

2022-2023 学年山东省德州市武城县第二中学高三 4 月模拟考试数学试题

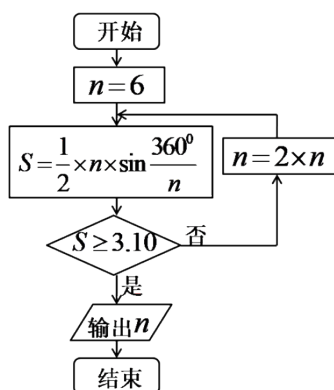
考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

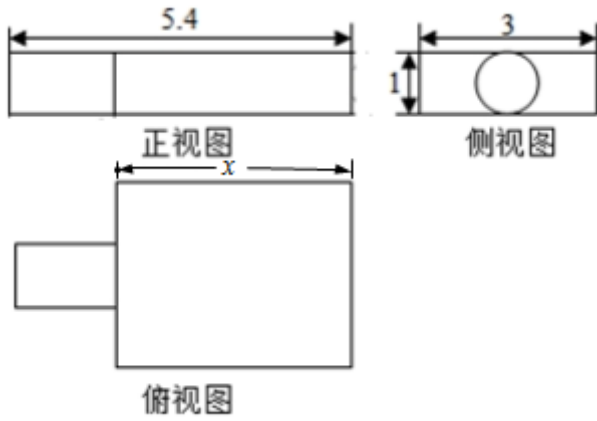
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 公元 263 年左右，我国数学家刘徽发现当圆内接正多边形的边数无限增加时，多边形面积可无限逼近圆的面积，并创立了“割圆术”，利用“割圆术”刘徽得到了圆周率精确到小数点后两位的近似值 3.14，这就是著名的“徽率”。如图是利用刘徽的“割圆术”思想设计的一个程序框图，则输出的 n 值为（ ）（参考数据：

$$\sqrt{3} \approx 1.732, \sin 15^\circ \approx 0.2588, \sin 75^\circ \approx 0.9659$$



- A. 48 B. 36 C. 24 D. 12
2. 已知斜率为 k 的直线 l 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点，线段 AB 的中点为 $M(1, m) (m > 0)$ ，则斜率 k 的取值范围是（ ）
- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$
3. 设 $(1+i)a = 1+bi$ ，其中 a, b 是实数，则 $|a+2bi| =$ （ ）
- A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$
4. 中国古代数学名著《九章算术》中记载了公元前 344 年商鞅督造的一种标准量器——商鞅铜方升，其三视图如图所示（单位：寸），若 π 取 3，当该量器口密闭时其表面积为 42.2（平方寸），则图中 x 的值为（ ）



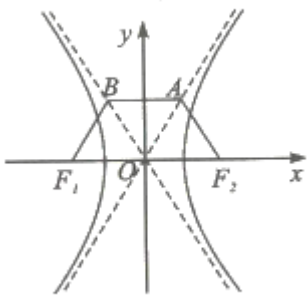
- A. 3 B. 3.4 C. 3.8 D. 4

5. 设 i 是虚数单位, 若复数 $a + \frac{5i}{2+i}$ ($a \in \mathbf{R}$) 是纯虚数, 则 a 的值为 ()

- A. -3 B. 3 C. 1 D. -1

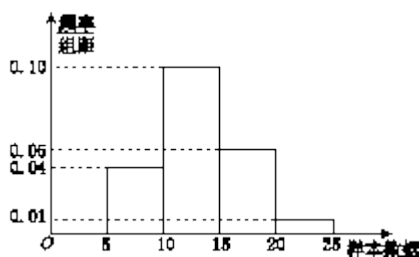
6. 如图, 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左, 右焦点分别是 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 直线 $y = \frac{bc}{2a}$ 与双曲线 C 的两

条渐近线分别相交于 A, B 两点. 若 $\angle BF_1F_2 = \frac{\pi}{3}$, 则双曲线 C 的离心率为 ()



- A. 2 B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
- C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

7. 某个小区住户共 200 户, 为调查小区居民的 7 月份用水量, 用分层抽样的方法抽取了 50 户进行调查, 得到本月的用水量(单位: m^3)的频率分布直方图如图所示, 则小区内用水量超过 15 m^3 的住户的户数为()



- A. 10 B. 50 C. 60 D. 140

8. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦点分别为 F_1, F_2 , 其中焦点 F_2 与抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点重合, 且椭圆与抛物线的两个交点连线正好过点 F_2 , 则椭圆的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2} - 1$ C. $3 - 2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3} - 1$

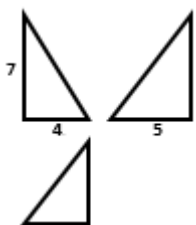
9. $(x+1)(2x+1)(3x+1)\cdots(nx+1) (n \in \mathbb{N}^*)$ 的展开式中 x 的一次项系数为 ()

- A. C_n^3 B. C_{n+1}^2 C. C_n^{n-1} D. $\frac{1}{2} C_{n+1}^3$

10. 已知 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x+1)} - 1, & -1 < x < 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$, 若方程 $f(x) - 2ax = a - 1$ 有唯一解, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\{-8\} \cup (1, +\infty)$ B. $\{-16\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup (2, +\infty)$
 C. $\{-8\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup (2, +\infty)$ D. $\{-32\} \cup [1, 2] \cup (4, +\infty)$

11. 我国古代数学名著《九章算术》有一问题: “今有鳖臑(*biē nàò*), 下广五尺, 无袤; 上袤四尺, 无广; 高七尺. 问积几何?” 该几何体的三视图如图所示, 则此几何体外接球的表面积为 ()



- A. 90π 平方尺 B. 180π 平方尺
 C. 360π 平方尺 D. $135\sqrt{10}\pi$ 平方尺

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 设 $c_n = a_{b_n}$, $T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 则当 $T_n < 2020$ 时, n 的最大值是 ()

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

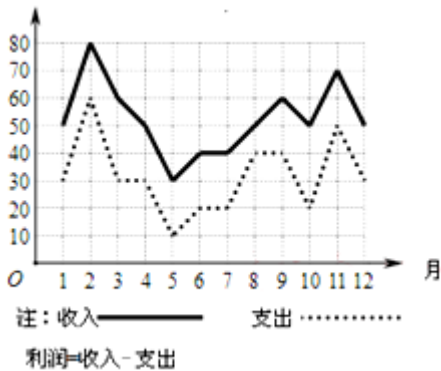
13. 已知 O 为矩形 $ABCD$ 的对角线的交点，现从 A, B, C, D, O 这 5 个点中任选 3 个点，则这 3 个点不共线的概率为 _____.

14. 根据如图所示的伪代码，若输入的 x 的值为 2，则输出的 y 的值为 _____.

```

Read x
If x > 2 then
    y ← 3x - 4
Else
    y ← 2^{x-2}
End If
Print y
    
```

15. 某商场一年中各月份的收入、支出情况的统计如图所示，下列说法中正确的是 _____.



- ① 2 至 3 月份的收入的变化率与 11 至 12 月份的收入的变化率相同；
- ② 支出最高值与支出最低值的比是 6:1；
- ③ 第三季度平均收入为 50 万元；
- ④ 利润最高的月份是 2 月份.

16. 甲、乙两队参加关于“一带一路”知识竞赛，甲队有编号为 1, 2, 3 的三名运动员，乙队有编号为 1, 2, 3, 4 的四名运动员，若两队各出一名队员进行比赛，则出场的两名运动员编号相同的概率为 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 曲线 C_1 的参数方程为
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \cos \varphi \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \varphi \end{cases} \quad (\varphi \text{ 为参数}),$$
 以原点 O 为极点， x 轴的正半轴为极轴的极坐标系

中，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \cos^2 \theta = 3 \sin \theta$.

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2) 若直线 $l: y = kx$ 与曲线 C_1, C_2 的交点分别为 A, B (A, B 异于原点)，当斜率 $k \in [\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}]$ 时，求 $|OA| + \frac{1}{|OB|}$

的最小值.

18. (12分) 已知在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases} x=2-t \\ y=2+t \end{cases}$ (t 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴

的非负半轴为极轴且取相同的单位长度建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho = \cos\theta(\rho \cos\theta + 2)$.

(1) 求曲线 C_1 与直线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 若曲线 C_1 与直线 C_2 交于 A, B 两点, 求 $|AB|$ 的值.

19. (12分) 已知函数 $f(x) = e^x - \frac{k}{2}x^2$ 有两个极值点 x_1, x_2 .

(1) 求实数 k 的取值范围;

(2) 证明: $\frac{f(x_1)}{x_1} + \frac{f(x_2)}{x_2} < k$.

20. (12分) 已知函数 $f(x) = (1 + \sqrt{3} \tan x) \cos^2 x$.

(I) 若 α 是第二象限角, 且 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 求 $f(\alpha)$ 的值;

(II) 求函数 $f(x)$ 的定义域和值域.

21. (12分) 高铁和航空的飞速发展不仅方便了人们的出行, 更带动了我国经济的巨大发展. 据统计, 在 2018 年这一年内从 A 市到 B 市乘坐高铁或飞机出行的成年人约为 50 万人次. 为了了解乘客出行的满意度, 现从中随机抽取 100 人次作为样本, 得到下表(单位: 人次):

| 满意度 | 老年人 | | 中年人 | | 青年人 | |
|---------|------|------|------|------|------|------|
| | 乘坐高铁 | 乘坐飞机 | 乘坐高铁 | 乘坐飞机 | 乘坐高铁 | 乘坐飞机 |
| 10分(满意) | 12 | 1 | 20 | 2 | 20 | 1 |
| 5分(一般) | 2 | 3 | 6 | 2 | 4 | 9 |
| 0分(不满意) | 1 | 0 | 6 | 3 | 4 | 4 |

(1) 在样本中任取 1 个, 求这个出行人恰好不是青年人的概率;

(2) 在 2018 年从 A 市到 B 市乘坐高铁的所有成年人中, 随机选取 2 人次, 记其中老年人出行的人次为 X . 以频率作为概率, 求 X 的分布列和数学期望;

(3) 如果甲将要从 A 市出发到 B 市, 那么根据表格中的数据, 你建议甲是乘坐高铁还是飞机? 并说明理由.

22. (10分) [选修4-4: 极坐标与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cos \alpha \\ y = \sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$ (α 是参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴的正半轴

为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4 \sin \theta$.

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 若射线 $\theta = \beta$ ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) 与曲线 C_1 交于 O, A 两点, 与曲线 C_2 交于 O, B 两点, 求 $|OA| + |OB|$ 取最大值时

$\tan \beta$ 的值

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

由 $n = 6$ 开始, 按照框图, 依次求出 s , 进行判断。

【详解】

$$n = 6 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \times 6 \sin 60^\circ \approx 2.598, n = 12 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \times 12 \sin 30^\circ = 3,$$

$$n = 24 \Rightarrow s = \frac{1}{2} \times 24 \sin 15^\circ \approx 3.1058, \text{ 故选 C.}$$

【点睛】

框图问题, 依据框图结构, 依次准确求出数值, 进行判断, 是解题关键。

2、C

【解析】

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 设直线 l 的方程为: $y = kx + b$, 与抛物线方程联立, 由 $\Delta > 0$ 得 $kb < 1$, 利用韦达定理结

合已知条件得 $b = \frac{2-k^2}{k}$, $m = \frac{2}{k}$, 代入上式即可求出 k 的取值范围。

【详解】

设直线 l 的方程为: $y = kx + b$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

联立方程 $\begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = 4x \end{cases}$ ，消去 y 得： $k^2x^2 + (2kb - 4)x + b^2 = 0$ ，

$$\therefore \Delta = (2kb - 4)^2 - 4k^2b^2 > 0,$$

$$\therefore kb < 1,$$

$$\text{且 } x_1 + x_2 = \frac{4 - 2kb}{k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{b^2}{k^2},$$

$$y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2b = \frac{4}{k},$$

Q 线段 AB 的中点为 $M(1, m)$ ($m > 0$),

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{4 - 2kb}{k^2} = 2, \quad y_1 + y_2 = \frac{4}{k} = 2m,$$

$$\therefore b = \frac{2 - k^2}{k}, \quad m = \frac{2}{k},$$

Q $m > 0$,

$$\therefore k > 0,$$

把 $b = \frac{2 - k^2}{k}$ 代入 $kb < 1$ ，得 $2 - k^2 < 1$ ，

$$\therefore k^2 > 1,$$

$$\therefore k > 1,$$

故选：C

【点睛】

本题主要考查了直线与抛物线的位置关系，考查了韦达定理的应用，属于中档题.

3、D

【解析】

根据复数相等，可得 a, b ，然后根据复数模的计算，可得结果.

【详解】

由题可知： $(1 + i)a = 1 + bi$ ，

即 $a + ai = 1 + bi$ ，所以 $a = 1, b = 1$

$$\text{则 } |a + 2bi| = |1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

故选：D

【点睛】

本题考查复数模的计算，考验计算，属基础题.

4、D

【解析】

根据三视图即可求得几何体表面积，即可解得未知数.

【详解】

由图可知，该几何体是由一个长宽高分别为 $x, 3, 1$ 和

一个底面半径为 $\frac{1}{2}$ ，高为 $5.4 - x$ 的圆柱组合而成.

该几何体的表面积为

$$2(x + 3x + 3) + \pi \cdot (5.4 - x) = 42.2,$$

解得 $x = 4$,

故选：D.

【点睛】

本题考查由三视图还原几何体，以及圆柱和长方体表面积的求解，属综合基础题.

5、D

【解析】

整理复数为 $b + ci$ 的形式，由复数为纯虚数可知实部为 0，虚部不为 0，即可求解.

【详解】

$$\text{由题, } a + \frac{5i}{2+i} = a + \frac{5i(2-i)}{(2+i)(2-i)} = a + 2i + 1 = (a+1) + 2i,$$

因为纯虚数，所以 $a + 1 = 0$ ，则 $a = -1$ ，

故选：D

【点睛】

本题考查已知复数的类型求参数范围，考查复数的除法运算.

6、A

【解析】

易得 $B(-\frac{c}{2}, \frac{bc}{2a})$ ，过 B 作 x 轴的垂线，垂足为 T ，在 $\triangle F_1TB$ 中，利用 $\frac{BT}{F_1T} = \tan \frac{\pi}{3}$ 即可得到 a, b, c 的方程.

【详解】

由已知，得 $B(-\frac{c}{2}, \frac{bc}{2a})$ ，过 B 作 x 轴的垂线，垂足为 T ，故 $F_1T = \frac{c}{2}$ ，

又 $\angle BF_1F_2 = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\frac{BT}{F_1T} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, 即 $\frac{\frac{bc}{2}}{\frac{b}{a}} = \sqrt{3}$,

所以双曲线 C 的离心率 $e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = 2$.

故选: A.

【点睛】

本题考查双曲线的离心率问题, 在作双曲线离心率问题时, 最关键的是找到 a, b, c 的方程或不等式, 本题属于容易题.

7、C

【解析】

从频率分布直方图可知, 用水量超过 15m^3 的住户的频率为 $(0.05 + 0.01) \times 5 = 0.3$, 即分层抽样的 50 户中有 $0.3 \times 50 = 15$

户住户的用水量超过 15 立方米

所以小区内用水量超过 15 立方米的住户户数为 $\frac{15}{50} \times 200 = 60$, 故选 C

8、B

【解析】

根据题意可得易知 $c = \frac{p}{2}$, 且 $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{p^2}{4} \\ p^2 b^2 + 4p^2 a^2 = 4a^2 b^2 \end{cases}$, 解方程可得 $\begin{cases} a^2 = \frac{2\sqrt{2}+3}{4} p^2 \\ b^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} p^2 \end{cases}$, 再利用 $e^2 = \frac{c^2}{a^2}$ 即可求解.

【详解】

易知 $c = \frac{p}{2}$, 且 $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{p^2}{4} \\ p^2 b^2 + 4p^2 a^2 = 4a^2 b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{2\sqrt{2}+3}{4} p^2 \\ b^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} p^2 \end{cases}$

故有 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 3 - 2\sqrt{2}$, 则 $e = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

故选: B

【点睛】

本题考查了椭圆的几何性质、抛物线的几何性质, 考查了学生的计算能力, 属于中档题

9、B

【解析】

根据多项式乘法法则得出 x 的一次项系数, 然后由等差数列的前 n 项和公式和组合数公式得出结论.

【详解】

由题意展开式中 x 的一次项系数为 $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2$.

故选: B.

【点睛】

本题考查二项式定理的应用, 应用多项式乘法法则可得展开式中某项系数. 同时本题考查了组合数公式.

10、B

【解析】

求出 $f(x)$ 的表达式, 画出函数图象, 结合图象以及二次方程实根的分布, 求出 a 的范围即可.

【详解】

解: 令 $-1 < x < 0$, 则 $0 < x+1 < 1$,

$$\text{则 } f(x+1) = \frac{x+1}{2},$$

$$\text{故 } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} - 1, & -1 < x < 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 1 \end{cases}, \text{ 如图示:}$$

$$\text{由 } f(x) - 2ax = a - 1,$$

$$\text{得 } f(x) = a(2x+1) - 1,$$

$$\text{函数 } y = a(2x+1) - 1 \text{ 恒过 } A(-\frac{1}{2}, -1),$$

$$\text{由 } B(1, \frac{1}{2}), C(0, 1),$$

$$\text{可得 } k_{AB} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 + \frac{1}{2}} = 1, k_{OA} = 2, k_{AC} = \frac{1+1}{\frac{1}{2}} = 4,$$

若方程 $f(x) - 2ax = a - 1$ 有唯一解,

$$\text{则 } 1 < 2a, 2 \text{ 或 } 2a > 4, \text{ 即 } \frac{1}{2} < a, 1 \text{ 或 } a > 2;$$

$$\text{当 } 2ax + a - 1 = \frac{2}{x+1} - 1 \text{ 即图象相切时,}$$

$$\text{根据 } \Delta = 0, 9a^2 - 8a(a-2) = 0,$$

$$\text{解得 } a = -16(0 \text{ 舍去}),$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/696102042055010121>