第一章　预备知识

本章将介绍所用到的一些基本概念, 如量子比特、量子态、运算(内积、外积、张量积)、量子测量[26] 及正交态局域区分的相关定义和重要引理[4, 13, 16, 24, 28, 31, 36, 39] .

1.1　量子比特

经典比特确定地处于一个状态 0 或 1, 量子比特作为描述具有特定属性的数学对象, 处于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的叠加状态, 其数学形式为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的线性组合:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \tag{1.1}$$

其中 $|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, “$|\ \rangle$”称为 Dirac 记号, α 和 β 为复数. 换言之, 量子比特是二维复向量空间中的向量. $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 称为计算基, 是构成二维复向量空间的一组标准正交基.

对量子比特进行测量时, 得到 0 的概率为 $|\alpha|^2$, 得到 1 的概率为 $|\beta|^2$. 因为概率之和是 1, 故 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, 这要求量子比特的状态要归一化到单位长度. 因此, 量子比特的状态是二维复向量空间中的单位向量.

两个经典比特共有四种可能状态: 00, 01, 10 和 11. 相应地, 一个双量子比特有四个计算基态, 记作 $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ 和 $|11\rangle$. 双量子比特可以处于四个基态的叠加, 具体描述如下:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle, \tag{1.2}$$

其中 $\sum_{x\in\{0,1\}^2} |\alpha_x|^2 = 1$.

1.2　量子态

量子态依据其能否可以只用单一态矢量(含这个态的叠加形式)表述就能将这个状态分为**纯态**和**混合态**. 当系统的状态完全可知, 且可以用 Hilbert 空间的一个向量描述时, 这样的状态就称作纯态. 在量子力学中, 任何物理系统都可以由 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的态矢量 $|\psi\rangle$ 来描述. N 体 d 维系统 $\mathcal{H}$ 中的纯态 $|\psi\rangle$ 都可表示为:

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_N} a_{i_1 i_2\cdots i_N}|i_1 i_2\cdots i_N\rangle, \tag{1.3}$$

其中 $a_{i_1 i_2\cdots i_N} \in \mathbb{C}, i_1, i_2, \cdots, i_N \in \mathbb{Z}_d$, 且 $\sum\limits_{i_1,i_2,\cdots,i_N} |a_{i_1 i_2\cdots i_N}|^2 = 1$.

1.2.1 直积态和纠缠态

在 N 体量子系统中, 如果纯态 $|\psi\rangle$ 能够写成 N 个子系统的直积形式

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_N\rangle, \tag{1.4}$$

则称之为**直积态**, 否则就称为**纠缠态**.

如果纯态 $|\psi\rangle$ 在任意二划分下都是纠缠态, 则称之为**真正纠缠态**. 例如, 3-qubit 系统 Greenberger-Horne-Zeilinger 态 (简称 GHZ 态) $(|000\rangle + |111\rangle)/\sqrt{2}$ 和 W 态 $(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)/\sqrt{3}$ 都是真正纠缠态.

下面给出三体系统 $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2} \otimes \mathbb{C}^{d_3}$ 上三类重要量子态:

(i) **类-GHZ 态**: $(|i_1\rangle_A|j_1\rangle_B|k_1\rangle_C - |i_2\rangle_A|j_2\rangle_B|k_2\rangle_C)/\sqrt{2}$, 这里 $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$, $k_1 \neq k_2$.

(ii) **类-W 态**: $(|i\rangle_A|j\rangle_B|k\rangle_C + \omega_3^1|j\rangle_A|k\rangle_B|i\rangle_C + \omega_3^2|k\rangle_A|i\rangle_B|j\rangle_C)/\sqrt{3}$, 这里 i, j, k 不全相同, 即 $(i,j,k) \in \mathbb{Z}_{d_1} \times \mathbb{Z}_{d_2} \times \mathbb{Z}_{d_3} \backslash \{(a,a,a)\}$

(iii) **停止态 (stopper 态)**: $|S\rangle = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}_{d_1}} |i\rangle_A\right) \otimes \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}_{d_2}} |j\rangle_B\right) \otimes \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}_{d_3}} |k\rangle_C\right)$.

特别指出, 类-GHZ 态和类-W 态都是与 stopper 态相互正交的真正纠缠态.

1.2.2 不可扩展直积基

在多体系统 $\mathcal{H} = \otimes_{i=1}^m \mathcal{H}_i$ 中, 给定一个由若干正交直积态组成的集合 $\mathcal{S}$, 集合 $\mathcal{S}$ 张成的子空间记作 $\mathcal{H}_\mathcal{S}$, $\mathcal{H}_\mathcal{S}^\perp$ 表示 $\mathcal{H}_\mathcal{S}$ 的补空间. $\otimes_{i=1}^m \mathcal{H}_i$ 的局域扩张空间记作 $\mathcal{H}_{ext} = \otimes_{i=1}^m (\mathcal{H}_i \oplus \mathcal{H}_i')$.

如果 $\mathcal{S}$ 可以张成整个空间 $\mathcal{H}$, 则称集合 $\mathcal{S}$ 为**完备直积基** (completable product basis). 如果 $\mathcal{S}$ 只能张成 $\mathcal{H}$ 的一个非平凡子空间 $\mathcal{H}_\mathcal{S}$, 即 $\mathcal{H}_\mathcal{S}^\perp$ 中所含正交直积态的个数小于 $\mathcal{H}_\mathcal{S}^\perp$ 的维数, 则称集合 $\mathcal{S}$ 为**不可完备直积基** (uncompletable product basis, 简称 UCPB). 如果 $\mathcal{S}$ 在任意局域扩张空间 $\mathcal{H}_{ext}$ 上都是 UCPB, 则称集合 $\mathcal{S}$ 为**强不可完备直积基** (strongly uncompletable product basis, 简称 SUCPB). 如果 $\mathcal{H}_\mathcal{S}^\perp$ 中不包括直积态, 则称集合 $\mathcal{S}$ 为**不可扩展直积基** (unextendible product basis, 简称 UPB). 不可扩展直积基作为一类特殊的不可完备直积基, 在量子信息中扮演着重要的角色.

例如, 2-qutrit 系统中下列 5 个正交直积态构成的集合为不可扩展直积基, 称为 TILES UPB[4]:

$$\begin{aligned}
&|\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|0-1\rangle, \quad |\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0-1\rangle|2\rangle, \\
&|\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle|1-2\rangle, \quad |\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1-2\rangle|0\rangle, \\
&|\phi_4\rangle = \frac{1}{3}|0+1+2\rangle|0+1+2\rangle.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

在 $\mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4$ 中, 下列 9 个正交直积态构成的集合为不可扩展直积基. 该结构可以推广到 $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ (n 是偶数), 称之为 GenTiles1 UPB[13]:

$$
\begin{aligned}
|\psi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle|0-1\rangle, \qquad |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1-2\rangle|0\rangle, \\
|\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle|1-2\rangle, \qquad |\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|2-3\rangle|1\rangle, \\
|\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle|2-3\rangle, \qquad |\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|3-0\rangle|2\rangle, \\
|\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|3\rangle|3-0\rangle, \qquad |\psi_7\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0-1\rangle|3\rangle, \\
|\psi_8\rangle &= \frac{1}{4}|0+1+2+3\rangle|0+1+2+3\rangle.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

1.2.3 U-砖块结构

考虑两体系统 $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ 的砖块结构 $\mathcal{T}$, 它是一个由 s 个互不相交的砖块 $\{t_i\}_{i=1}^s$ 铺设而成的 $m \times n$ 矩形, 砖块结构用 $\mathcal{T} = \cup_i \{t_i\}$ 来表示, 其中每一个砖块 t_i 都是矩形, 一个矩形的行坐标和列坐标可以不连续, 砖块 t_i 包含的所有单元格都标注着数字 i. 为方便起见, 用 R_i 和 C_i 表示砖块 t_i 的行坐标和列坐标.

如图 1.1 所示, 由式 (1.5) 给出的 TILES UPB $\{|\phi_i\rangle\}_{i=0}^4$ 对应的砖块结构为 $\mathcal{T}_1 = \cup_{i=0}^4 t_i$, 其中所有单元格形成砖块 t_4. 由式 (1.6) 给出的 $\{|\psi_i\rangle\}_{i=0}^8$ 对应的砖块结构为 $\mathcal{T}_2 = \cup_{i=0}^8 t_i$, 其中所有单元格形成砖块 t_8.

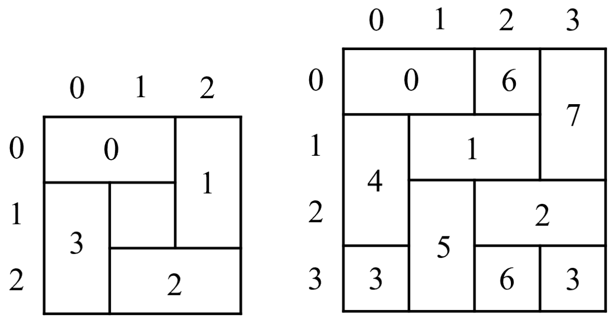

图 1.1: 左图为 TILES UPB 对应的砖块结构 $\mathcal{T}_1$, 右图为 $\{|\psi_i\}_{i=0}^8$ 对应的砖块结构 $\mathcal{T}_2$.

如果 T 是 $\mathcal{T}$ 的子矩形, 那么 T 被称为 $\mathcal{T}$ 的一个**特殊矩形**. 给定一个砖块结构 $\mathcal{T}$, 如果 $\mathcal{T}$ 中的任何特殊矩形 T 不能被分割成两个更小的特殊矩形或砖块, 则称 $\mathcal{T}$ 为 **U-砖块结构**[31].

定理 1.1 [31] 在 $\mathbb{C}^m \otimes \mathbb{C}^n$ 中给定一个具有 s 个砖块的砖块结构 $\mathcal{T}$, 其对应一个数目为 $mn - s + 1$ 的正交直积态集合 $\mathcal{S}$. 集合 $\mathcal{S}$ 是一个不可扩展直积基当且仅当 $\mathcal{T}$ 是 U-砖块结构.

类似地, 砖块结构与不可扩展直积基的关系可以推广到多体系统. 考虑三体系统 $\mathbb{C}^{d_1}\otimes\mathbb{C}^{d_2}\otimes\mathbb{C}^{d_3}$ 的砖块结构 $\mathcal{C}$, 它是一个由 s 个互不相交的砖块 $\{t_i\}_{i=1}^s$ 铺设而成的 $d_1\times d_2\times d_3$ 立方体, 每一个砖块 t_i 都是小立方体. 为方便起见, 用 L_i, W_i 和 H_i 表示砖块 t_i 长宽高坐标 (可以不连续). 砖块结构用 $\mathcal{C}=\cup_i\{t_i\}$ 来表示, 砖块 t_i 包含的所有立方体同样用数字 i 标注. 如果 C 是 $\mathcal{C}$ 的子立方体, 那么 C 被称为 $\mathcal{C}$ 的一个**特殊立方体**. 给定一个砖块结构 $\mathcal{C}$, 如果 $\mathcal{C}$ 中的任何特殊矩形 C 不能被分割成两个更小的特殊立方体或砖块, 则称 $\mathcal{C}$ 为 **U-砖块结构**. 在 $\mathbb{C}^{d_1}\otimes\mathbb{C}^{d_2}\otimes\mathbb{C}^{d_3}$ 中给定一个具有 s 个砖块的砖块结构 $\mathcal{C}$, 其对应一个数目为 $d_1d_2d_3-s+1$ 的正交直积态集合 $\mathcal{S}$. 集合 $\mathcal{S}$ 是一个不可扩展直积基当且仅当 $\mathcal{C}$ 是 U-砖块结构.

2003 年, DiVincenzo 等人[13] 提出强不可完备直积基的概念. 为方便证明一个正交直积态集合是强不可完备直积基, Shi 等人在文献[36]中给出重要引理.

引理 1.2 [36] *在 $\mathcal{H}=\otimes_{i=1}^n\mathcal{H}_i$ 中给定一个正交直积态集合 $\mathcal{S}$. 如果 $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{\perp}$ 中的所有直积态不能张成 $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{\perp}$, 则称集合 $\mathcal{S}$ 是一个强不可完备直积基.*

1.3 Hilbert 空间上的运算

1.3.1 内积

内积是向量空间上的二元复数函数. 两个向量 $|\nu\rangle$ 和 $|\omega\rangle$ 的内积是一个复数, 内积 $(|\nu\rangle,|\omega\rangle)$ 在量子力学中的标准符号为 $\langle\nu|\omega\rangle$, 其中 $|\nu\rangle$ 和 $|\omega\rangle$ 是内积空间中的向量, 符号 $\langle\nu|$ 表示向量 $|\nu\rangle$ 的对偶向量, 对偶运算是从内积空间 V 到复数 C 的一个线性算子, 对偶向量的矩阵表示正是行向量.

从 $V\times V$ 到 C 的函数 $(\cdot,\cdot)$ 是内积, 如果它满足以下条件:

(1) $(\cdot,\cdot)$ 对第二个自变量是线性的, 即

$$(|\nu\rangle,\Sigma_i\lambda_i|\omega_i\rangle)=\Sigma_i\lambda_i(|\nu\rangle,|\omega_i\rangle).$$

(2) $(|\nu\rangle,|\omega\rangle)=(|\omega\rangle,|\nu\rangle)^*$.

(3) $(|\nu\rangle,|\nu\rangle)\geq 0$, 当且仅当 $|\nu\rangle=0$ 时取等号.

例如, C^n 具有如下定义的一个内积:

$$((y_1,\cdots,y_n),(z_1,\cdots,z_n))\equiv\Sigma_i y_i^* z_i=\begin{pmatrix} y_1^*\cdots y_n^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}.$$

带有内积的向量空间称为内积空间.

1.3.2 外积

外积表示是利用内积表示线性算子的一个有用办法. 设 $|v\rangle$ 是内积空间 V 中的向量, 而 $|w\rangle$ 是内积空间 W 中的向量, 定义 $|w\rangle\langle v|$ 为从 V 到 W 的线性算子:

$$(|w\rangle\langle v|)(|v'\rangle) \equiv |w\rangle\langle v|v'\rangle = \langle v|v'\rangle|w\rangle.$$

表达式 $|w\rangle\langle v|v'\rangle$ 有两种可能的含义: 算子 $|w\rangle\langle v|$ 在 $|v'\rangle$ 上的作用, $|w\rangle$ 与一个复数 $\langle v|v'\rangle$ 相乘.

外积概念的有用性可以从标准正交向量的称为完备性关系的重要结果看出. 令 $|i\rangle$ 为向量空间 V 的任意标准正交基, 于是任意向量 $|v\rangle$ 可写成 $|v\rangle = \sum_i v_i|i\rangle$, v_i 是一组复数. 注意到 $\langle i|v\rangle = v_i$, 于是

$$(\sum_i |i\rangle\langle i|)|v\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|v\rangle = \sum_i v_i|i\rangle = |v\rangle.$$

由于最后一个等式对所有 $|v\rangle$ 成立, 故有

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = I,$$

这个等式称为完备性关系. 完备性关系的一个应用是把任意线性算子表示成外积形式. 设 $A\colon V \to W$ 是一个线性算子, $|v_i\rangle$ 是 V 的一个标准正交基, 且 $|w_j\rangle$ 是 W 的一个标准正交基, 两次应用完备性关系得到

$$A = I_W A I_V = \sum_{ij} |w_j\rangle\langle w_j|A|v_i\rangle\langle v_i| = \sum_{ij}\langle w_j|A|v_i\rangle|w_j\rangle\langle v_i|,$$

这就是 A 的外积表示. 从此式还可以看到相对于输入基 $|v_i\rangle$ 和输出基 $|w_j\rangle$, A 的第 i 列第 j 行元素是 $\langle w_j|A|v_i\rangle$.

1.3.3 张量积

张量积是将向量空间合在一起, 构成更大向量空间的一种方法, 这个构造对理解量子力学的多粒子系统很关键.

设 V 和 W 是维数分别是 m 和 n 的向量空间, 并假定 V 和 W 是 Hilbert 空间, 于是 $V \otimes W$ (读作“ V 张量 W”)是一个 mn 维向量空间. $V \otimes W$ 的元素是 V 的元素 $|v\rangle$ 和 W 的元素 $|w\rangle$ 的张量积 $|v\rangle \otimes |w\rangle$ 的线性组合. 特别地, 如果 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 是 V 和 W 的标准正交基, 则 $|i\rangle \otimes |j\rangle$ 是 $V \otimes W$ 的一个基, 常用缩写符号 $|v\rangle|w\rangle$, $|v, w\rangle$ 或 $|vw\rangle$ 来表示张量积 $|v\rangle \otimes |w\rangle$. 例如, 当 V 是以 $|0\rangle, |1\rangle$ 为基向量的二维向量空间, 则 $|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle$ 是 $V \otimes V$ 的一个元素.

由定义, 张量积满足如下的基本性质:

(1) 对任意标量 z, V 的元素 $|v\rangle$ 和 W 的元素 $|w\rangle$, 满足

$$z(|v\rangle \otimes |w\rangle) = (z|v\rangle) \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes (z|w\rangle).$$

(2) 对 V 中任意的 $|v_1\rangle$ 和 $|v_2\rangle$ 和 W 中的 $|w\rangle$, 满足

$$(|v_1\rangle + |v_2\rangle) \otimes |w\rangle = |v_1\rangle \otimes |w\rangle + |v_2\rangle \otimes |w\rangle.$$

(3) 对 V 中任意的 $|v\rangle$ 和 W 中的 $|w_1\rangle$ 和 $|w_2\rangle$, 满足

$$|v\rangle \otimes (|w_1\rangle + |w_2\rangle) = |v\rangle \otimes |w_1\rangle + |v\rangle \otimes |w_2\rangle.$$

设 $|v\rangle$ 和 $|w\rangle$ 分别是 V 和 W 中的向量, A 和 B 是 V 和 W 上的线性算子, 可以在 $V \otimes W$ 上定义一个线性算子 $A \otimes B$, 定义如下

$$(A \otimes B)(|v\rangle \otimes |w\rangle) \equiv A|v\rangle \otimes B|w\rangle,$$

为保证其线性, $A \otimes B$ 的定义可以自然地扩展到 $V \otimes W$ 的所有元素, 即

$$(A \otimes B)(\sum_i a_i|v_i\rangle \otimes |w_i\rangle) \equiv \sum_i a_i A|v_i\rangle \otimes B|w_i\rangle,$$

可以证明如此定义的 $A \otimes B$ 是 $V \otimes W$ 上的定义良好的线性算子.

张量积具有 Kronecker 积的矩阵表示, 这会使得问题变得具体直观. 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, B 是一个 $p \times q$ 矩阵, 则有矩阵表示

$$A \otimes B \equiv \begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \cdots & A_{mn}B \end{bmatrix},$$

在这个表示中, $A_{11}B$ 的项代表 $p \times q$ 子矩阵, 其元素正比于 B, 全局比例常数为 A_{11}.

1.4 量子测量

要从一个量子系统中获取所需信息, 必须对系统进行测量. 量子测量是一种特殊的操作方式, 也可以用算符表示.

1.4.1 一般测量

通用测量又称一般测量, 由一组测量算子 $\{M_m\}$ 来描述, 这些算子作用在被测系统状态空间上, 指标 m 表示实验中可能的测量结果. 测量前, 如果量子系统的状态是 $|\psi\rangle$, 则结果 m 发生的可能性由

$$p(m) = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle$$

给出, 且测量后系统的状态为

$$\frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}} = \frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle}}.$$

测量算子满足完备性方程

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I,$$

完备性方程说明了概率之和为 1 的事实:

$$1 = \sum_m p(m) = \sum_m \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle.$$

1.4.2 投影测量

投影测量由被观测系统状态空间上的一个可观测量 Hermite 算子 M 描述, 该可观测量具有谱分解

$$M = \sum_m P_m,$$

其中 P_m 是到特征值为 m 的本征空间 M 上的投影. 测量的可能结果对应于测量算子的特征值 m. 测量状态 $|\psi\rangle$ 时, 得到结果 m 的概率为

$$p(m) = \langle\psi|P_m|\psi\rangle.$$

给定测量结果 m, 测量后量子系统的状态即为

$$\frac{P_m|\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}.$$

1.4.3 POVM 测量

量子测量假设涉及两个要素. 首先, 它给出一个描述测量统计特性的规则, 即分别得到不同测量结果的概率; 其次, 它给出描述测量后, 系统状态的规则. POVM 测量主要关心的是系统得到不同结果的概率.

设测量算子 M_m 在状态为 $|\psi\rangle$ 的量子系统上进行测量, 则得到结果 m 的概率由 $p(m)=\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle$ 给出. 如果定义

$$E_m = M_m^\dagger M_m,$$

E_m 是满足 $\sum E_m = I$ 和 $p(m)=\langle\psi|E_m|\psi\rangle$ 的半正定算子. 于是算子集合 E_m 足以确定不同测量结果的概率, 算子 E_m 称为与测量相联系的 POVM 元, 完整的集合 $\{E_m\}$ 称为一个 POVM (Positive Operator-Valued Measurement).

对于一组正交量子态 $\{\phi_j\}_{j=1}^r$, 如果所有 POVM 元都正比于单位算符, 即 $M_m^\dagger M_m \propto I$. 这里不妨设 $M_m^\dagger M_m = aI$, 有

$$p(m)=\langle\phi_1|M_m^\dagger M_m|\phi_1\rangle=\cdots=\langle\phi_r|M_m^\dagger M_m|\phi_r\rangle=a,$$

这意味着结果 m 发生时, 不能判别出所测量的是集合中的哪一个量子态, 则称这类 POVM 测量为**平凡测量**. 容易看出, 这类 POVM 测量不能得到被测状态的任何信息[39].

给定一个正交量子态集合, 如果一组局域测量作用在该集合上, 测后态仍保持正交, 则称这组局域测量为**保正交局域测量**.

1.5 正交量子态的局域区分

正交量子态的局域区分是指由不同人持有一组正交量子态中某个量子态的不同粒子, 这些人可以测量自己所持有的粒子, 再通过经典通信与其他人完成识别该量子态的任务.

1.5.1 局域操作和经典通信

局域操作和经典通信是带有经典信息通道的局域量子操作. 在多体量子系统中, 对复合系统进行测量时, 操作的双方是彼此分离的, 他们仅可以在各自的系统上进行量子操作, 通过经典信息通道交换经典信息.

1.5.2 非局域性, 局域不可约性, 局域稳定性

以三体量子系统为例, 假设 Alice、Bob 和 Charlie 共享三体系统上的一组正交量子态 $\{|\psi_i\rangle\}$, 现在从三方已知的集合中任意选出一个量子态 $|\psi_i\rangle$, 他们的目的是通过局域操作和经典通信, 来确定指标 i. 如果可以确定指标 i, 称集合 $\{|\psi_i\rangle\}$ 是可以局域区分的, 反之 $\{|\psi_i\rangle\}$ 是局域不可区分的. 如果一组正交量子态不能被局域区分, 则称这组量子态具有**非局域性**.

在多体系统中, 如果通过保正交的局域测量不能从一组多体正交态中消除一个或多个态, 则称这组正交态具有**局域不可约性**[16].

对于一组多体系统正交态, 如果任意子系统上保正交的测量都是平凡的, 则称这组正交态具有**局域稳定性**[24].

从单个子系统的区分性来看, 局域稳定性强于局域不可约性, 局域不可约性强于非局域性, 反之不一定成立. 下面给出韦恩图来刻画它们之间的关系, 见图 1.2.

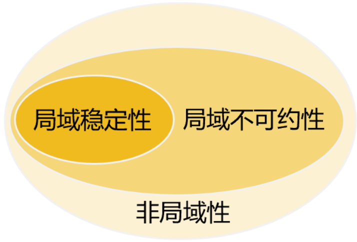

图 1.2: 非局域性, 局域不可约性和局域稳定性的关系.

1.5.3 真非局域性, 强非局域性, 最强非局域性

如果一组正交态在任意二划分下都是局域不可区分的, 则称这组正交态具有**真非局域性**[28].

特别地, 如果一组真非局域正交态集合在所有参与方都分离的情况下是局域可约的, 称这组正交态具有 I 型真非局域性. 如果所有参与方都分离时是局域不可约的, 称这组正交态具有 II 型真非局域性.

如果一组正交态在任意二划分下都是局域不可约的, 则称这组正交态具有**强非局域性**[16].

如果一组正交态在任意二划分下所进行的保正交测量只能是平凡的, 则称这组正交态具有**最强非局域性**[34].

从二划分后的局域区分性来看, 最强非局域集合一定是强非局域集合, 强非局域集合一定是真非局域集合, 但反之不一定成立. 同样, 可以通过韦恩图来刻画它们之间的关系, 见图 1.3.

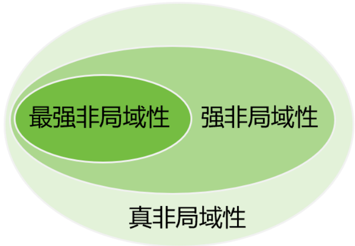

图 1.3: 真非局域性, 强非局域性和最强非局域性的关系.