第八节　函数与方程

1 备考基础·查清　忆知识　明误区　悟方法　必备知识总动员

一 必记2个知识点　忆一忆　填一填

1．函数的零点与方程的实数解

(1)函数的零点：

函数 $y=f(x)$的图像与横轴的交点的<u>横坐标</u>称为这个函数的零点．

(2)利用函数性质判定函数零点：

若函数 $y=f(x)$在闭区间$[a，b]$上的图像是连续曲线，并且在区间端点的函数值符号相反，即 $f(a)f(b)<0$，则在区间$(a，b)$内，函数 $y=f(x)$至少有一个零点，即相应的方程 $f(x)=0$ 在区间$(a，b)$内至少有一个实数解．

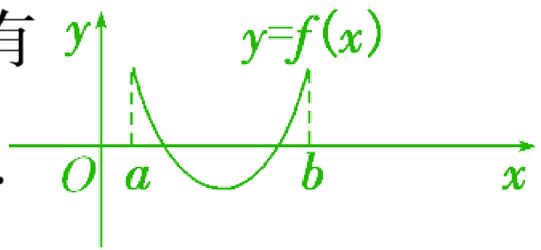
2．二分法

每次取区间的中点，将区间一分为二，再经比较，按需要留下其中一个小区间的方法称为二分法．

二 必明2个易误点　想一想　试一试

1．函数 $y=f(x)$的零点即方程 $f(x)=0$ 的实根，易误为函数点．

2．由函数 $y=f(x)$在闭区间$[a，b]$上有零点不一定能推出 $f(a)\cdot f(b)<0$，如图所示．



所以 $f(a)\cdot f(b)<0$ 是 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上有零点的充分不必要条件．

[试一试]

1．若函数 $f(x)=ax+b$ 有一个零点是 2，那么函数 $g(x)=bx^2-ax$ 的零点是　　　　(　　)

A．0,2　　　　B．0，$\frac{1}{2}$

C．0，$-\frac{1}{2}$　　　　D．2，$-\frac{1}{2}$

解析：$\because 2a+b=0$，

$\therefore g(x)=-2ax^2-ax=-ax(2x+1)$.

$\therefore$ 零点为0和$-\frac{1}{2}$.

答案：C

2．函数$f(x)=2^x+3x$的零点所在的一个区间是(　　)

A．$(-2，-1)$　　B．$(-1,0)$

C．$(0,1)$　　D．$(1,2)$

答案：B

三 必会3个方法 悟一悟 练一练

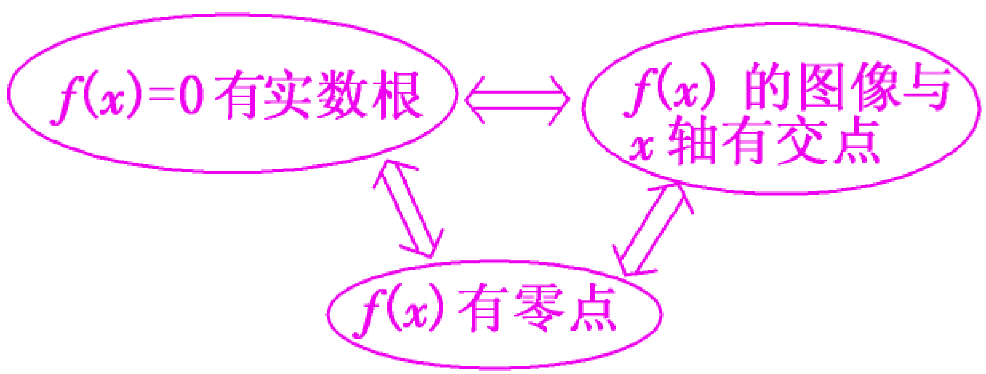
1．函数零点个数的判断方法

(1)直接求零点：令 $f(x)=0$，如果能求出解，则有几个解就有几个零点；

(2)零点存在性定理：利用定理不仅要求函数在区间$[a, b]$上是连续不断的曲线，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，还必须结合函数的图像与性质(如单调性、奇偶性)才能确定函数有多少个零点；

(3)利用图像交点的个数：画出两个函数的图像，看其交点的个数，其中交点的横坐标有几个不同的值，就有几个不同的零点．

2．三个等价关系(三者相互转化)



3．用二分法求函数零点近似值的步骤

第一步：确定区间$[a，b]$，验证$f(a)\cdot f(b)<0$，给定精确度ε;

第二步：求区间$(a，b)$的中点c.

第三步：计算$f(c)$;

①若$f(c)=0$，则c就是函数的零点；

②若$f(a)\cdot f(c)<0$，则令$b=c$(此时零点$x_0\in(a，c)$)；

③若$f(c)\cdot f(b)<0$，则令$a=c$(此时零点$x_0\in(c，b)$).

第四步：判断是否达到精确度ε：即若$|a-b|<\varepsilon$，则得到零点近似值a(或b)，否则重复第二、三、四步.

[练一练]

(2014·中山模拟)函数$f(x)=e^x+x-2$的零点所在的一个区间是 (　　)

A．$(-2,-1)$　　B．$(-1,0)$

C．$(0,1)$　　D．$(1,2)$

解析：$\because f'(x)=e^x+1>0$，

$\therefore f(x)=e^x+x-2$在R上是增函数.

而$f(-2)=e^{-2}-4<0$，

$f(-1)=e^{-1}-3<0$，

$f(0)=-1<0$，

$f(1)=e-1>0$，

$f(2)=e^2>0$，$\therefore f(0)\cdot f(1)<0$.

故(0,1)为函数$f(x)$的零点所在的一个区间.

答案：C

考点一 函数零点所在区间的判定 自主练透型

1．(2014·保定调研)函数 $f(x)=\log_3 x+x-2$ 的零点所在的区间为 (　　)

A．(0,1)　　B．(1,2)

C．(2,3)　　D．(3,4)

解析：法一：函数$f(x)=\log_3x+x-2$的定义域为$(0，+\infty)$，并且在$(0，+\infty)$上递增、连续，又$f(1)=-1<0$，$f(2)=\log_3 2>0$，所以函数$f(x)=\log_3x+x-2$有唯一的零点且零点在区间$(1,2)$内.

法二：作出函数$y=\log_3x$与$y=-x+2$的图像(图略)，不难看出其交点的横坐标在区间$(1,2)$内，故选 B.

2．(2013·朝阳模拟)函数 $f(x)=2^x-\frac{2}{x}-a$ 的一个零点在区间(1,2)内，则实数 a 的取值范围是 (　　)

A．(1,3)　　B．(1,2)

C．(0,3)　　D．(0,2)

解析：由条件可知 $f(1)f(2)<0$，即 $(2-2-a)\cdot(4-1-a)<0$，即 $a(a-3)<0$，解得 $0<a<3$.

答案：C

3.函数$f(x)=x^2-3x-18$在区间[1,8]上________(填“存在”或“不存在”)零点.

解析：法一：$\because f(1)=1^2-3\times1-18=-20<0$，

$f(8)=8^2-3\times8-18=22>0$，$\therefore f(1)\cdot f(8)<0$，

又$f(x)=x^2-3x-18$，$x\in[1,8]$的图像是连续的，

故$f(x)=x^2-3x-18$，$x\in[1,8]$存在零点.

法二：令$f(x)=0$，得$x^2-3x-18=0$，

$x\in[1,8]$，$\therefore(x-6)(x+3)=0.$

$\because x=6\in[1,8]$，$x=-3\notin[1,8]$，

$\therefore f(x)=x^2-3x-18$，$x\in[1,8]$存在零点.

答案：存在

[类题通法]

判断函数零点所在区间的方法

判断函数在某个区间上是否存在零点，要根据具体题目灵活处理．当能直接求出零点时，就直接求出进行判断；当不能直接求出时，可根据零点存在性定理判断；当用零点存在性定理也无法判断时可画出图像判断．

考点二 判断函数零点个数 师生共研型

[典例] (1)已知函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant 0, \\ \log_2 x, & x>0, \end{cases}$ 则函数 $y=f(f(x))+1$ 的零点个数是 ( )

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

思路点拨 → 先求使f(f(x))= -1成立的f(x)的值， → 由f(x)= -2，f(x)= $\frac{1}{2}$ 可求得x的值.

[解析] (1)由 $f(f(x))+1=0$ 可得 $f(f(x))=-1$，

又由 $f(-2)=f(\frac{1}{2})=-1$.可得 $f(x)=-2$ 或 $f(x)=\frac{1}{2}$.

若 $f(x)=-2$，则 $x=-3$ 或 $x=\frac{1}{4}$；

若 $f(x)=\frac{1}{2}$，则 $x=-\frac{1}{2}$或 $x=\sqrt{2}$，

综上可得函数 $y=f(f(x))+1$ 有 4 个零点.

考点二 判断函数零点个数 ▶师生共研型

(2)函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)$ 的零点个数为 ( )

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3