第 09 讲 平面直角坐标系（精讲精练）

学习目标

1. 用有序数对表示物体的位置
2. 平面直角坐标系的有关概念
3. 画出直角坐标系；根据坐标描出点的位置、由点的位置写出它的坐标
4. 建立适当的直角坐标系，描述物体的位置
5. 对给定的正方形，选择适当的直角坐标系，写出它的顶点坐标
6. 在平面上，用方位角和距离刻画两个物体的相对位置
7. 在直角坐标系中，以坐标轴为对称轴，写出一个已知顶点坐标的多边形的对称图形的顶点坐标
8. 在直角坐标系中，以坐标轴为对称轴，对称点坐标之间的关系
9. 在直角坐标系中，一个点沿坐标轴方向平移后的坐标与原坐标之间的关系
10. 探索简单实例中的数量关系和变化规律，了解常量、变量的意义
11. 结合实例，了解函数的概念和三种表示法，能举出函数的实例。
12. 能结合图像对简单实际问题中的函数关系进行分析。
13. 能确定简单实际问题中函数自变量的取值范围，并会求出函数值。
14. 能用适当的函数表示法刻画简单实际问题中变量之间的关系
15. 结合对函数关系的分析，能对变量的变化情况进行初步讨论

考点导航

知识梳理

考点 1.1：平面直角坐标系中的坐标特征

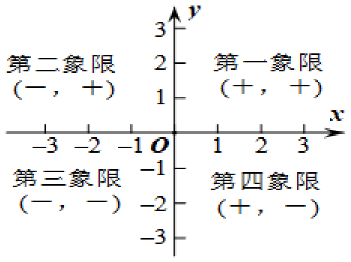
（1）各象限内点的坐标的符号特征（如图所示）：

点 $P(x,y)$在第一象限⇔$x\geq 0$，$y\geq 0$；

点 $P(x,y)$在第二象限⇔$x\leq 0$，$y\geq 0$；

点 P（x,y）在第三象限⇔$x\leq 0$，$y\leq 0$；

点 P（x,y）在第四象限⇔$x\geq 0$，$y\leq 0$.



（2）坐标轴上点的坐标特征：

①在横轴上⇔$y=0$；②在纵轴上⇔$x=0$；③原点⇔$x=0$，$y=0$.

（3）各象限角平分线上点的坐标

①第一、三象限角平分线上的点的横、纵坐标相等；

②第二、四象限角平分线上的点的横、纵坐标互为相反数

（4）点 P（a,b）的对称点的坐标特征：

①关于 x 轴对称的点 P_1 的坐标为$(a，-b)$；②关于 y 轴对称的点 P_2 的坐标为$(-a，b)$；

③关于原点对称的点 P_3 的坐标为$(-a，-b)$.

（5）点 M（x,y）平移的坐标特征：

M（x,y）　$M_1(\boldsymbol{x+a,y})$　$M_2(\boldsymbol{x+a,y+b})$

（6）与坐标轴平行的线段

与 x 轴平行的线段 AB，A、B 的纵坐标相等；与 y 轴平行的线段 CD，C、D 的横坐标相等

（7）到 y 轴距离=横坐标；到 x 轴距离=纵坐标

学霸笔记

例题精析

【例题精析1】 **{各象限内点的坐标的符号特征★}** 对任意实数 x，点 $P(x,x^2+2x)$ 一定不在 (　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【分析】利用各象限内点的坐标性质分析得出答案．

【解答】解：当 $x>0$，则 $x^2+2x>0$，故点 $P(x,x^2+2x)$ 可能在第一象限；

当 $x<0$，则 $x^2+2x>0$ 或 $x^2+2x<0$，故点 $P(x,x^2+2x)$ 可能在第二、三象限；

当 $x=0$ 时，点 $P(x,x^2+2x)$ 在原点．故点 $P(x,x^2+2x)$ 一定不在第四象限．故选：D．

【点评】此题主要考查了点的坐标，正确把握各象限内点的坐标符号是解题关键．

【例题精析2】 **{坐标轴上点的坐标特征★}** 点 $(a-1,2a)$ 在 x 轴上，则 a 的值为 $\underline{\quad 0 \quad}$．

【分析】根据 x 轴上点的纵坐标为 0 列出方程求解即可．

【解答】解：$\because$ 点 $(a-1,2a)$ 在 x 轴上，$\therefore 2a=0$，$\therefore a=0$．故答案为：0．

【点评】本题考查了点的坐标，熟记 x 轴上点的纵坐标为 0 是解题的关键．

【例题精析3】 **{坐标轴上点的坐标特征★★}** 如果点 $P(m+3,m-1)$ 在直角坐标系的坐标轴上，则点 P 的坐标为 $\underline{\quad (0,-4) \text{ 或 } (4,0) \quad}$．

【分析】根据坐标轴上的点坐标特征，分横坐标与纵坐标为零两种情况讨论求解．

【解答】解：$\because$ 点 $P(m+3,m-1)$ 在坐标轴上，

$\therefore m+3=0$ 或 $m-1=0$，$\therefore m=-3$ 或 $m=1$，$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(0,-4)$ 或 $(4,0)$．故答案为：$(0,-4)$ 或 $(4,0)$．

【点评】本题主要考查了点的坐标，熟记坐标轴上点的坐标符号特点是解题的关键．

【例题精析4】 **{各象限角平分线上点的坐标★}** 若点 $(6-a,a-2)$ 在第一、三象限角平分线上，则 $a=$ $\underline{\quad 4 \quad}$．

【分析】根据第一、三象限角平分线上的点的坐标特点：点的横纵坐标相等，即可解答．

【解答】解：点 $(6-a,a-2)$ 在第一、三象限的角平分线上，且第一、三象限角平分线上的点的坐标特点为：点的横纵坐标相等，$\therefore 6-a=a-2$，解得 $a=4$．故答案为：4．

【点评】本题考查了各象限角平分线上点的坐标的符号特征，第一、三象限角平分线上的点的坐标特点为：点的横纵坐标相等；第二、四象限角平分线上的点的坐标特点为：点的横纵坐标互为相反数．

【例题精析5】 **{各象限角平分线上点的坐标★★}** 已知点 P 的坐标为 $(3-2a,a-9)$，且点 P 到两坐标轴

的距离相等，则点 P 的坐标为 __$(-5,-5)$ 或 $(15,-15)$__.

【分析】根据点 P 到两坐标轴的距离相等列出方程，然后求解得到 a 的值，再求解即可.

【解答】解：$\because$ 点 P 到两坐标轴的距离相等，

$\therefore |3-2a|=|a-9|$，$\therefore 3-2a=a-9$ 或 $3-2a=9-a$，解得 $a=4$ 或 $a=-6$，

当 $a=4$ 时，$3-2a=3-2\times 4=-5$，$a-9=4-9=-5$，当 $a=-6$，$3-2\times(-6)=15$，$a-9=-6-9=-15$，

所以，点 P 的坐标为 $(-5,-5)$ 或 $(15,-15)$．故答案为：$(-5,-5)$ 或 $(15,-15)$．

【点评】本题考查了点的坐标，根据到两坐标轴的距离相等列出方程是解题的关键.

【例题精析6】 **{与坐标轴平行的线段★}** 已知线段 $AB=4$，$AB//x$ 轴，若点 A 坐标为 $(-1,2)$，且点 B 在第一象限，则 B 点坐标为 __$(3,2)$__.

【分析】由 $AB//x$ 轴，可知 A、B 两点纵坐标相等，又 $AB=4$，且点 B 在第一象限，即可确定 B 点坐标.

【解答】解：$\because AB//x$ 轴，点 A 坐标为 $(-1,2)$，$\therefore A$、B 两点纵坐标都为 2，

又 $\because AB=4$，且点 B 在第一象限，点 A 坐标为 $(-1,2)$，$\therefore B$ 点在 A 点右边，$B(3,2)$．故答案为：$(3,2)$．

【点评】本题考查了平行于 x 轴的直线上的点纵坐标相等，再根据两点相对的位置及两点距离确定点的坐标.

【例题精析7】 **{与坐标轴平行的线段★★}** 在平面直角坐标系中，点 $A(-2,1)$，$B(2,4)$，$C(x,y)$，$BC//y$ 轴，当线段 AC 最短时，则此时点 C 的坐标为 __$(2,1)$__.

【分析】根据点 $B(2,4)$，$C(x,y)$，$BC//y$ 轴，可以得到 x 的值，然后根据垂线段最短，即可得到点 C 的纵坐标，从而可以得到点 C 的坐标.

【解答】解：$\because B(2,4)$，$C(x,y)$，$BC//y$ 轴，$\therefore x=2$，$C(2,y)$，$\because A(-3,2)$，

$\therefore$ 当线段 AC 最短时，此时 $AC\perp BC$，$\therefore y=1$，点 C 的坐标为 $(2,1)$，故答案为：$(2,1)$．

【点评】本题考查坐标与图形，解答本题的关键是明确垂线段最短和平行于 x 轴的直线的特点：该直线任意一点的纵坐标都相等.

【例题精析8】 **{与坐标轴的距离★★}** 若点 $B(m+1,3m-5)$ 到 x 轴的距离与到 y 轴的距离相等，则点 B 的坐标是(　　)

A．$(4,4)$ 或 $(2,2)$　　　　B．$(4,4)$ 或 $(2,-2)$

C．$(2,-2)$　　　　D．$(4,4)$

【分析】根据到 x 轴的距离与它到 y 轴的距离相等可得 $m+1=3m-5$，或 $m+1+3m-5=0$，解方程可得 m 的值，求出 B 点坐标.

【解答】解：由题意得：$m+1=3m-5$，或$m+1+3m-5=0$，解得：$m=3$或$m=1$；当$m=3$时，点B的坐标是$(4,4)$；当$m=1$时，点B的坐标是$(2,-2)$．所以点B的坐标为$(4,4)$或$(2,-2)$．故选：B．

【点评】此题主要考查了点的坐标，关键是掌握到x轴的距离与它到y轴的距离相等时横坐标的绝对值$=$纵坐标的绝对值．

对点训练

【对点训练1】 ｛**各象限内点的坐标的符号特征★**｝若点$P(a,b)$在第三象限，则$M(-ab,-a)$应在第__二__象限．

【分析】根据第三象限内点的横坐标是负数，纵坐标是负数确定出a、b的正负情况，再求出$-a$，$-ab$的正负情况，然后确定出点M所在的象限，即可得解．

【解答】解：$\because$点$P(a,b)$在第三象限，$\therefore a<0$，$b<0$，$\therefore -a>0$，$-ab<0$，$\therefore$点$M(-ab,-a)$在第二象限．

故答案为：二．

【点评】本题考查了各象限内点的坐标的符号特征，记住各象限内点的坐标的符号是解决的关键，四个象限的符号特点分别是：第一象限$(+,+)$；第二象限$(-,+)$；第三象限$(-,-)$；第四象限$(+,-)$．

【对点训练2】 ｛**坐标轴上点的坐标特征★**｝已知点$P(m+2,2m-4)$在y轴上，则点P的坐标是$(0,-8)$__．

【分析】直接利用y轴上横坐标为0，进而得出m的值即可得出答案．

【解答】解：$\because$点$P(m+2,2m-4)$在y轴上，$\therefore m+2=0$，解得：$m=-2$，

故$2m-4=-8$，故点P的坐标为：$(0,-8)$．故答案为：$(0,-8)$．

【点评】此题主要考查了点的坐标，根据y轴上点的横坐标为0得出关于m的方程是解题关键．

【对点训练3】 ｛**各象限角平分线上点的坐标★★**｝已知点$A(3a+5,a-3)A$到两坐标轴的距离相等，则$a=$__$-\frac{1}{2}$或-4__．

【分析】直接利用到两坐标轴的距离相等的点在坐标系的平分线上进而得出答案．

【解答】解：$\because A(3a+5,a-3)$且点A到两坐标轴的距离相等，$\therefore 3a+5+a-3=0$或$3a+5=a-3$，

解得：$a=-\frac{1}{2}$或$a=-4$，故答案为：$-\frac{1}{2}$或-4．

【点评】题主要考查了点的坐标，正确分类讨论是解题关键．

【对点训练4】 ｛**与坐标轴平行的线段★**｝已知点A的坐标是$A(-2,3)$，线段$AB//y$轴，且$AB=4$，则B

点的坐标是 __$(-2,-1)$ 或 $(-2,7)$__．

【分析】根据点 A 坐标和 $AB//y$ 轴确定点 B 的横坐标为 -2，根据 $AB=5$ 可确定其纵坐标．

【解答】解：$\because$ 点 A 的坐标是 $A(-2,3)$，线段 $AB//y$ 轴，$\therefore$ 故设点 B 坐标为 $(-2,y)$，又 $AB=4$，

$\therefore |y-3|=4$，解得：$y=-1$ 或 7，故点 B 坐标为 $(-2,-1)$ 或 $(-2,7)$，故答案为：$(-2,-1)$ 或 $(-2,7)$．

【点评】本题主要考查了坐标与图形的性质，分情况确定点的位置是关键，不要遗漏．

【对点训练5】 **{与坐标轴的距离★★}**已知平面直角坐标系中有一点 $M(m-1,2m+3)$，若点 M 到 x 轴的距离为 1，则点 M 的坐标为 __$(-2,1)$ 或 $(-3,-1)$__．

【分析】根据题意可知 $2m+3$ 的绝对值等于 1，从而可以得到 m 的值，进而得到 M 的坐标．

【解答】解：由题意可得：$|2m+3|=1$，解得：$m=-1$ 或 $m=-2$，当 $m=-1$ 时，点 M 的坐标为 $(-2,1)$；当 $m=-2$ 时，点 M 的坐标为 $(-3,-1)$；综上，M 的坐标为 $(-2,1)$ 或 $(-3,-1)$．故答案为：$(-2,1)$ 或 $(-3,-1)$．

【点评】本题考查点的坐标，熟练掌握点到 y 轴的距离就是横坐标的绝对值，到 x 轴的距离就是纵坐标的绝对值是解题的关键．

经典真题

【实战经典1】 （2020•黄冈）在平面直角坐标系中，若点 $A(a,-b)$ 在第三象限，则点 $B(-ab,b)$ 所在的象限是(　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

【分析】根据点 $A(a,-b)$ 在第三象限，可得 $a<0$，$-b<0$，得 $b>0$，$-ab>0$，进而可以判断点 $B(-ab,b)$ 所在的象限．

【解答】解：$\because$ 点 $A(a,-b)$ 在第三象限，$\therefore a<0$，$-b<0$，$\therefore b>0$，

$\therefore -ab>0$，$\therefore$ 点 $B(-ab,b)$ 所在的象限是第一象限．故选：A．

【点评】本题考查了点的坐标，解决本题的关键是掌握点的坐标特征．

【实战经典2】 （2021•西宁）在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 的坐标是 $(2,-1)$，若 $AB//y$ 轴，且 $AB=9$，则点 B 的坐标是 __$(2,8)$ 或 $(2,-10)$__．

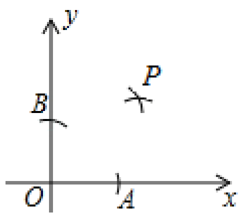
【分析】线段 $AB//y$ 轴，A、B 两点横坐标相等，又 $AB=9$，B 点可能在 A 点上边或者下边，根据距离确定 B 点坐标．

【解答】解：$\because AB$ 与 y 轴平行，$\therefore A$、B 两点的横坐标相同，又 $AB=9$，$\therefore B$ 点纵坐标为：$-1+9=8$，

或$-1-9=-10$，$\therefore B$点的坐标为：$(2,8)$或$(2,-10)$；故答案为：$(2,8)$或$(2,-10)$.

【点评】本题考查了坐标与图形的性质，要掌握平行于y轴的直线上的点横坐标相等，再根据两点相对的位置及两点距离确定点的坐标.

【实战经典3】 （2020•新疆）如图，在x轴，y轴上分别截取OA，OB，使$OA=OB$，再分别以点A，B为圆心，以大于$\frac{1}{2}AB$长为半径画弧，两弧交于点P．若点P的坐标为$(a,2a-3)$，则a的值为<u>3</u>.



【分析】根据作图方法可知点P在$\angle BOA$的角平分线上，由角平分线的性质可知点P到x轴和y轴的距离相等，可得关于a的方程，求解即可.

【解答】解：$\because OA=OB$，分别以点A，B为圆心，以大于$\frac{1}{2}AB$长为半径画弧，两弧交于点P，

$\therefore$点P在$\angle BOA$的角平分线上，$\therefore$点P到x轴和y轴的距离相等，又$\because$点P的坐标为$(a,2a-3)$，

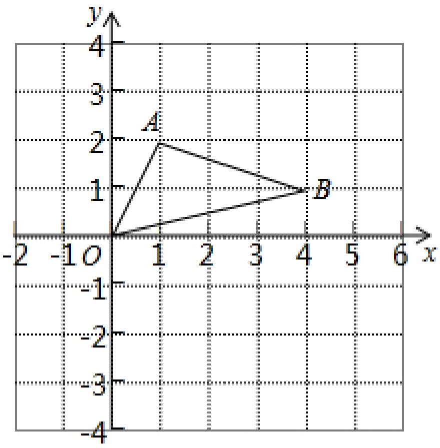
$\therefore a=2a-3$，$\therefore a=3$．故答案为：3.

【点评】本题考查了角平分线的作法及其性质在坐标与图形性质问题中的应用，明确题中的作图方法及角平分线的性质是解题的关键.

考点拓展

考点 1.2：坐标系中的几何问题

【拓展训练1】　｛坐标系中的几何问题★｝如图，在 ΔABO 中，A，B 两点的坐标分别为 $(1,2)$，$(4,1)$，则 ΔABO 的面积为 <u>3.5</u>．

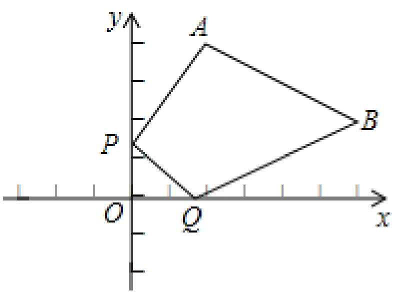


【分析】三角形 ABO 的面积等于边长为 2，4 的矩形面积减去三个三角形的面积．

【解答】解：$S_{\Delta ABO}=2\times 4-\dfrac{1}{2}\times 1\times 2-\dfrac{1}{2}\times 1\times 3-\dfrac{1}{2}\times 1\times 4=3.5$；故答案为 3.5．

【点评】本题考查了坐标与图象的象征，掌握用割补法求三角形的面积是解题的关键．

【拓展训练2】　｛坐标系中的几何问题★★★｝如图，在平面直角坐标系中，点 A 的坐标是 $(2,4)$，点 B 的坐标是 $(6,2)$，在 y 轴和 x 轴上分别有两点 P、Q，则 A，B，P，Q 四点组成的四边形的最小周长为____．

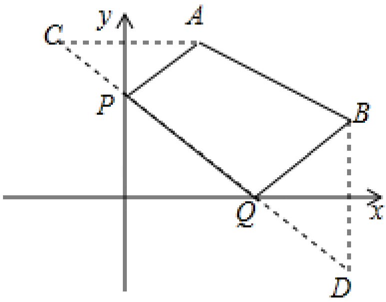


【分析】作点 A 关于 y 轴的对称点 C，点 B 关于 x 轴的对称点 D，连接 CD 交 y 轴于 P，交 x 轴于 Q，则此

时，四边形 $APQB$ 的周长最小，且四边形的最小周长 $=AB+CD$，根据两点间的距离公式即可得到结论．

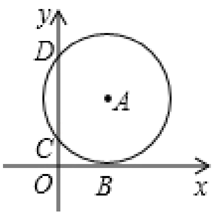
【解答】解：作点 A 关于 y 轴的对称点 C，点 B 关于 x 轴的对称点 D，连接 CD 交 y 轴于 P，交 x 轴于 Q，则此时，四边形 $APQB$ 的周长最小，且四边形的最小周长 $=AB+CD$，$\because$ 点 A 的坐标是 $(2,4)$，点 B 的坐标是 $(6,2)$，$\therefore C(-2,4)$，$D(6,-2)$，$\because AB=\sqrt{(2-6)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{5}$，$CD=\sqrt{(-2-6)^2+(4+2)^2}=10$，

$\therefore$ 四边形 $APQB$ 的最小周长 $=10+2\sqrt{5}$，故答案为：$10+2\sqrt{5}$．



【点评】本题考查了坐标与图形性质，轴对称 – 最短路径问题，两点间的距离公式，正确的确定点 P 和点 Q 的位置是解题的关键．

【拓展训练3】 **｛坐标系中的几何问题★★★｝**如图，在平面直角坐标系中，点 A 在第一象限，$\odot A$ 与 x 轴相切于 B，与 y 轴交于 $C(0,1)$，$D(0,4)$ 两点，则点 A 的坐标是__ $(2,\frac{5}{2})$ __．

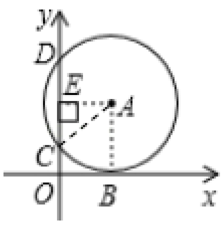


【分析】本题可作过 A 点垂直于 y 轴的直线，根据三角形的勾股定理列出方程，求解即可得答案．

【解答】解：作 $AE\perp y$ 轴于点 E，连接 AB，AC，则四边形 $ABOE$ 为矩形，

$CE=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}(4-1)=1.5$，$AC=AB=OE=1+(4-1)\div 2=2.5$，$AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=\sqrt{2.5^2-1.5^2}=2$，

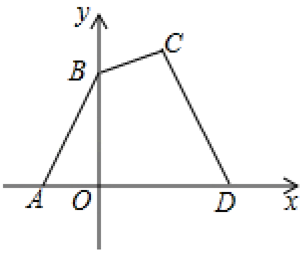
$\therefore$ 点 A 的坐标是 $(2,\frac{5}{2})$．



【点评】本题考查常用辅助线作法：连接圆心和切点，作弦心距．

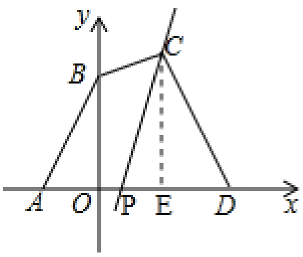
【拓展训练4】 **｛坐标系中的几何问题★★★｝**（2016 春•青山区期中）如图，点 $A(-1,0)$，点 $B(0,3)$，点

$C(2,4)$，点 $D(3,0)$，点 P 是 x 轴上一点，直线 CP 将四边形 $ABCD$ 的面积分成 $1:2$ 两部分，则 P 点坐标为 $(-0.5,0)$ 或 $(1.25,0)$ __.



【分析】作 $CE\perp x$ 轴，根据四边形 $ABCD$ 的面积 $=S_{\Delta AOB}+S_{梯形OBCE}+S_{\Delta CDE}$ 求得四边形的面积，设点 $P(x,0)$，则 $PD=3-x$，由直线 CP 将四边形 $ABCD$ 的面积分成 $1:2$ 两部分知 $S_{\Delta CPD}=3.5$ 或 $S_{\Delta CPD}=7$，据此列出方程求解可得.

【解答】解：过点 C 作 $CE\perp x$ 轴于点 E，则 $AO=1$、$OB=3$、$OE=2$、$CE=4$、$DE=1$，



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积 $=S_{\Delta AOB}+S_{梯形OBCE}+S_{\Delta CDE}=\dfrac{1}{2}\times1\times3+\dfrac{1}{2}\times(3+4)\times2+\dfrac{1}{2}\times1\times4=10.5$，

设点 $P(x,0)$，则 $PD=3-x$，由直线 CP 将四边形 $ABCD$ 的面积分成 $1:2$ 两部分知 $S_{\Delta CPD}=3.5$ 或 $S_{\Delta CPD}=7$，

则 $\dfrac{1}{2}\times(3-x)\times4=3.5$ 或 $\dfrac{1}{2}\times(3-x)\times4=7$，解得：$x=1.25$ 或 $x=-0.5$，即点 P 的坐标为 $(-0.5,0)$ 或 $(1.25,0)$，

故答案为：$(-0.5,0)$ 或 $(1.25,0)$.

【点评】本题主要考查坐标与图形的性质，熟练掌握割补法求四边形的面积及由分割的面积间的关系列出方程是解题的关键.

【拓展训练5】 **｛坐标系中的几何问题★★★｝**（2021•湘西州）已知点 $M(x,y)$ 在第一象限，且 $x+y=12$，点 $A(10,0)$ 在 x 轴上，当 ΔOMA 为直角三角形时，点 M 的坐标为(　　)

A．$(10,2)$，$(8,4)$ 或 $(6,6)$　　B．$(8,4)$，$(9,3)$ 或 $(5,7)$

C．$(8,4)$，$(9,3)$ 或 $(10,2)$　　D．$(10,2)$，$(9,3)$ 或 $(7,5)$

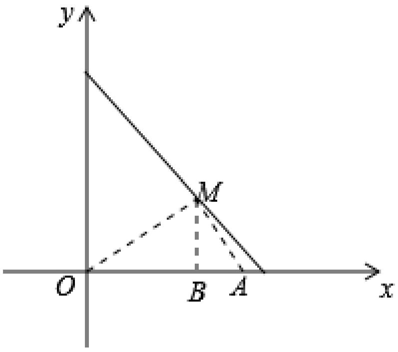
【分析】分情况讨论：①若 O 为直角顶点，则点 M 在 y 轴上，不合题意舍去；

②若 A 为直角顶点，则 $MA\perp x$ 轴，所以点 M 的横坐标为 10，代入 $y=-x+12$ 中，得 $y=2$，求出点 M 坐标为 $(10,2)$；

③若 M 为直角顶点，作 $MB\perp x$ 轴，可得 $\Delta OMB\backsim\Delta MAB$，根据相似三角形的性质求出 M 点横坐标，进而

得到 M 点坐标．

【解答】解：分情况讨论：



①若 O 为直角顶点，则点 M 在 y 轴上，不合题意舍去；②若 A 为直角顶点，则 $MA\perp x$ 轴，

$\therefore$ 点 M 的横坐标为 10，把 $x=10$ 代入 $y=-x+12$ 中，得 $y=2$，$\therefore$ 点 M 坐标为 $(10,2)$；

③若 M 为直角顶点，如图，作 $MB\perp x$ 轴，则 $\angle OBM=\angle MBA=90^{\circ}$，$\angle OMB+\angle AMB=90^{\circ}$，

$\because \angle AMB+\angle MAB=90^{\circ}$，$\therefore \angle OMB=\angle MAB$，$\therefore \Delta OMB\backsim\Delta MAB$，$\therefore \dfrac{OB}{MB}=\dfrac{MB}{AB}$，$\therefore MB^{2}=OB\cdot AB$，

$\therefore (-x+12)^{2}=x(10-x)$，解得 $x=8$ 或 9，$\therefore$ 点 M 坐标为 $(8,4)$ 或 $(9,3)$，

综上所述，当 ΔOMA 为直角三角形时，点 M 的坐标为 $(10,2)$、$(8,4)$、$(9,3)$，故选：C．

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，图形与坐标性质，熟悉一次函数的性质和直角三角形的性质是解题的关键．

【拓展训练6】 **｛坐标系-新定义★★★｝**（2021•遵义）数经历了从自然数到有理数，到实数，再到复数的发展过程，数学中把形如 $a+bi(a$，b 为实数）的数叫做复数，用 $z=a+bi$ 表示，任何一个复数 $z=a+bi$ 在平面直角坐标系中都可以用有序数对 $Z(a,b)$ 表示，如：$z=1+2i$ 表示为 $Z(1,2)$，则 $z=2-i$ 可表示为(　　)

A．$Z(2,0)$　　B．$Z(2,-1)$　　C．$Z(2,1)$　　D．$Z(-1,2)$

【分析】根据题中的新定义解答即可．

【解答】解：由题意，得 $z=2-i$ 可表示为 $Z(2,-1)$．故选：B．

【点评】本题考查了点的坐标，弄清题中的新定义是解本题的关键．

知识梳理

考点 2：函数自变量取值范围

（1）常量、变量： 在一个变化过程中，数值始终不变的量叫做常量，数值发生变化的量叫做变量．

（2）函数： 在一个变化过程中，有两个变量 x 和 y，对于 x 的每一个值，y 都有唯一确定的值与其对应，那么就称 x 是自变量，y 是 x 的函数．函数的表示方法有：列表法、图像法、解析法.

（3）函数自变量的取值范围： 一般原则为：整式为全体实数；分式的分母不为零；二次根式的被开方数为非负数；使实际问题有意义．

学霸笔记

例题精析

【例题精析1】　**{常量、变量★}** 快餐店里的快餐每盒 12 元，买 n 盒需付 S 元，则其中常量是 __12__，变量是 ____.

【分析】根据在一个变化的过程中，数值发生变化的量称为变量；数值始终不变的量称为常量，即可答题.

【解答】解：快餐店里的快餐每盒 12 元，买 n 盒需付 S 元，则其中常量是 12，变量是 n，S.

故答案为：12；n，S.

【点评】本题考查了常量与变量的知识，属于基础题，变量是指在变化的过程中随时可以发生变化的量.

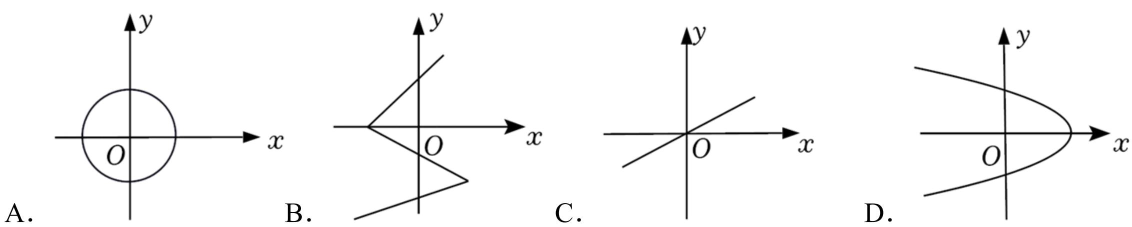
【例题精析2】　**{常量、变量★}** 下列：① $y=x^2$；② $y=2x+1$；③ $y^2=2x(x\ldots 0)$；④ $y=\pm\sqrt{x}(x\ldots 0)$，具有函数关系（自变量为 x）的是__①②__.

【分析】根据函数的定义可知，满足对于 x 的每一个取值，y 都有唯一确定的值与之对应关系，据此即可确定哪些是函数.

【解答】解：∵对于 x 的每一个取值，y 都有唯一确定的值，∴① $y=x^2$；② $y=2x+1$ 当 x 取值时，y 有唯一的值对应；故具有函数关系（自变量为 x）的是①②．故答案为：①②.

【点评】主要考查了函数的定义．函数的定义：在一个变化过程中，有两个变量 x，y，对于 x 的每一个取值，y 都有唯一确定的值与之对应，则 y 是 x 的函数，x 叫自变量.

【例题精析3】　**{函数概念★}** 下列曲线中，表示 y 是 x 的函数的是(　　)



【分析】根据函数的定义进行判断即可.

【解答】解：在某个变化过程中，有两个变量 x、y，一个量变化，另一个量也随之变化，当 x 每取一个值，y 就有唯一的值与之相对应，这时我们就把 x 叫做自变量，y 叫做因变量，y 是 x 的函数，

只有选项 C 中的“x 每取一个值，y 不是唯一值与之相对应”，其它选项中的都不是“有唯一相对应”的，所以选项 C 中的 y 表示 x 的函数，故选：C.

【点评】本题考查函数的定义，理解“自变量 x 每取一个值，因变量 y 都有唯一值与之相对应”是判断函数

的关键．

【例题精析4】　　**｛函数自变量取值范围★｝**函数 $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$ 的自变量 x 的取值范围是(　　)

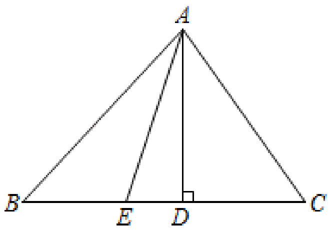
A． $x\geqslant 1$ 且 $x\neq 0$　　B． $x\neq 0$　　C． $x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$　　D． $x\leqslant 1$

【分析】根据二次根式的被开方数是非负数、分母不为 0 列出不等式，解不等式得到答案．

【解答】解：由题意得：$1-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$，解得：$x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$，故选：C．

【点评】本题考查的是函数自变量的取值范围的确定，掌握二次根式的被开方数是非负数、分母不为 0 是解题的关键．

【例题精析5】　　**｛函数关系式★｝**如图，三角形 ABC 的高 $AD=4$，$BC=8$，点 E 在 BC 边上，连接 AE．若 BE 的长为 x，三角形 ACE 的面积为 y，则 y 与 x 之间的关系式为__ $y=-2x+16$ __．



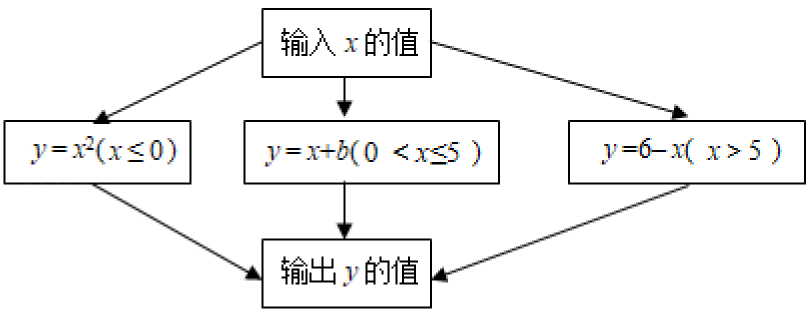
【分析】根据线段的和差，可得 CE 的长，根据三角形的面积，可得答案．

【解答】解：由线段的和差，得 $CE=8-x$，由三角形的面积，得 $y=\dfrac{1}{2}\times 4\times(8-x)$

化简，得 $y=-2x+16$，故答案为：$y=-2x+16$．

【点评】本题考查了函数关系式，利用三角形的面积公式是解题关键．

【例题精析6】　　**｛函数求值★｝**（2021 春•沙坪坝区校级期末）根据如图所示的程序计算变量 y 的值，若输入的 x 值是 2 或 8 时，输出的 y 值相等，则 b 等于 __ -4 __．



【分析】先求出 $x=8$ 时 y 的值，再将 $x=4$、$y=-2$ 代入 $y=2x+b$ 可得答案．

【解答】解：$\because$ 当 $x=8$ 时，$y=6-8=-2$，$\therefore$ 当 $x=2$ 时，$y=2+b=-2$，解得：$b=-4$，故答案为：-4．

【点评】本题主要考查函数值，解题的关键是掌握函数值的计算方法．

对点训练

【对点训练1】　{常量、变量★}（2021春•伍家岗区期末）若改变正方形的边长x，则正方形面积y随之改变．在这个问题中，__x__是自变量．

【分析】面积随边长变化，所以边长是自变量，面积是因变量．

【解答】解：面积随边长变化，所以边长是自变量，面积是因变量．

故答案为：x．

【点评】本题考查了函数自变量的概念，掌握自变量的概念是解题的关键．

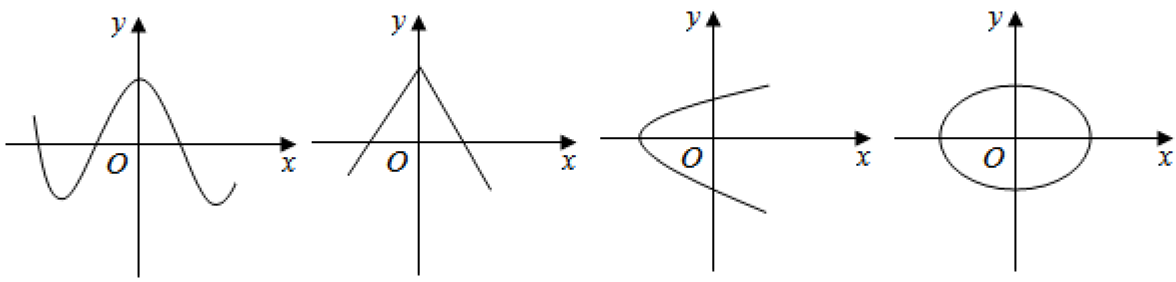
【对点训练2】　{函数的概念★}变量x，y有如下关系：①$x+y=10$；②$y=\frac{-5}{x}$；③$y=|x-3|$；④$y^2=8x$．其中y是x的函数的是__①②③__．

【分析】根据函数的定义判断即可．

【解答】解：①$y=-x+10$，这是一次函数，符合题意；②任意给定一个非0的实数，y都有唯一的值，符合函数的定义，符合题意；③当$x\geq 3$时，$y=x-3$；当$x<3$时，$y=3-x$，符合函数的定义，符合题意；④$y=\pm\sqrt{8x}$，给定一个非负数x，y都有2个值，不符合函数的定义，不符合题意；故答案为：①②③．

【点评】本题考查了函数的概念，理解函数的概念中的“y都有唯一的值”是解题的关键．

【对点训练3】　{函数的概念★}（多选）下列图象中，表示y是x的函数的有__A、B__．



A　　B　　C　　D

【分析】根据函数的定义解答即可．

【解答】解：A、能表示y是x的函数，故此选项合题意；B、能表示y是x的函数，故此选项不合题意；C、不能表示y是x的函数，故此选项不合题意；D、不能表示y是x的函数，故此选项不符合题意；

故答案为：A、B．

【点评】此题主要考查了函数概念，关键是掌握在一个变化过程中有两个变量x与y，对于x的每一个确定

的值，y 都有唯一的值与其对应，那么就说 y 是 x 的函数，x 是自变量．

【对点训练4】 {函数关系式★}从 A 地向 B 地打长途，不超过 3 分钟，收费 2.4 元，以后每超过一分钟加收一元，若通话时间 t 分钟 $(t\geqslant 3)$，则付话费 y 元与 t 分钟函数关系式是(　　)

A．$y=t-0.6(t\geqslant 3)$　　B．$y=2.4t+3(t\geqslant 3)$

C．$y=2.4+3t(t\geqslant 3)$　　D．$y=t+0.6(t\geqslant 3)$

【分析】由通话时间与话费之间的变化关系可得到话费 y（元）与通话时间 t（分钟）的关系式．

【解答】解：根据通话时间与话费之间的变化关系可得，$y=2.4+(t-3)=t-0.6(t\geqslant 3)$，故选：$A$．

【点评】本题考查函数关系式，理解话费与通话时间之间的变化关系是正确解答的关键．

【对点训练5】 {函数自变量取值范围★}函数 $y=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x+1}$ 中的自变量的取值范围是 __$x\leqslant 2$ 且 $x\neq -1$__．

【分析】根据二次根式有意义的条件、分母不为 0 列出不等式，解不等式，得到答案．

【解答】解：由题意得：$2-x\geqslant 0$，$x+1\neq 0$，解得：$x\leqslant 2$ 且 $x\neq -1$，故答案为：$x\leqslant 2$ 且 $x\neq -1$．

【点评】本题考查的是函数自变量的取值范围的确定，掌握二次根式的被开方数是非负数、分母不为 0 是解题的关键．

经典真题

【实战经典1】 （2021•黄石）函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}+(x-2)^0$ 的自变量 x 的取值范围是(　　)

A．$x\geqslant -1$　　B．$x>2$　　C．$x>-1$ 且 $x\neq 2$　　D．$x\neq -1$ 且 $x\neq 2$

【分析】根据二次根式成立的条件，分式成立的条件，零指数幂的概念列不等式组求解．

【解答】解：由题意可得：$\begin{cases}x+1>0\\x-2\neq 0\end{cases}$，解得：$x>-1$ 且 $x\neq 2$，故选：C．

【点评】本题考查函数中自变量的取值范围，二次根式成立的条件及零指数幂的概念，掌握分母不能为零，二次根式的被开方数为非负数，$a^0=1(a\neq 0)$ 是解题关键．

【实战经典2】 （2021•无锡）函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ 中自变量 x 的取值范围是(　　)

A．$x>2$　　B．$x\geqslant 2$　　C．$x<2$　　D．$x\neq 2$

【分析】根据二次根式的被开方数是非负数、分母不为 0 列出不等式，解不等式得到答案．

【解答】解：由题意得：$x-2>0$，解得：$x>2$，故选：A．

【点评】本题考查的是函数自变量的取值范围的确定，掌握二次根式的被开方数是非负数、分母不为 0 是解题的关键．

【实战经典3】 （2020•陕西）变量 x， y 的一些对应值如下表：

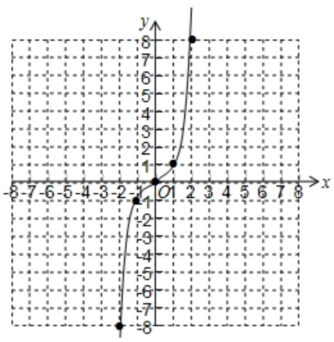
x	…	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	-8	-1	0	1	8	27	…

根据表格中的数据规律，当 $x=-5$ 时， y 的值是(　　)

A．75　　　B． -75　　　C．125　　　D． -125

【分析】根据表格数据得到函数为 $y=x^3$，把 $x=-5$ 代入求得即可．

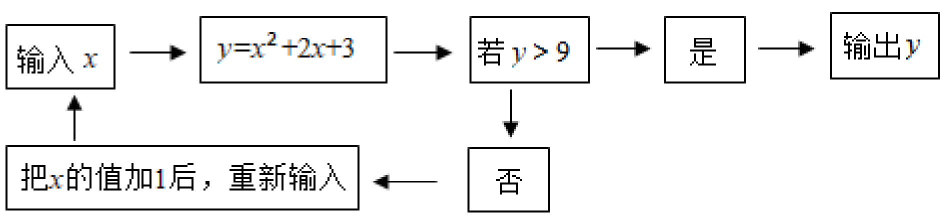
【解答】解：根据表格数据画出图象如图：



由图象可知，函数的解析式为 $y=x^3$，把 $x=-5$ 代入得， $y=-125$．故选：D．

【点评】本题考查了函数图象上点的坐标特征，图象上的点适合解析式，根据表格数据得到函数的解析式是解题的关键．

【实战经典4】 （2021•铜仁市）如图所示：是一个运算程序示意图，若第一次输入 1，则输出的结果是 __11__．



【分析】第一次输入 x 的值为 1，计算出 $y=6$，选择否的程序；第二次输入 x 的值为 2，计算出 $y=11$，选择是的程序，输出即可．

【解答】解：当 $x=1$ 时， $y=1+2+3=6$，$\because 6<9$，$\therefore$ 选择否的程序，当 $x=2$ 时， $y=4+4+3=11$，

$\because 11>9$，$\therefore$ 选择是的程序，故答案为：11．

【点评】本题考查了函数值，体现了分类讨论的数学思想，看懂程序图是解题的关键，注意第 2 次输入的 x 为 2.

知识梳理

考点 3：函数图像的分析与判断

（1）分析实际问题判断函数图象的方法：

①找起点：结合题干中所给自变量及因变量的取值范围，对应到图象中找对应点；

②找特殊点：即交点或转折点，说明图象在此点处将发生变化；

③判断图象趋势：判断出函数的增减性，图象的倾斜方向.

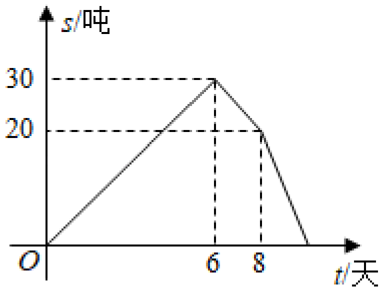
（2）以几何图形（动点）为背景判断函数图象的方法：

①设时间为 t（或线段长为 x），找因变量与 t(或 x)之间存在的函数关系，用含 t(或 x)的式子表示， 再找相应的函数图象.要注意是否需要分类讨论自变量的取值范围.

学霸笔记

例题精析

【例题精析1】 ｛实际问题判断函数图象★★｝（2021•牡丹江）春耕期间，市农资公司连续 8 天调进一批化肥，并在开始调进化肥的第七天开始销售．若进货期间每天调进化肥的吨数与销售期间每天销售化肥的吨数都保持不变，这个公司的化肥存量 s（单位：吨）与时间 t（单位：天）之间的函数关系如图所示，则该公司这次化肥销售活动（从开始进货到销售完毕）所用的时间是 __10__ 天．

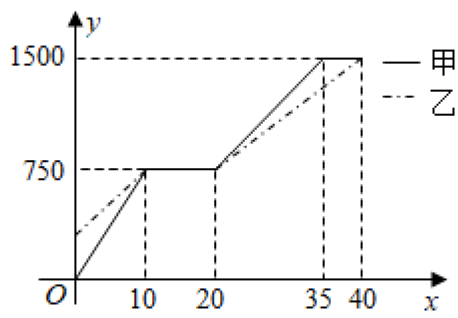


【分析】通过分析题意和图象可求调入化肥的速度，销售化肥的速度；从而可计算最后销售化肥 20 吨所花的时间．

【解答】解：调入化肥的速度是 $30\div6=5$（吨/天），当在第 6 天时，库存物资应该有 30 吨，在第 8 天时库存 20 吨，所以销售化肥的速度是 $\dfrac{30-20+5\times2}{2}=10$（吨/天），所以剩余的 20 吨完全售出需要 $20\div10=2$（天），故该门市部这次化肥销售活动（从开始进货到销售完毕）所用时间是 $8+2=10$（天）．故答案为：10．

【点评】此题主要考查了一次函数的应用，难度适中．解题的关键是注意调入化肥需 8 天，但第 7 天至第 8 天调入化肥和销售化肥同时进行，第 8 天以后停止调入化肥，只是销售化肥．

【例题精析2】 ｛实际问题判断函数图象★★★｝甲、乙二人约好同时出发，沿同一路线去某博物馆参加科普活动，如图，x 表示的是行走时间（单位：分），y 表示的是到甲出发地的距离（单位：米），最后两人都到达了目的地．根据图中提供的信息，下面有四个结论：①甲、乙二人第一次相遇后，停留了 10 分钟；②甲先到达目的地；③甲停留 10 分钟之后提高了行走速度；④甲行走的平均速度要比乙行走的平均速度快．其中正确的是(　　)



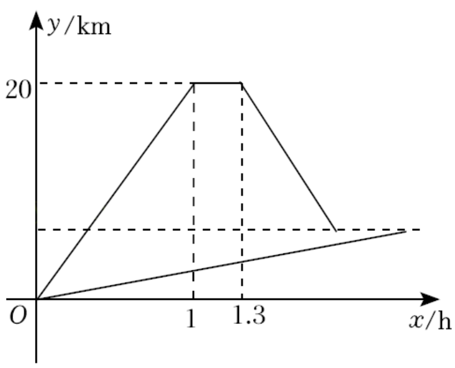
A．①②④　　　　B．①②③　　　　C．①③④　　　　D．②③④

【分析】根据函数图象中的数据得出路程、时间与速度，进而解答即可．

【解答】解：①甲、乙二人第一次相遇后，停留了 $20-10=10$（分钟），说法正确；②甲在 35 分时到达，乙在 40 分时到达，所以甲先到达的目的地，说法正确；③甲在停留 10 分钟之后减慢了行走速度，说法错误；④甲行走的平均速度要比乙行走的平均速度快，说法正确；所以正确的是①②④．故选：A．

【点评】本题考查函数的图象，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答．

【例题精析3】　**｛实际问题判断函数图象★★★｝**小明家、公园、图书馆依次在一条直线上，周末，小明和妈妈准备去公园放风筝，但是因为小明要先去图书馆还书，所以他们同时从家出发，并约定 2 小时后在公园碰头．小明先骑自行车匀速前往图书馆，到达图书馆还书后按原路原速返回公园并按照约定时间准时到达公园，妈妈则匀速步行前往公园，结果迟到半小时．如图是他们离家的距离 $y(km)$ 与小明离家时间 $x(h)$ 的函数图象，下列说法中错误的是(　　)



A．小明骑车的速度是 $20km/h$　　　　B．小明还书用了 $18min$

C．妈妈步行的速度为 $2.4km/h$　　　　D．公园距离小明家 $8km$

【分析】根据小明 1 小时到达图书馆，图书馆距离家 20 千米，求出小明骑车的速度判断 A 选项；根据小明还书用了 0.3 小时判断 B 选项；设妈妈的速度为 a 千米/小时，根据小明走的路程 + 妈妈走的路程 $=20\times 2$ 列出方程求出方程的解来判断 C 选项；根据妈妈的速度 $\times$ 妈妈所用的时间求公园距离小明家的距离来判断 D 选项．

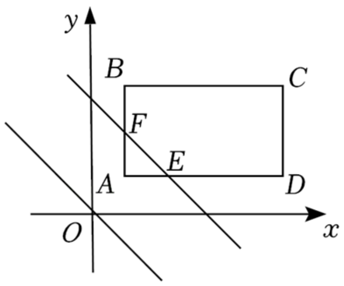
【解答】解：观察图象可知，小明 1 小时到达图书馆，图书馆距离家 20 千米，小明骑车的速度是 20 千米/

小时，故 A 选项不符合题意；$1.3-1=0.3$（小时）$=18$（分），故 B 选项不符合题意；

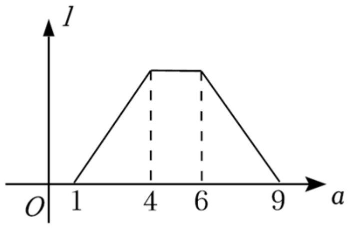
设妈妈的速度为 a 千米 / 小时，根据小明走的路程 + 妈妈走的路程 $=20\times 2$ 得：$2.5a+20\times(2-1.7)=20\times 2$，解得 $a=2.4$，故 C 选项不符合题意；$2.4\times 2.5=6$（千米），故 D 选项符合题意；故选：D.

【点评】本题考查了函数的图象，求出妈妈的速度是解题的关键.

【例题精析4】 **｛几何图形（动点）为背景判断函数图象★★★｝**如图①，在平面直角坐标系中，矩形 $ABCD$ 在第一象限，且 $AB//y$ 轴．直线 $M:y=-x$ 沿 x 轴正方向平移，被矩形 $ABCD$ 截得的线段 EF 的长度 l 与平移的距离 a 之间的函数图象如图②，那么矩形 $ABCD$ 的面积为(　　)



图①



图②

A．10　　B．12　　C．15　　D．18

【分析】根据图象折线中各个端点的位置，判断与长方形顶点的关系，求出长方形的长和宽，再计算面积.

【解答】解：由图可知，当 $a=1$ 时，直线 M 过点 A．当 $a=4$ 时，直线 M 经过点 B．当 $a=6$ 时，直线 M 经过点 D．当 $a=9$ 时，直线 M 经过点 C．故当 F 在 BC 上移动时，$4\leqslant a\leqslant 9$，$BC=9-4=5$，当 F 在 AB 上移动时，$1\leqslant a\leqslant 4$，又此时 $AF=AE$，$\therefore AB=4-1=3$．故矩形 $ABCD$ 的面积为 $5\times 3=15$．故选：C．

【点评】本题考查动点问题的函数图象．解题的关键在于判断怎么用图中的数据表示长方形的长和宽.

【例题精析5】 **｛几何图形（动点）为背景判断函数图象★★★｝**如图 1，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=60^{\circ}$，$BC=2AB$，动点 P 从点 A 出发，以每秒 1 个单位的速度沿线段 AB 运动到点 B 停止，同时动点 Q 从点 B 出发，以每秒 4 个单位的速度沿折线 $B-C-D$ 运动到点 D 停止．图 2 是点 P、Q 运动时，ΔBPQ 的面积 S 与运动时间 t 函数关系的图象，则 a 的值是(　　)

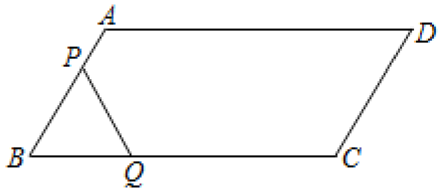


图 1

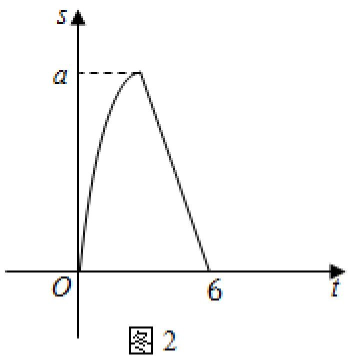


图 2

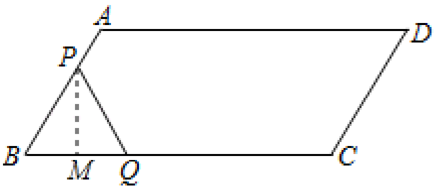
A．$6\sqrt{3}$　　B．$9\sqrt{3}$　　C．6　　D．12

【分析】由点 P 和点 Q 的运动可知，$AB=1\times 6=6$，$BC=12$，当点 Q 在 BC 上时，即 $0\le t\le 2$ 时，$BQ=2t$ 及当点 Q 在 CD 上时，即 $2<t\le 4$ 时，分别表达出 ΔBPQ 的面积，分析可知当点 Q 到达点 C 时，$S=a$，此时 $t=2$，再结合 ΔBPQ 的面积公式求解即可．

【解答】解：由题图 2 得，$t=6$ 时点 P 停止运动，$\therefore$ 点 P 以每秒 1 个单位速度从点 A 运动到点 B 用了 6 秒，

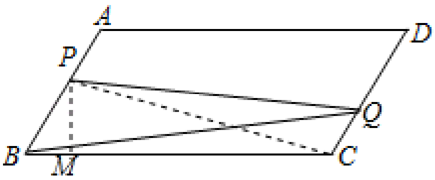
$\therefore AB=1\times 6=6$，$\therefore BC=2AB=12$，由点 P 和点 Q 的运动可知，$AP=t$，$BP=6-t$，

当点 Q 在 BC 上时，即 $0\le t<3$ 时，$BQ=4t$，过点 P 作 $PM\perp BC$ 于点 M，



$\because \angle B=60^{\circ}$，$\therefore PM=BP\cdot\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(6-t)$，此时 ΔBPQ 的面积 $=\dfrac{1}{2}BQ\cdot PM=\dfrac{1}{2}\cdot 4t\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}(6-t)=-\sqrt{3}t^{2}+6\sqrt{3}t$，

当点 Q 在 CD 上时，即 $3\le t\le 6$ 时，



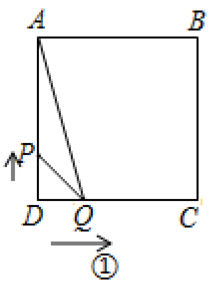
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AB//CD$，$\therefore S_{\Delta BPQ}=S_{\Delta BPC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot PM=\dfrac{1}{2}\times 12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}(6-t)=-3\sqrt{3}t+18\sqrt{3}$，

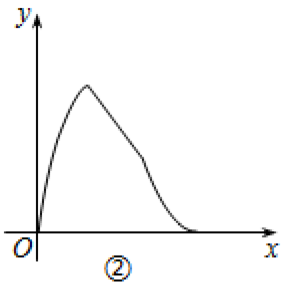
由上可知，当点 Q 到达点 C 时，$S=a$，即当 $t=3$ 时，$a=-3\sqrt{3}\times 3+18\sqrt{3}=9\sqrt{3}$，故选：$B$．

【点评】本题主要考查了动点函数的图象，解决本题的关键是由点的运动结合图 2 得出 AB 及 BC 的长．

【例题精析6】　　**{几何图形（动点）为背景判断函数图象★★★}** 如图①，在正方形 $ABCD$ 中，点 P 从点 D 出发，沿着 $D\to A$ 方向匀速运动，到达点 A 后停止运动．点 Q 从点 D 出发，沿着 $D\to C\to B\to A$ 的方向匀速运动，到达点 A 后停止运动．已知点 P 的运动速度为 a，图②表示 P、Q 两点同时出发 x

秒后，ΔAPQ 的面积 y 与 x 的函数关系，则点 Q 的运动速度可能是(　　)





A．$\frac{1}{3}a$　　B．$\frac{1}{2}a$　　C．$2a$　　D．$3a$

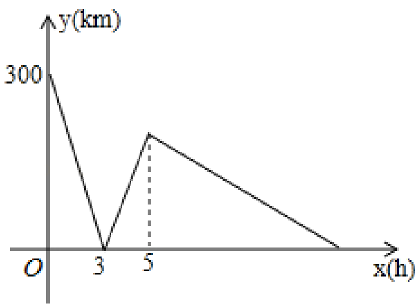
【分析】本题根据动点之间相对位置，讨论形成图形的面积的变化趋势即可，适于采用筛选法．

【解答】解：本题采用筛选法．首先观察图象，可以发现图象由三个阶段构成，即 ΔAPQ 的顶点 Q 所在边应有三种可能．当 Q 的速度低于点 P 时，当点 P 到达 A 时，点 Q 还在 DC 上运动，之后，因 A 、 P 重合，ΔAPQ 的面积为零，画出图象只能由一个阶段构成，故 A 、 B 错误；当 Q 的速度是点 P 速度的 2 倍，当点 P 到点 A 时，点 Q 到点 B ，之后，点 A 、 P 重合， ΔAPQ 的面积为 0．期间 ΔAPQ 面积的变化可以看成两个阶段，与图象不符， C 错误．故选： D .

【点评】本题考查双动点条件下的图形面积问题，分析时要关注动点在经过临界点时，相关图形的变化规律．

对点训练

【对点训练1】　　**{实际问题判断函数图象★★★}**甲、乙两车分别从 A ， B 两地同时相向匀速行驶．当乙车到达 A 地后，继续保持原速向远离 B 的方向行驶，而甲车到达 B 地后立即掉头，并保持原速与乙车同向行驶，经过一段时间后两车同时到达 C 地．设两车行驶的时间为 x （小时），两车之间的距离为 y （千米）， y 与 x 之间的函数关系如图所示，当甲车到达 B 地时，乙车距离 A 地 __100__ 千米．



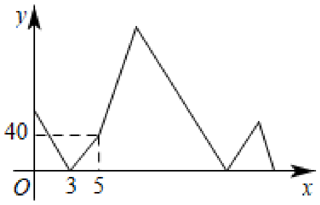
【分析】由图可知 AB 之间的距离为 $300km$ ，甲，乙 3 小时相遇，可以求出甲乙两车的速度和，5 小时的时候，两车之间的距离开始减小，说明甲车到达 B 地，开始返回，从而求出甲车的速度，进一步得到乙车的

速度，问题便迎刃而解了．

【解答】解：由图可知：$AB=300km$，甲，乙两车 3 小时相遇，$\therefore v_{甲}+v_{乙}=300\div 3=100km/h$，$\because$ 甲车 5 小时到达 B 地，$\therefore$ 甲的速度为 $300\div 5=60km/h$，$\therefore$ 乙的速度为 $100-60=40km/h$，$\therefore$ 当甲车到达 B 地时，也就是 5 小时的时候，乙车走了 $40\times 5=200km$，$\therefore$ 乙车距离 A 地 $300-200=100km$，故答案为：100．

【点评】本题考查了函数的图象，明白函数 y 表示的两车之间的距离，认真分析图象中的起点和拐点的含义是解题的关键．

【对点训练2】 **{实际问题判断函数图象★★★}** 小重和小庆相约从学校出发沿同一路线到“开心之洲”玩耍．小重出发 1 分钟后小庆才出发，小重出发 6 分钟后发现自己钱包没有带，于是立即掉头并将速度提高为原来的两倍跑步回学校，回学校取到钱包后保持跑步的速度立即赶往“开心之洲”，最终比小庆早 1 分钟到达．小重两次掉头的时间和取钱包的时间忽略不计，小庆全程保持匀速，小重、小庆相距的路程 y（米）和小庆出发的时间 t（分）之间的函数关系如图所示，则学校到“开心之洲”的路程为 2160 米．



【分析】设小庆的速度为 a 米/分，小重开始的速度为 b 米/分，根据图象可得 3 分钟时，两人相距为 0，5 分钟时，两人相距为 40 米，列方程组可得 a，b 的值，可得小重提速后的速度，设小庆 t 分钟到达．则小重用时 $(t+-6-3-11)$ 分钟，根据路程相等列方程求出 t，小庆的速度 $\times t$ 即可得学校到“开心之洲”的路程．

【解答】解：设小庆的速度为 a 米/分，小重开始的速度为 b 米/分，根据图象可得 3 分钟时，两人相距为 0，5 分钟时，两人相距为 40 米，

$\therefore \begin{cases}3a-4b=0\\5a-6b=40\end{cases}$，解得：$\begin{cases}a=80\\b=60\end{cases}$，即小庆的速度为 80 米/分，小重开始的速度为 60 米/分，$\therefore$ 小重提速后的速度为 $60\times 2=120$（米/分），设小庆 t 分钟到达．则小重用时 $(t+1-6-3-1)$ 分钟，$80t=120(t+1-6-3-1)$，解得：$t=27$，$\therefore$ 学校到“开心之洲”的路程为 $80\times 27=2160$（米）．故答案为：2160．

【点评】本题考查了函数的图象，二元一次方程组的应用，解答本题的关键是明确题意，利用函数的性质和数形结合的思想解答．

【对点训练3】 **{实际问题判断函数图象★★★}** 如图 1，在某个盛水容器内，有一个小水杯，小水杯内

有部分水，现在匀速持续地向小水杯内注水，注满小水杯后，继续注水，小水杯内水的高度 $y(cm)$ 和注水时间 $x(s)$ 之间的关系满足如图 2 的图象，则至少需要 __$\dfrac{20}{3}$__ s 能把小水杯注满．

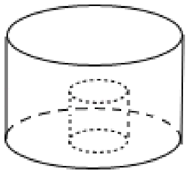


图1

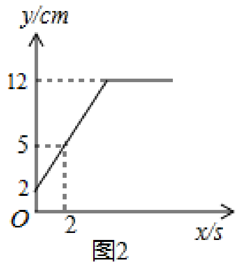


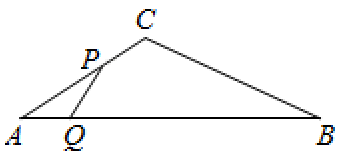
图2

【分析】首先设斜线一次函数的解析式为 $y=kx+b$，然后利用待定系数法即可求得其解析式，再由 $y=12$，即可求得答案．

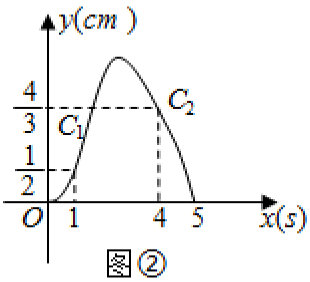
【解答】解：设斜线一次函数的解析式为：$y=kx+b$，将 $(0,2)$，$(2,5)$ 代入得：$\begin{cases}b=2\\2k+b=5\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=1.5\\b=2\end{cases}$，$\therefore$ 解析式为：$y=1.5x+2$，当 $y=12$ 时，$1.5x+2=12$，解得：$x=\dfrac{20}{3}$，$\therefore$ 至少需要 $\dfrac{20}{3}s$ 能把小水杯注满．故答案为：$\dfrac{20}{3}$．

【点评】此题考查了一次函数的实际应用问题．注意求得一次函数的解析式是关键．

【对点训练4】 **｛几何图形（动点）为背景判断函数图象★★★｝**如图①，ΔABC 中，$\angle A=30^{\circ}$，点 P 从点 A 出发以 $2cm/s$ 的速度沿折线 $A\rightarrow C\rightarrow B$ 运动，点 Q 从点 A 出发以 $v\ cm/s$ 的速度沿 AB 运动，P，Q 两点同时出发，当某一点运动到点 B 时，两点同时停止运动，设运动时间为 $x(s)$，ΔAPQ 的面积为 $y(cm^2)$，y 关于 x 的函数图象由 C_1，C_2 两段组成，如图②所示，则 $\sin B=($　　$)$



图①



图②

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{2}{5}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{3}{8}$

【分析】过点 P 作 $PH\perp AB$ 于点 H，然后解直角三角形求出 PH 的长，然后针对点 P 在线段 AC 和线段 BC 上时进行分类讨论求出 ΔAPQ 的面积，再结合函数图象所获得的信息代入求值．

【解答】解：由图②可得，点 P 和点 Q 的运动时间为 $5s$，

$\therefore AC+AB=2\times5=10(cm)$，过点 P 作 $PH\perp AB$ 于点 H，如图 1，当点 P 在线段 AC 上时，$AP=2x(cm)$，

$AQ=vx(cm)$，$\because \angle A=30^{\circ}$，$\therefore PH=AP\sin\angle A=2x\cdot\frac{1}{2}=x(cm)$，$\therefore C_1:y=\frac{1}{2}\cdot x\cdot vx=\frac{1}{2}vx^2$，

由图②可知，点 $(1,\frac{1}{2})$ 在 C_1 图象上，$\therefore \frac{1}{2}v\times1=\frac{1}{2}$，$\therefore v=1(cm/s)$，如图 2，当点 P 在线段 BC 上时，

$BP=(10-2x)cm$，$AQ=x(cm)$，$\therefore PH=BP\sin\angle B=(10-2x)\sin\angle B$，

$\therefore C_2:y=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(10-2x)\sin\angle B=x(5-x)\sin\angle B$，由图②可知，点 $(4,\frac{4}{3})$ 在 C_2 图象上，

$\therefore 4\times1\times\sin\angle B=\frac{4}{3}$，$\therefore \sin\angle B=\frac{1}{3}$，故选：$A$．

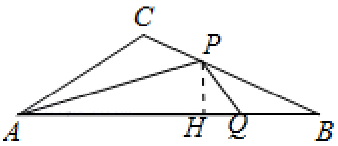


图2

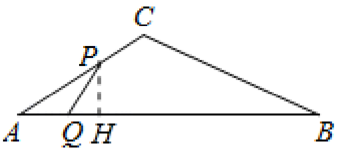


图1

【点评】本题考查了函数的应用、解直角三角形，解题的关键是通过解直角三角形求出 ΔAPQ 的高 PH．

【对点训练5】 **{几何图形(动点)为背景判断函数图象★★★}** (2021•西宁)如图 1，动点 P 从矩形 $ABCD$ 的顶点 A 出发，在边 AB，BC 上沿 $A\to B\to C$ 的方向，以 $1cm/s$ 的速度匀速运动到点 C，ΔAPC 的面积 $S(cm^2)$ 随运动时间 $t(s)$ 变化的函数图象如图 2 所示，则 AB 的长是(　　)

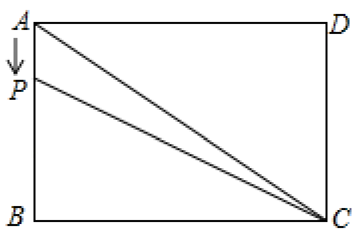


图1

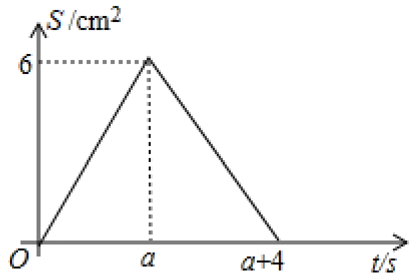


图2

A．$\frac{3}{2}cm$　　B．$3cm$　　C．$4cm$　　D．$6cm$

【分析】由图 2 可知，$AB=a\ cm$，$BC=4cm$，当点 P 到达点 B 时，ΔAPC 的面积为 $6cm^2$，可得出等式 $\frac{1}{2}\cdot a\cdot4=6$，求出 a 的值，即线段 AB 的长．

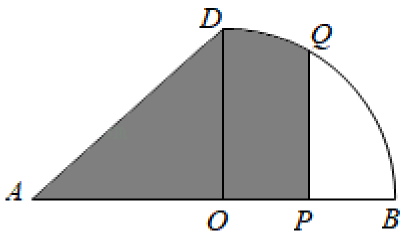
【解答】解：由图 2 可知，$AB=a\ cm$，$BC=4\ cm$，当点 P 到达点 B 时，ΔAPC 的面积为 $6cm^2$，

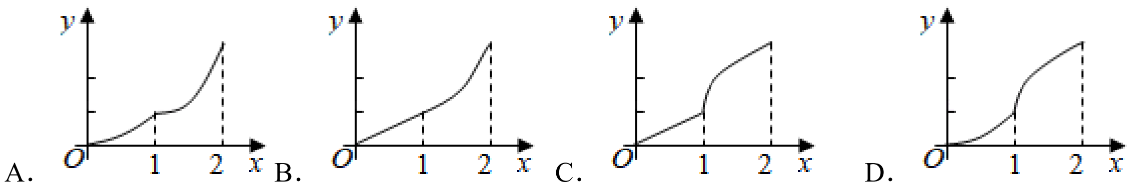
$\therefore \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC=6$，即 $\frac{1}{2}\cdot a\cdot4=6$，解得 $a=3\ cm$．即 AB 的长为 $3cm$．故选：B．

【点评】本题主要考查动点问题中三角形的面积，函数图象与点的运动相结合，注意转折点，即表示面积发生改变的点的含义是解题关键．

【对点训练6】 **{几何图形（动点）为背景判断函数图象★★★}**（2021•日照）如图，平面图形 ABD 由

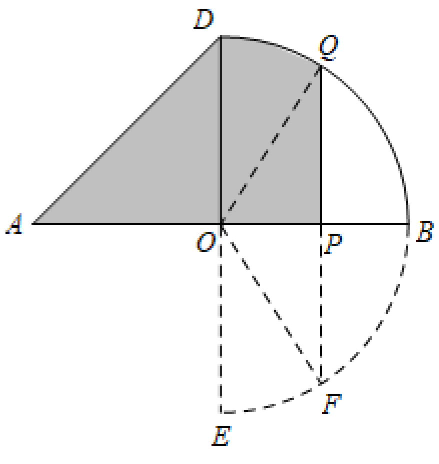
直角边长为 1 的等腰直角 ΔAOD 和扇形 BOD 组成，点 P 在线段 AB 上，$PQ\perp AB$，且 PQ 交 AD 或交 $\overset{\frown}{DB}$ 于点 Q．设 $AP=x(0<x<2)$，图中阴影部分表示的平面图形 APQ（或 $APQD)$ 的面积为 y，则函数 y 关于 x 的大致图象是(　　)





【分析】根据点 Q 的位置，分点 Q 在 AD 上和点 Q 在弧 BD 上两种情况讨论，分别写出 y 和 x 的函数解析式，即可确定函数图象．

【解答】解：当 Q 在 AD 上时，即点 P 在 AO 上时，有 $0<x\leqslant 1$，此时阴影部分为等腰直角三角形，$\therefore y=\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot x=\dfrac{1}{2}x^{2}$，该函数是二次函数，且开口向上，排除 B，C 选项；当点 Q 在弧 BD 上时，补全图形如图所示，



阴影部分的面积等于等腰直角 ΔAOD 的面积加上扇形 BOD 的面积，再减去平面图形 PBQ 的面积即减去 $\dfrac{1}{2}$ 弓形 QBF 的面积，设 $\angle QOB=\theta$，则 $\angle QOF=2\theta$，$\therefore S_{\Delta AOD}=\dfrac{1}{2}\times 1\times 1=\dfrac{1}{2}$，$S_{弓形QBF}=\dfrac{\theta\pi r^{2}}{180}-S_{\Delta QOF}$，

当 $\theta=45^{\circ}$ 时，$AP=x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\approx 1.7$，$S_{弓形QBF}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$，

$y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{4}+\dfrac{\pi}{8}\approx 1.14$，当 $\theta=30^{\circ}$ 时，$AP=x\approx 1.87$，$S_{弓形QBF}=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

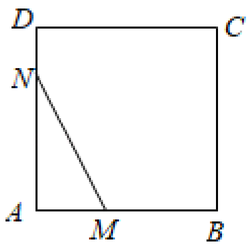
$y=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\pi}{6}\approx 1.24$，当 $\theta=60°$ 时，$AP=x\approx 1.5$，$y\approx 0.98$，

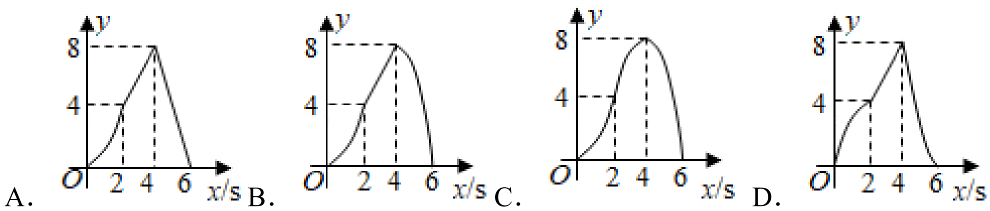
在 A，D 选项中分别找到这两个特殊值，对比发现，选项 D 符合题意．故选：D．

法二、当 $1<x<2$ 时，即 P 在 OB 之间时，设 $\angle QOD=\theta$，则 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $PQ=\cos\theta$，$OP=\sin\theta$，则弧 QD 的长为 θ，此时 S 阴影 $=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta$，$y$ 随 x 的增大而增大，而且增加的速度越来越慢，分析四个选项中的图象，只有选项 D 符合．故选：D．

【点评】本题主要考查了二次函数的图象及性质，图形的面积等内容，选择题中利用特殊值解决问题是常见方法，构造图形表达出阴影部分面积是本题解题关键．

【对点训练7】 **{几何图形（动点）为背景判断函数图象★★★}**（2021•朝阳）如图，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=4$，动点 M 从点 A 出发，以每秒 1 个单位长度的速度沿射线 AB 运动，同时动点 N 从点 A 出发，以每秒 2 个单位长度的速度沿折线 $AD\to DC\to CB$ 运动，当点 N 运动到点 B 时，点 M，N 同时停止运动．设 ΔAMN 的面积为 y，运动时间为 $x(s)$，则下列图象能大致反映 y 与 x 之间函数关系的是（　　）

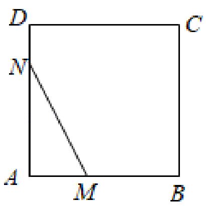




A. B. C. D.

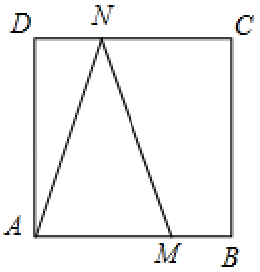
【分析】根据点 N 的运动情况，分点 N 在 AD，DC，CB 上三种情况讨论，分别写出每种情况 y 和 x 之间的函数关系式，即可确定图象．

【解答】解：当点 N 在 AD 上时，即 $0<x<2$

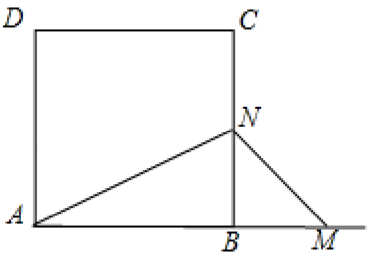


$\because AM=x$，$AN=2x$，$\therefore y=\frac{1}{2}x\cdot 2x=x^2$，此时二次项系数大于 0，$\therefore$ 该部分函数图象开口向上，

当点 N 在 DC 上时，即 $2 \leqslant x < 4$，



此时底边 $AM = x$，高 $AD = 4$，$\therefore y = \dfrac{1}{2} \times 4x = 2x$，$\therefore$ 该部分图象为直线段，当点 N 在 CB 上时，即 $4 \leqslant x < 6$ 时，

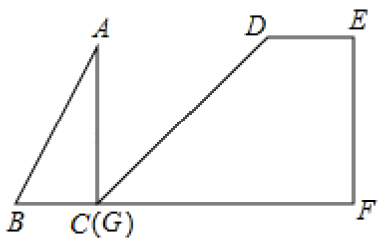


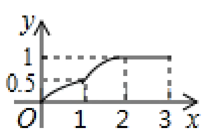
此时底边 $AM = x$，高 $BN = 12 - 2x$，$\therefore y = \dfrac{1}{2}x(12 - 2x) = -x^2 + 6x$，$\because -1 < 0$，$\therefore$ 该部分函数图象开口向下，

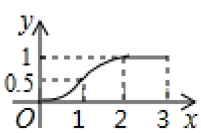
故选：B．

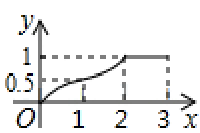
【点评】本题是运动型综合题，考查了动点问题的函数图象、正方形的性质、三角形的面积等知识点．解题关键是深刻理解动点的函数图象，了解图象中关键点所代表的实际意义，理解动点的完整运动过程．

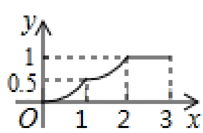
【对点训练8】 **{几何图形（动点）为背景判断函数图象★★★}**（2021•锦州）如图，在四边形 $DEFG$ 中，$\angle E = \angle F = 90^\circ$，$\angle DGF = 45^\circ$，$DE = 1$，$FG = 3$，$Rt\Delta ABC$ 的直角顶点 C 与点 G 重合，另一个顶点 B（在点 C 左侧）在射线 FG 上，且 $BC = 1$，$AC = 2$．将 ΔABC 沿 GF 方向平移，点 C 与点 F 重合时停止．设 CG 的长为 x，ΔABC 在平移过程中与四边形 $DEFG$ 重叠部分的面积为 y，则下列图象能正确反映 y 与 x 函数关系的是(　　)



A．

B．

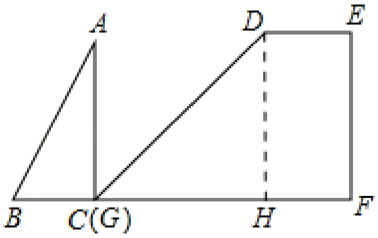
C．

D．

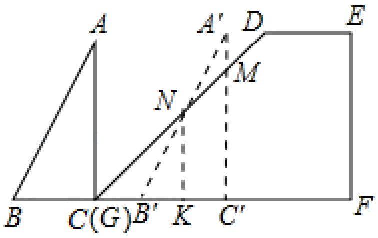
【分析】根据移动过程分三个阶段讨论，第一个是点 B 到达点 G 之前，即 $0 < x < 1$ 时，求出 y 和 x 的关系式，

确定图象，第二个是点C到达点H之前，即$1<x<2$时，求出y和x的关系式，确定图象，第三个是点C到达点F之前，即$2<x<3$时，求出y和x的关系式，确定图象，即可确定选项．

【解答】解：过点D作$DH\perp CF$，



$\because \angle DGF=45^\circ$，$DE=1$，$FG=3$，$\therefore EH=2$，$DH=EF=2$，当$0<x<1$时，重叠部分为等腰直角三角形，且直角边长为$x$，$\therefore y=\frac{1}{2}x^2$，$\because \frac{1}{2}>0$，$\therefore$该部分图象开口向上，当$1<x<2$时，如图，



设$A'B'$与DG交于点N，$A'C'$与DG交于点M，则$S_{重叠}=S_{\Delta GMC}'-S_{\Delta GNB}'$，设$B'K=a$，则$NK=2a$，

$\because GC'=x$，$B'C'=1$，$\therefore GB'=x-1$，$\because \Delta GKN$是等腰直角三角形，$\therefore GK=NK$，$\therefore x-1+a=2a$，

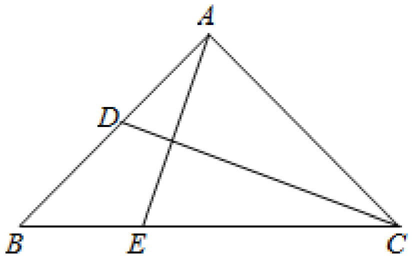
$\therefore a=x-1$，$\therefore NK=2x-2$，$\therefore S_{\Delta GNB'}=\frac{1}{2}(x-1)(2x-2)=x^2-2x+1$，$\because S_{\Delta GMC'}=\frac{1}{2}x^2$，

$\therefore S_{重叠}=\frac{1}{2}x^2-\left(x^2-2x+1\right)=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$，$\because -\frac{1}{2}<0$，$\therefore$该部分图象开口向下，

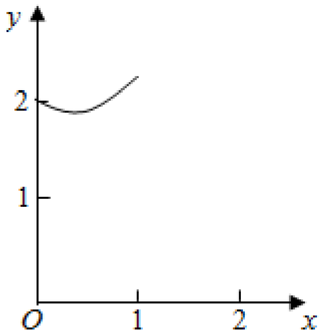
当$2<x<3$时，重叠部分的面积为$S_{\Delta ABC}$，是固定值，$\therefore$该部分图象是平行x轴的线段，故选：B．

【点评】本题主要考查动点问题的函数图象，关键是要把移动过程分成几个阶段，然后根据每个阶段的情况单独讨论，确定y和x之间的函数关系式，从而确定图象．

【对点训练9】　　｛几何图形（动点）为背景判断函数图象★★★｝（2021•武汉）如图（1），在ΔABC中，$AB=AC$，$\angle BAC=90^\circ$，边AB上的点D从顶点A出发，向顶点B运动，同时，边BC上的点E从顶点B出发，向顶点C运动，D，E两点运动速度的大小相等，设$x=AD$，$y=AE+CD$，y关于x的函数图象如图（2），图象过点$(0,2)$，则图象最低点的横坐标是__$\sqrt{2}-1$__．



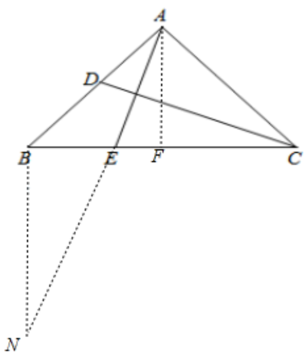
(1)



(2)

【分析】观察函数图象，根据图象经过点$(0,2)$即可推出AB和AC的长，构造$\Delta NBE\cong\Delta CAD$，当$A$、$E$、$N$三点共线时，$y$取得最小值，利用三角形相似求出此时的$x$值即可．

【解答】解：$\because$图象过点$(0,2)$，即当$x=AD=BE=0$时，点D与A重合，点E与B重合，此时$y=AE+CD=AB+AC=2$，$\because\Delta ABC$为等腰直角三角形，$\therefore AB=AC=1$，过点A作$AF\perp BC$于点F，过点B作$NB\perp BC$，并使得$BN=AC$，如图所示：



$\because AD=BE$，$\angle NBE=\angle CAD$，$\therefore\Delta NBE\cong\Delta CAD(SAS)$，$\therefore NE=CD$，又$\because y=AE+CD$，

$\therefore y=AE+CD=AE+NE$，当A、E、N三点共线时，y取得最小值，如图所示，此时：

$AD=BE=x$，$AC=BN=1$，$\therefore AF=AC\cdot\sin45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又$\because\angle BEN=\angle FEA$，$\angle NBE=\angle AFE$

$\therefore\Delta NBE\backsim\Delta AFE$ $\therefore\dfrac{NB}{AF}=\dfrac{BE}{FE}$，即$\dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}-x}$，解得：$x=\sqrt{2}-1$，$\therefore$图象最低点的横坐标为：$\sqrt{2}-1$．

故答案为：$\sqrt{2}-1$．

【点评】本题考查动点问题的函数图象，通过分析动点位置结合函数图象推出AB、AC的长再通过构造三角形全等找到最小值是解决本题的关键．

经典真题

【实战经典1】 （2021•西宁）如图1，动点P从矩形$ABCD$的顶点A出发，在边AB，BC上沿$A\to B\to C$

的方向，以 $1cm/s$ 的速度匀速运动到点 C，ΔAPC 的面积 $S(cm^2)$ 随运动时间 $t(s)$ 变化的函数图象如图 2 所示，则 AB 的长是(　　)

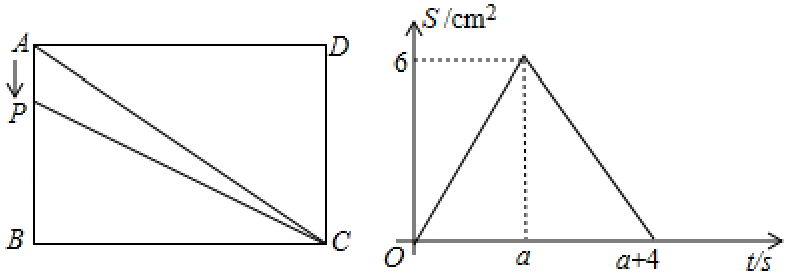


图1　　　　　　图2

A．$\dfrac{3}{2}cm$　　B．$3cm$　　C．$4cm$　　D．$6cm$

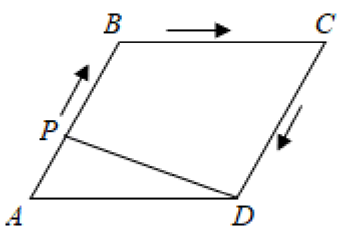
【分析】由图 2 可知，$AB=a\ cm$，$BC=4cm$，当点 P 到达点 B 时，ΔAPC 的面积为 $6cm^2$，可得出等式 $\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot 4=6$，求出 a 的值，即线段 AB 的长．

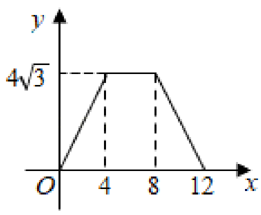
【解答】解：由图 2 可知，$AB=a\ cm$，$BC=4\ cm$，当点 P 到达点 B 时，ΔAPC 的面积为 $6cm^2$，

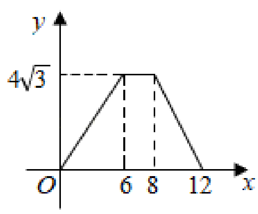
$\therefore \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot BC=6$，即 $\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot 4=6$，解得 $a=3\ cm$．即 AB 的长为 $3cm$．故选：B．

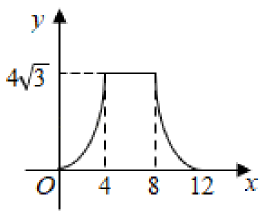
【点评】本题主要考查动点问题中三角形的面积，函数图象与点的运动相结合，注意转折点，即表示面积发生改变的点的含义是解题关键．

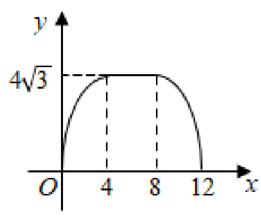
【实战经典2】　（2021•郴州）如图，在边长为 4 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=60^\circ$，点 P 从点 A 出发，沿路线 $A\to B\to C\to D$ 运动．设 P 点经过的路程为 x，以点 A，D，P 为顶点的三角形的面积为 y，则下列图象能反映 y 与 x 的函数关系的是(　　)



A．

B．

C．

D．

【分析】过点 B 作 $BE\perp AD$ 于点 E，由题意易得 $AB=AD=BC=4$，$BE=2\sqrt{3}$，由点 P 的运动，分别计算出，当点 P 从点 A 运动到点 B 时；当在线段 BC 上时；当点 P 在线段 CD 上时，ΔADP 的面积的表达式，由

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/696102124242011004