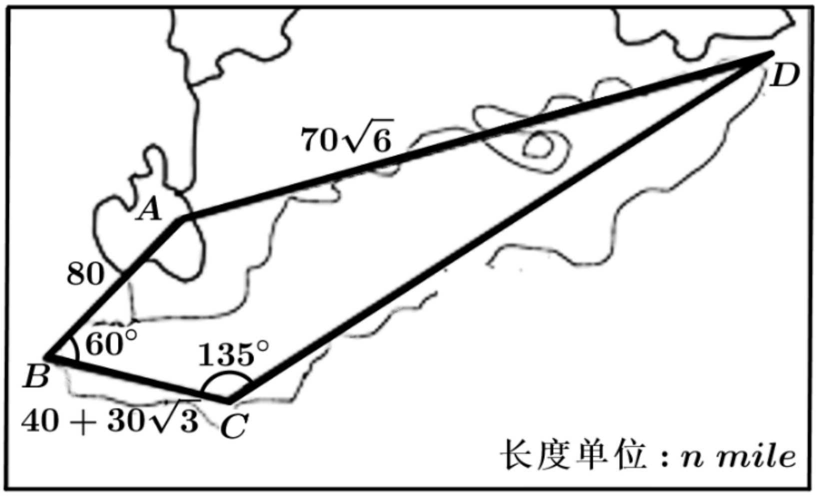
8. 班级4名学生报名参加两项区学科竞赛，每人至少报一项，每项比赛参加的人数不限，则不同的报名结果有________种.（结果用具体数字表示）

9. 过抛物线$y^2=2x$的焦点F，倾斜角为$\frac{\pi}{4}$的直线l交抛物线于A,B（$x_A>x_B$），则$\frac{|AF|}{|BF|}$的值__________.

10. 为了提升全民身体素质，学校十分重视学生体育锻炼，某校篮球运动员进行投篮练习.

如果他前一球投进则后一球投进的概率为$\dfrac{4}{5}$；如果他前一球投不进则后一球投进的概率为$\dfrac{1}{2}$.若他第 2 球投进的概率为$\dfrac{29}{40}$，则他第 1 球投进的概率为__________.

11. 某沿海四个城市A,B,C,D的位置如图所示，其中$\angle ABC=60^\circ$，$\angle BCD=135^\circ$，$AB=80$ mile，$BC=40+30\sqrt{3}$ mile，$AD=70\sqrt{6}n$ mile，D位于A的北偏东75°方向.现在有一艘轮船从A出发向直线航行，一段时间到达D后，轮船收到指令改向城市C直线航行，收到指令时城市C对于轮船的方位角是南偏西θ度，则$\sin\theta=$_________.



12. 已知空间单位向量$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$，$\vec{e_4}$，$\left|\vec{e_1}+\vec{e_2}\right|=\left|\vec{e_3}+\vec{e_4}\right|=2\left|\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}+\vec{e_4}\right|=1$，则$\vec{e_1}\cdot\vec{e_3}$的最大值是________.

二、选择题（本大题共 4 题，满分 18 分，第 13-14 题每题 4 分，第 15-16 题每题 5 分）.

13. 函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x},x\le 0\\ \mathrm{e}^{-x},x>0\end{cases}$是（　　）

A. 偶函数，且没有极值点　　　　B. 偶函数，且有一个极值点

C. 奇函数，且没有极值点　　　　D. 奇函数，且有一个极值点

14. 已知$a>0$，$b>0$，则“$a+b>2$”是“$ab>1$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

15. 设等比数列$\left\{a_n\right\}$的公比为q，前n项和为S_n，若$a_3=2$，$S_4=5S_2$，则符合条件的数列

$\{a_n\}$的个数是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

16. 已知$f(z)=z^{10}+z^{-10}+\frac{1}{2}(z^5+z^{-5}), z\in\mathbf{C}$，则下列结论正确的个数是（　　）

①$f(z)=0$存在实数解；

②$f(z)=0$共有20个不同的复数解；

③$f(z)=0$复数解的模长都等于1；

④$f(z)=0$存在模长大于1的复数解.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

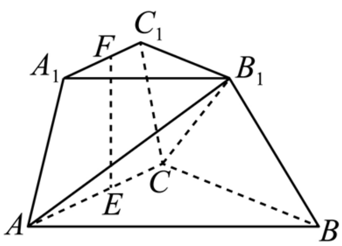
三、解答题（满分78分，共有5题）.

17. 已知函数$f(x)=\frac{a-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$为奇函数.

（1）求a的值并直接写出$f(x)$的单调性（无需说明理由）；

（2）若存在实数t，使得$f(t^2-2t)+f(2t^2-k)>0$成立，求实数k的取值范围.

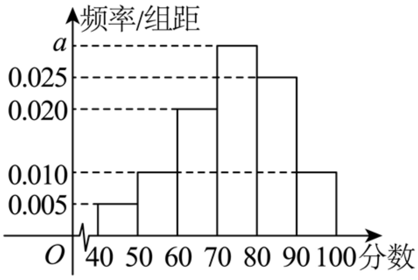
18. 如图所示，已知三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB_1\perp BB_1$，$CB_1\perp BB_1$，$\angle ABB_1=\angle CBB_1=60°$，$AB\perp BC$，$BB_1=1$.



（1）求二面角$A-BB_1-C$的余弦值；

（2）设E、F分别是棱AC、A_1C_1的中点，若$EF\perp$平面ABC，求棱台$ABC-A_1B_1C_1$的体积.

19. 某市为提高市民对文明城市创建的认识，举办了“创建文明城市”知识竞赛，从所有答卷中随机抽取100份作为样本，将样本的成绩（满分100分，成绩均为不低于40分的整数）分成六段：$[40,50),[50,60),...,[90,100]$，得到如图所示的频率分布直方图.

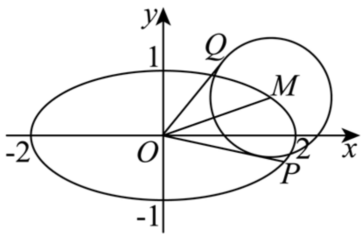


（1）求频率分布直方图中 a 的值；

（2）求样本成绩的 P_{75}；

（3）已知落在[50,60)的平均成绩是 54，方差是 7，落在[60,70)的平均成绩为 66，方差是 4，求两组成绩的总平均数 $\overline{z}$ 和总方差 s^2.

20. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，该点 $M\left(x_0, y_0\right)$ 是椭圆 $C: \frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上一点，从原点 O 向圆 $M:\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=r^2$ 作两条切线分别与椭圆 C 交于点 P，Q，直线 OP、OQ 的斜率分别记为 k_1，k_2.



（1）若圆 M 与 x 轴相切于椭圆 C 的右焦点，求圆 M 的方程；

（2）若 $r=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，求证 k_1k_2 为定值并求出该定值；

（3）在（2）的情况下，求 $|OP|\cdot|OQ|$ 的最大值.

21. 已知 $a>0$，函数 $f\left(x\right)=ax\sin x, g\left(x\right)=2\sin^2\frac{ax}{2}, x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

（1）当 $a=2$ 时，证明：$f\left(x\right)>g\left(x\right)$；

（2）若 $f\left(x\right)>g\left(x\right)$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（3）设集合 $A=\left\{a_n \middle| a_n=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{2k\left(k+1\right)}, n\in\mathbf{N}^*\right\}$，对于正整数 m，集合

$B_m = \left\{ x \middle| m < x < 2m \right\}$，记 $A \cap B_m$ 中元素的个数为 b_m，求数列 $\left\{ b_m \right\}$ 的通项公式.

2024-2025学年上海市杨浦区高三上学期期中考试数学检测试题

一、填空题（本大题共有12题，满分54分，第1-6题每题4分，第7-12题每题5分）

1. 不等式$x^2+2x-3<0$的解集是________.（结果用区间表示）

【正确答案】$\left(-3,1\right)$

【分析】利用分解因式的方法求解不等式.

【详解】不等式$x^2+2x-3<0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1)<0$，解得$-3<x<1$，

所以不等式$x^2+2x-3<0$的解集为$\left(-3,1\right)$.

故$\left(-3,1\right)$

2. 已知全集$U=\mathbf{R}$，集合$A=\left\{x\mid x<1\right\}$，$B=\left\{x\mid -1<x<3\right\}$；则$\overline{A\cup B}=$________.（结果用区间表示）

【正确答案】$\left[3,+\infty\right)$

【分析】根据集合的运算可求得结果.

【详解】由题可得$A\cup B=\left\{x\mid x<3\right\}$，

则$\overline{A\cup B}=\left\{x\mid x\geq 3\right\}=\left[3,+\infty\right)$，

故答案为.$\left[3,+\infty\right)$

3. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\log_2 x, x>0\\ x^2, x\leq 0\end{cases}$，则$f(f(-\frac{1}{2}))=$______，

【正确答案】-2

【分析】推导出$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，从而$f\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)$，由此能求出结果.

【详解】解：$\because$函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\log_2 x, x>0\\ x^2, x\leq 0\end{cases}$，

$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}$，

$f\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=\log_{2}\frac{1}{4}=-2$．

故答案为-2．

本题主要考查了函数值的求法，考查函数的性质等基础知识，考查运算求解能力，考查方程思想，是基础题.

4. 函数$f(x)=2\sin^{2}x+\sin 2x$的最小正周期为_______.

【正确答案】π

【分析】将三角函数进行降次，然后通过辅助角公式化为一个名称，最后利用周期公式得到结果.

【详解】$\because f\left(x\right)=1-\cos 2x+\sin 2x=1+\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，$\therefore T=\frac{2\pi}{2}=\pi$．

本题主要考查二倍角公式，及辅助角公式，周期的运算，难度不大.

5. 已知向量$\vec{a}=(2,m)$，$\vec{b}=(m+1,1)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则$m=$_________.

【正确答案】1或-2

【分析】根据平面向量共线坐标表示公式进行求解即可.

【详解】因为$\vec{a}//\vec{b}$，

所以有$m\left(m+1\right)=2\times 1\Rightarrow m=1$，或$m=-2$，

故1或-2

6. 在二项式$\left(\boldsymbol{x}+\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2x}}\right)^{8}$的展开式中，前三项的系数依次成________数列.（填写"等差"或"等比"）

【正确答案】等差

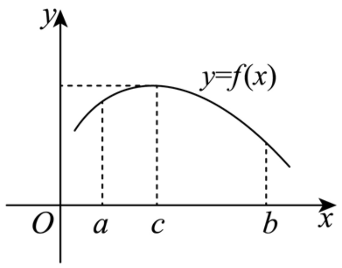
【分析】根据二项展开式写出前三项的系数，再由等差数列的定义即可判断.

【详解】由二项展开式知，前三项的系数分别为$C_8^0=1,\frac{1}{2}C_8^1=4,\frac{1}{4}C_8^2=7$，

所以前三项的系数依次成等差数列.

故等差.

7. 已知函数$f(x)$的导数存在，$y=f(x)$的部分图像如图所示，设$S(t)(a\le t\le b)$是由曲线$y=f(x)$与直线$x=a$，$x=t$及x轴围成的平面图形的面积，则在区间$[a,b]$上，$S'(t)$的最大值在$t=$________处取到.



【正确答案】c

【分析】根据图象，利用导数的定义可求得结果.

【详解】由导数的定义得，

$$S'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t\cdot f(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}f(t)=f(t),$$

所以$S'(t)$的最大值就是$f(t)$的最大值，

从图象上看，$f(x)$在$x=c$处取得最大值，

故答案为.c

8. 班级4名学生报名参加两项区学科竞赛，每人至少报一项，每项比赛参加的人数不限，则不同的报名结果有________种.（结果用具体数字表示）

【正确答案】81

【分析】由分类计数原理、分步计数原理即可求解.

【详解】每名学生可报一项或两项，所以有$C_2^1+C_2^2=3$，

所以4名学生共有$3\times3\times3\times3=81$种.

故81

9. 过抛物线 $y^2=2x$ 的焦点 F，倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线 l 交抛物线于 A,B（$x_A>x_B$），则 $\frac{|AF|}{|BF|}$ 的值__________.

【正确答案】$3+2\sqrt{2}$

【分析】求出抛物线的焦点坐标，利用点斜式设出直线方程，直线与抛物线联立求出交点坐标，利用焦半径公式求出 $|AF|$，$|BF|$ 的长，从而可得结果

【详解】由 $y^2=2x$ 得 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$，直线 $l:y=x-\frac{1}{2}$，

直线与抛物线联立可得，$x^2-3x+\frac{1}{4}=0$，

$x_A=\frac{3+2\sqrt{2}}{2},x_B=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$，

由抛物线定义转化为到准线的距离可得，

$|AF|=x_A+\frac{1}{2}=2+\sqrt{2}$，$|BF|=x_B+\frac{1}{2}=2-\sqrt{2}$，

$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$，故答案为 $3+2\sqrt{2}$.

与焦点、准线有关的问题一般情况下都与抛物线的定义有关，解决这类问题一定要注意点到点的距离与点到直线的距离的转化：（1）将抛线上的点到准线距离转化为该点到焦点的距离；(2)将抛物线上的点到焦点的距离转化为到准线的距离，使问题得到解决.

10. 为了提升全民身体素质，学校十分重视学生体育锻炼，某校篮球运动员进行投篮练习.如果他前一球投进则后一球投进的概率为 $\frac{4}{5}$；如果他前一球投不进则后一球投进的概率为 $\frac{1}{2}$.若他第2球投进的概率为 $\frac{29}{40}$，则他第1球投进的概率为__________.

【正确答案】$\frac{3}{4}$##0.75

【分析】记事件A为“第1球投进”，事件 B 为“第2球投进”，设 $P(A)=p$

，由全概率公式求解即可得出答案.

【详解】记事件 A 为“第 1 球投进”，事件 B 为“第 2 球投进”，

$P(B|A)=\dfrac{4}{5},P(B|\overline{A})=\dfrac{1}{2},P(A)=p$，

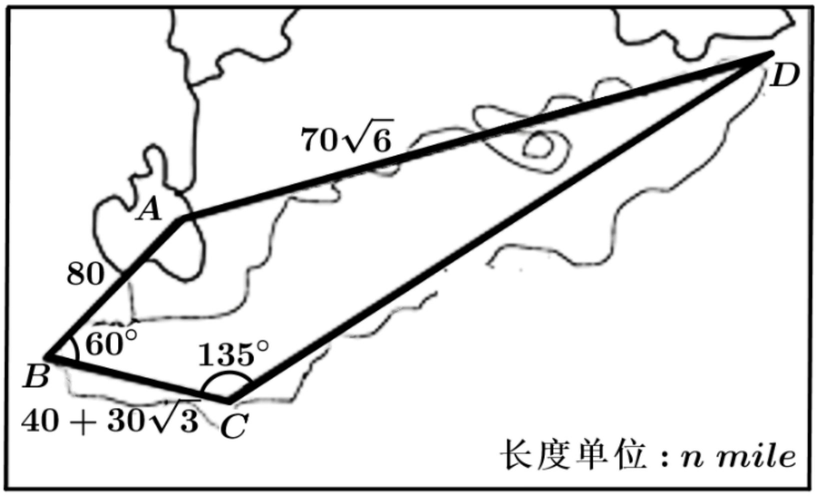
由全概率公式可得 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\dfrac{4}{5}p+\dfrac{1}{2}(1-p)=\dfrac{29}{40}$.

解得. $p=\dfrac{3}{4}$

故答案为. $\dfrac{3}{4}$

11. 某沿海四个城市 A,B,C,D 的位置如图所示，其中 $\angle ABC=60^{\circ}$，$\angle BCD=135^{\circ}$，

$AB=80$mile，$BC=40+30$ mile，$AD=70\sqrt{6}n$ mile，D 位于 A 的北偏东 75° 方向.现在有一艘轮船从 A 出发向直线航行，一段时间到达 D 后，轮船收到指令改向城市 C 直线航行，收到指令时城市 C 对于轮船的方位角是南偏西 θ 度，则 $\sin\theta=$________.



【正确答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】求出 AC，计算 $\angle ACD$，利用正弦定理再计算 $\angle ADC$，故而 $\theta=75^{\circ}-\angle ADC$.

【详解】解：连结 AC，

在 ΔABC 中，由余弦定理得：

$AC^2=6400+(40+30\sqrt{3})^2-2\times80\times(40+30\sqrt{3})\times\dfrac{1}{2}=7500$，

$\therefore AC=50\sqrt{3}$，

由正弦定理得$\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$，即$\dfrac{80}{\sin\angle ACB}=\dfrac{50\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，

解得$\sin\angle ACB=\dfrac{4}{5}$，$\therefore\cos\angle ACB=\dfrac{3}{5}$，

$\therefore\sin\angle ACD=\sin(135^\circ-\angle ACB)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$，

在ΔACD中，由正弦定理得$\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}$，即$\dfrac{50\sqrt{3}}{\sin\angle ADC}=\dfrac{70\sqrt{6}}{\frac{7\sqrt{2}}{10}}$，

解得$\sin\angle ADC=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\angle ADC=30^\circ$，

$\therefore\sin\theta=\sin(75^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

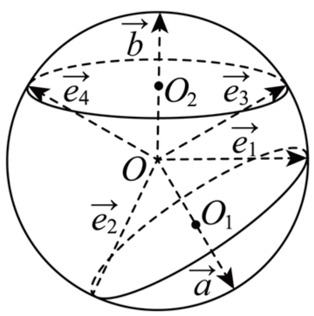
12. 已知空间单位向量$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$，$\vec{e}_4$，$\left|\vec{e}_1+\vec{e}_2\right|=\left|\vec{e}_3+\vec{e}_4\right|=2\left|\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3+\vec{e}_4\right|=1$，则$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3$的最大值是________.

【正确答案】$\dfrac{7+3\sqrt{5}}{16}$

【分析】根据题意在球中讨论，结合空间向量数量积的应用可求出最值.

【详解】因为空间向量$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$，$\vec{e}_4$是单位向量，

所以把向量$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$，$\vec{e}_4$平移到以O为起点，终点在半径为1的球面上，如图：



由$\left|\vec{e}_1+\vec{e}_2\right|=1$，得$\vec{e}_1^{\,2}+\vec{e}_2^{\,2}+2\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=1$，所以$\vec{e}_1,\vec{e}_2=120^\circ$，同理$\vec{e}_3,\vec{e}_4=120^\circ$，