摘　要

对金融衍生产品定价是金融数学研究的重要问题之一，自1973年Black和Scholes提出Black-Scholes期权定价模型以来，期权定价理论与应用得到了飞速的发展。随着国际金融衍生产品市场的逐步完善与复杂性的提升，标准期权已经难以满足市场需要，作为奇异期权的亚式期权备受关注。近些年，许多学者对亚式期权定价问题进行了深入研究，但大部分的研究都假设波动率和无风险利率为常数，或者不含有跳扩散，这与某些实际情况不符，因此，本文旨在研究亚式期权在随机利率随机波动率带跳扩散模型下的定价问题。

首先，本文通过使用快速傅里叶变换的密度投影方法，得到期权定价模型的特征函数递推式，并结合连续时间马尔可夫链近似和测度变换等方法，给出了随机利率带跳扩散模型下的亚式期权定价公式，包括Vasicek和CIR随机利率模型，以及正态跳、双指数跳、混合正态跳的跳扩散。其次，在此基础上，结合具有相关性的随机波动率，包括Heston、Stein-Stein、Hull-White、3/2、4/2随机波动率模型，使用连续时间马氏链对随机波动率进行近似，再通过构建特征函数的辅助过程得到特征密度函数递推式，从而得到带跳扩散随机利率随机波动率亚式期权定价公式。最后，使用双正交投影法和五点高斯积分等方法进行数值模拟，并与蒙特卡洛模拟方法进行结果对比，数值试验表明该方法是有效的，并且在计算时间上远优于蒙特卡洛模拟。

本文的主要工作是给出了对上述随机利率随机波动率带跳扩散模型的亚式期权定价的方法以及不同参数下的数值模拟结果，证明了此方法定价的有效性，并从理论上为该方法丰富了亚式期权在随机利率随机波动率跳扩散模型上的应用，为今后的期权定价研究打下坚实的基础。

关键词： 亚式期权定价；随机利率；随机波动率；特征函数；快速Fourier变换

Absract

The pricing of financial derivatives is one of the important problems in financial mathematics. Since the Black-Scholes option pricing model was put forward by Black and Scholes in 1973, the theory and application of option pricing have been developed rapidly. With the gradual improvement and complexity of the international financial derivatives market, the standard option has been difficult to meet the needs of the market. As a exotic option, the Asian option has attracted much attention. In recent years, many scholars have studied the pricing of Asian options, but most of them assume that volatility and risk-free interest rate are constant, or do not contain jump diffusion, which is inconsistent with some actual situations. Therefore, this paper aims to study the pricing of Asian options under the stochastic interest rate and stochastic volatility with jump diffusion model.

First of all, in this paper, by using the density projection method of the fast Fourier transform, the recursive formula of the characteristic function of the option pricing model is obtained. Combined with the continuous time Markov chain approximation and the measure transformation method, the pricing formula of the Asian option under the stochastic interest rate with jump diffusion model is given, including the Vasicek and CIR stochastic interest rate models. And normal jumps, double exponential jumps and mixed normal jumps. Secondly, on this basis, stochastic volatility models with correlation are introduced, including Heston, Stein-Stein, Hull-White, 3/2 and 4/2 stochastic volatility models, and the continuous time Markov chain is used to approximate the stochastic volatility, and then the recurrence formula of the characteristic density function is obtained through the auxiliary process of constructing the characteristic function. Thus, the pricing formula of Asian options with jump diffusion stochastic interest rate and stochastic volatility is obtained. Finally, the biorthogonal projection method and five-point Gaussian integral method were used for numerical simulation, and the results were compared with Monte Carlo simulation method. The numerical experiments show that the method is effective, and the calculation time is much better than Monte Carlo simulation.

The main work of this paper is to give the above pricing formula of Asian options with stochastic interest rate stochastic volatility jump diffusion model and the numerical simulation results under different parameters, which proves the validity of the pricing method. This method enriches the application of Asian options in stochastic interest rate stochastic volatility jump diffusion model theoretically, and lays a solid foundation for future option pricing research.

Key words: Asian Option Pricing; Stochastic Interest Rates; Stochastic Volatility; Characteristic Function; Fast Fourier Transform

目　　录

TABLE OF CONTENTS

1 引言

1.1 研究背景及意义

金融是现代经济的核心，随着我国经济发展进入新时代，金融市场在现代经济发展中发挥着举足轻重的作用，投资者在金融市场获得收益的同时也承担着风险。未定权益是一种金融产品，它是在未来某个时刻或以前可实现的权益，未定权益的一个典型例子是期权，期权是一种基于某一标的资产（如股票）的金融合约，分为看涨期权和看跌期权，期权的持有者有权利但无义务在执行日按照期权约定价格买卖一定数量的标的资产（如股票），为了取得这个权利需要付出的代价称为期权金，即期权的价格，期权所定价格的高低将影响买卖双方的投资收益，因此，期权的合理定价是期权研究的核心内容，对期权的深入研究不仅能帮助投资者规避风险，而且有助于发挥金融市场功能，提升市场效率。

期权合约具有灵活多变的特点，随着金融市场的不断发展完善，对于约束条件较少且缺乏弹性而存在局限性的标准期权（如欧式期权和美式期权）来说，难以满足金融市场的特殊需要，因此，涌现了多种不同于标准期权的奇异期权，奇异期权是路径依赖的，执行时的回报不仅与标的资产当时价格有关，还与此前标的资产的价格有关。亚式期权是奇异期权的一种，具有强路径依赖的特征，即在执行时的收益依赖于整个有效期内标的资产所经历价格的平均值，而普通欧式期权的回报只与标的资产到期日时的价格有关。由于价格均值相较某一日价格的波动更小，所以相同条件下亚式期权的价格比欧式期权的价格更便宜，同时，亚式期权能够很好地避免投机者操纵到期日标的资产价格的套利行为，提供更小的到期对冲风险，这些特性迎合了金融市场的需要，使得更加吸引包括国际贸易、证券公司、基金公司、保险公司在内的许多金融机构在风险控制与节约风险管理成本上的广泛应用，因而对亚式期权定价有着重要意义。但由于亚式期权的定价需要考虑平均值的影响，且无法得到平均资产的价格分布，这给定价带来一些困难，也吸引了许多国内外学者对其定价进行研究，他们经过巨大努力取得了很大的成就。

在著名的Black-Scholes期权定价模型[3]中，其假设股票价格服从几何布朗运动，无风险利率r与股票收益的波动率σ均为常数，然而在交易过程中，金融从业者发现这一模型的假设与某些实际情况存在很大差别，首先，由于几何布朗运动是连续的，所以用它刻画的股票价格也是关于时间连续的，但实际的股票价格会发生间断的“跳跃”，为解决这个问题，Merton首次在布朗运动的基础上叠加泊松过程来刻画股票价格，得到著

名的Merton跳扩散模型[33]。其次，在实际金融市场中利率是随时间变化的，并非为常数，特别是在长期运行过程中，利率会受到股票价格、金融政策等因素的影响，出现“均值回复”现象，即利率无论高于或低于某一特定均值都会以很高的概率向均值回归，为了描述利率的这种随机变化，相关研究学者提出具有均值回复的随机利率模型，并不断改进完善。最后，大量研究分析发现，将波动率设为常数进行研究，与某些实际情况并不相符，金融市场中的波动率涉及历史波动率、预期波动率、隐含波动率和实际波动率，一些股票市场呈现出波动率聚类，波动率微笑等特征，为处理这一情况，学者将波动率作为服从某个随机过程的变量，得到随机波动率模型。

目前，大部分对于亚式期权定价的研究都假设波动率和无风险利率为常数，或者不含有跳扩散，这与实际情况不符，尽管有的文献考虑了在随机波动率随机利率模型下的亚式期权定价问题，但却没有考虑到跳扩散过程的影响，又或者跳扩散项过于单一，有的又只研究了随机波动率跳扩散模型而没有考虑到随机利率的情况，对随机利率随机波动率带跳扩散模型的亚式期权进行定价的研究文献却很少，本文将通过使用快速傅里叶变换的密度投影的方法，给出一种高效的亚式期权定价方法。

1.2 国内外研究综述

1.2.1 国外研究现状

期权的定价很早就受到人们的关注，通过构建模型来研究金融衍生产品具有较长的历史，1900年，法国数学家Louis Bachelier[2]在他的博士论文《投机交易理论》中首次运用布朗运动来刻画股票价格的运行，构建随机过程模型，并由此推导出欧式看涨期权的定价公式，但在推导过程中存在一些明显的缺陷：第一是刻画的股票价格会出现负值的情况，与实际情况不符合；第二是假定了平均预期收益率为零；第三是未考虑到资金的时间价值，在当时这篇文章并未受到学术界重视。人们对于金融学的认识大多为描述性的，直到1952年，Markowitz[16]提出的资产组合理论，他将风险和收益进行量化并用理论证明了“不能将所有鸡蛋放在同一个篮子里”的道理，在风险管理中得到重要的应用，被认为是华尔街的第一次革命。1973年美国经济学家Black与Scholes[3]他们提出了著名的B-S的期权定价模型，给出了欧式期权的显示定价公式，文章一经发表，便掀起了华尔街第二次革命，并因此在1997年获得诺贝尔经济学奖，尽管公式在假设上存在一些局限性和偏差，但在理论创新方面他们做出了突出的贡献，具有很强的应用价值，是期权解析定价的重要开端。随着对期权定价研究的深入，B-S模型的假设往往与实际情况存在矛盾，为使得定价更符合市场变化，不少研究者在经典的B-S期权定价模型上进行创新和改进，引入跳扩散项、随机利率、随机波动率分别解决股票价格非连续、固定利率、固定波动率等问题，这些含有随机因素的期权定价模型至今仍然被市

场所运用。

Merton[34]对B-S期权定价公式进行拓展，放宽了期权在有效期内股票不支付红利和固定利率的假设，得到B-S-M 模型。随着研究进一步深入，研究者意识到B-S-M模型也存在局限性，相继提出了Vasicek模型[39]、CIR(Cox-Ingersoll-Ross)模型[6]等随机利率模型。随着期权交易市场不断成熟，不少研究者对经典B-S模型中波动率为常数的假设进行修正，1987年，Hull和White[15]首次提出了随机波动率模型，并分别讨论了波动率与股票价格无关与相关两种情况的欧式看涨期权定价问题，发现利用B-S定价公式经常对期权定价过高，且定价过高的程度随着期权到期时长的增长而增加。1991年，Stein等[37]提出单因素随机波动率模型，在波动率由算术Omstein-Uhlenbeck过程驱动条件下，推导出期权价格的封闭解。1993年，Heston[14]提出的Heston随机波动率模型能够很好地描述隐含波动率的“微笑”现象，使得资产价格更加符合实际的金融数据特征。2012年，Drimus[8]通过非仿射变换的方法提出3/2随机波动率模型，该模型由于其随机微分方程中扩散项的指数为3/2而得名。同年，Goard等[12]利用3/2模型对VIX期权进行定价，并给出解析解。2016年，Grasselli[13]为了更准确拟合市场隐含波动率曲面，结合Heston模型和3/2模型提出4/2随机波动率模型，并详细证明和讨论了4/2模型的数学理论基础。这些模型都被不少学者运用在亚式期权的研究上，丰富了亚式期权的研究成果，如Kim和Wee[18](2014)、Mehrdoust[31](2015)、Kirkby[26](2020)等。

对于亚式期权定价的研究，很多学者给出了不同的方法，其中，偏微分方程方法的研究有，Rogers和Shi[36](1995) 利用尺度方法变换将亚式期权定价问题转化为求解二元抛物线型偏微分方程问题，用有限差分的方法给出亚式期权的价格。Dubois等[9](2005)考虑到将标准数值方法应用于Rogers和Shi[36]提出的偏微分方程时的困难，推导出了一种非常精确和快速求解方程的数值方法。Alziary等[1](1996)首次推导出描述亚式期权价格的单变量偏微分方程。Kim[19](2009)研究了亚式期权定价中边界条件问题的一维退化抛物型偏微分方程，并证明了该问题的广义解是经典解。蒙特卡洛模拟方法的研究有，Kemna和Vorst[17](1990)通过蒙特卡洛模拟的方法计算出算术平均期权的价格，并证明了平均期权的价格远低于类似的标准欧式期权。Mehrdoust[32](2015)结合多重控制变量与对偶变量两种方差缩减技术，提出了算术亚式期权定价算法，以数值实验证明了算法的有效性。Dingec等[7](2014)将控制变量与条件蒙特卡洛相结合，提出一种新的方差缩减方法，用于亚式期权定价，并考虑了*Lévy*过程、Heston随机波动模型和状态切换过程三种情况，结果表明新方法比现有方法表现更好。运用Laplace变换方法的研究有，Geman和Yor[11](1993)用Laplace变换推导了算术亚式看涨期权的表达式，但该变换在处理期权定价问题时，只在特定情形下存在，具有一定的局限性。而相比

于Laplace变换，Fourier变换可以将偏微分方程转换成代数函数，适用范围更广，并且不需要依赖于参数的范围，有着更快更稳的计算性能。与Fourier变换法相关的研究有，Fusai等[10](2008)研究了*Lévy*过程下的亚式期权定价，给出了几何亚式期权的Fourier变换的闭合解，对于算术亚式期权，利用递归求积方法推导出递归理论公式，并将结果与蒙特卡洛模拟进行比较。Cerny和Kyriakou[5](2011)改进了用于离散亚式期权定价的快速傅里叶变换算法。Kirkby[21](2016)基于对偶性与快速Fourier变换的密度投影法，提出了一种在*Lévy*过程下的算术亚式期权新方法。其他的研究方法还有，Turnbull等[38](1991)利用Edgeworth方法展开算术亚式期权的近似解，经蒙特卡洛估计证明该算法是准确的。这些方法在亚式期权定价上都得到了较好的结果。

1.2.2 国内研究现状

国内对于亚式期权定价的问题研究起步相对较晚，1998年，胡日东[46]发表的《关于亚式股票期权及其定价方法的研究》是我国第一次出现的亚式期权定价的研究文献，他使用T时刻的股票均值价格来近似基于算术平均类型的股票价格，从而获得亚式看涨期权价格的近似值。1999年，许端和蔡金绪[64]在《亚式期权估价的最新进展》一文中，讨论了用不同的概率分布对算术平均亚式期权近似估价的各种方法。2000年，郑小迎和陈金贤[69]利用无套利原理，创建了能够反映亚式期权路径依赖特征的多因素定价模型，并分别对平均价格型亚式期权和平均执行价格型亚式期权进行讨论。同年，党开宇等[43]介绍、分析了包括蒙特卡洛模拟、偏微分方程法在内的五种亚式期权定价方法，得出了蒙特卡洛模拟方法虽然得出结果精确，但该方法操作复杂、工作量大，且无法作灵敏度分析的结论。2001年，章珂等[68]在参数都假定为常数的条件下，推导出几何平均亚式看涨期权的解析定价公式。

随后几年，我国学者对于更加复杂的亚式期权模型以及期权定价计算方法进行了深入地探讨与研究，2003 年，王莉君和张曙光[61]在利率满足Vasicek模型时，研究了浮动敲定价格的算术亚式期权定价问题，并利用有限差分格式进行数值计算。同年，孙坚强等[58]利用泰勒展开方法对离散算术平均亚式期权进行近似定价。2004年，姚落根等[67]在假设利率服从Vasicek随机利率模型的条件下，分别给出了平均价格型和平均执行价格型的几何亚式期权定价公式以及买权－卖权平价公式。同年，曲军恒等[57]以B-S模型为基础，对固定敲定价格的亚式期权进行研究，得到了有交易费用的亚式期权定价公式。2005年，詹惠蓉与程乾生[66]采用拟蒙特卡洛法中Halton序列来估计算术平均亚式期权的价格。同年，马俊海等[56]将分层抽样技术和控制变量技术引入重要性抽样模拟估计的分析框架，提出关于期权定价蒙特卡洛模拟法中更为有效的综合性方差减少技术，并对算术平均亚式期权定价进行了实证分析。2008年，刘宣会和