第一章　预备知识

在这一部分, 我们首先介绍本文所用到的一些基本概念和符号[25].

1.1　量子比特与状态空间

比特是经典计算和经典信息的基本概念, 量子计算与量子信息建立在类似的概念量子比特基础上. 我们将量子比特描述为具有特定属性的数学对象. 经典比特有一个状态或 0 或 1, 类似地, 量子比特也有一个状态, 量子比特可能的两个状态是 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$, 其中 $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 记号"$|\ \rangle$"称为 Dirac 记号.

量子比特与经典比特的区别在于, 量子比特的状态可以落在 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 之外, 它可以是状态的线性组合, 我们常称这种状态为叠加态, 例如:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \tag{1.1}$$

其中 α 和 β 是复数. 也就是说, 量子比特状态是二维复向量空间中的向量. 特殊的 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 称为计算基, 是构成这个向量空间的一组标准正交基.

在对量子比特进行测量时, 我们得到 0 的概率为 $|\alpha|^2$, 得到 1 的概率为 $|\beta|^2$, 显然有 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, 因为概率总和一定为 1. 从几何意义上看, 是要求量子比特的状态归一化到单位长度 1. 所以, 一般而言, 量子比特的状态是二维复向量空间中的单位向量.

量子态依据其能否可以只用单一态矢量(含这个态的叠加形式)表述就能将这个状态分为**纯态**和**混合态**. 当系统的状态完全可知, 且可以用 Hilbert 空间的一个向量描述时, 这样的状态就称作纯态. 在量子力学中, 任何物理系统都可以由 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的态矢量 $|\psi\rangle$ 来描述. N 体 d 维系统 $\mathcal{H}$ 中的纯态 $|\psi\rangle$ 都可表示为:

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_N} a_{i_1 i_2 \cdots i_N} |i_1 i_2 \cdots i_N\rangle, \tag{1.2}$$

其中 $a_{i_1 i_2 \cdots i_N} \in \mathbb{C}, i_1, i_2, \cdots, i_N \in \mathbb{Z}_d$, 且 $\sum\limits_{i_1, i_2, \cdots, i_N} |a_{i_1 i_2 \cdots i_N}|^2 = 1$.

特别指出, 本文所有量子态都指的是纯态.

在 N 体量子系统中, 如果这个纯态能够写成 N 个子系统态的直积形式

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_N\rangle, \tag{1.3}$$

则称为**直积态**, 否则就是**纠缠态**.

对于两体系统 $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2} (d_2 \geq d_1)$, 纯态 $|\psi\rangle$ 称为一个**最大纠缠态**当且仅当对于子系统 A 的任意正交完备基 $\{|i_1\rangle\}$, 都存在子系统 B 的正交完备基 $\{|i_2\rangle\}$, 使得 $|\psi\rangle$ 可以表示为

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle. \tag{1.4}$$

对于多体系统 $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \mathbb{C}^{d_2} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{d_N}$ 中的纯态 $|\psi\rangle$, 如果它在任意二划分下都是纠缠态, 那么 $|\psi\rangle$ 被称为**真纠缠态**.

1.2 Hilbert 空间上的基本运算

1.2.1 内积

内积是向量空间上的二元复数函数. 两个向量 $|v\rangle$ 和 $|w\rangle$ 的内积是一个复数, 内积 $(|v\rangle, |w\rangle)$ 在量子力学中的标准符号为 $\langle v|w\rangle$, 其中 $|v\rangle$ 和 $|w\rangle$ 是内积空间中的向量, 符号 $\langle v|$ 表示向量 $|v\rangle$ 的对偶向量. 对偶向量的矩阵表示正是行向量.

从 $V \times V$ 到 C 的函数 $(\cdot, \cdot)$ 是内积, 如果它满足如下条件:

(1) $(\cdot, \cdot)$ 对第二个自变量是线性的, 即

$$(|v\rangle, \sum_i \lambda_i |w_i\rangle) = \sum_i \lambda_i (|v\rangle, |w_i\rangle); \tag{1.5}$$

(2) $(|v\rangle, |w\rangle) = (|w\rangle, |v\rangle)^*$;

(3) $(|v\rangle, |v\rangle) \geq 0$, 当且仅当 $|v\rangle = 0$ 时取等号.

例如, C^n 具有如下定义的一个内积:

$$((y_1, \cdots, y_n), (z_1, \cdots, z_n)) \equiv \sum_i y_i^* z_i = \begin{bmatrix} y_1^*, \cdots, y_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \tag{1.6}$$

带有内积的向量空间称为内积空间.

1.2.2 外积

外积表示是利用内积表示线性算子的一个有用方法. 设 $|v\rangle$ 是内积空间 V 中的向量, 而 $|w\rangle$ 是内积空间 W 中的向量, 定义 $|w\rangle\langle v|$ 为从 V 到 W 的线性算子:

$$(|w\rangle\langle v|)(|v'\rangle) \equiv |w\rangle\langle v|v'\rangle = \langle v|v'\rangle|w\rangle. \tag{1.7}$$

表达式 $|w\rangle\langle v|v'\rangle$ 有两种可能的含义: 算子 $|w\rangle\langle v|$ 在 $|v'\rangle$ 上的作用, $|w\rangle$ 与一个复数 $\langle v|v'\rangle$ 相乘.

外积概念的有用性可以从标准正交向量的称为完备性关系的重要结果看出. 令 $|i\rangle$ 为向量空间 V 的任意标准正交基, 于是任意向量 $|v\rangle$ 可写成 $|v\rangle = \sum_i v_i|i\rangle$, v_i 是一组复数. 注意到 $\langle i|v\rangle = v_i$, 于是

$$(\sum_i |i\rangle\langle i|)|v\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|v\rangle = \sum_i v_i|i\rangle = |v\rangle. \tag{1.8}$$

由于最后一个等式对所有 $|v\rangle$ 成立, 故有

$$\sum_i |i\rangle\langle i| = I. \tag{1.9}$$

这个等式称为完备性关系. 可以把任意线性算子表示成外积形式是完备性关系的一个重要应用. 设 $A: V \to W$ 是一个线性算子, $|v_i\rangle$ 是 V 的一个标准正交基, 且 $|w_j\rangle$ 是 W 的一个标准正交基, 两次应用完备性关系得到

$$A = I_W A I_V = \sum_{ij} |w_j\rangle\langle w_j|A|v_i\rangle\langle v_i| = \sum_{ij}\langle w_j|A|v_i\rangle|w_j\rangle\langle v_i|, \tag{1.10}$$

这就是 A 的外积表示. 从此式还可以看到相对于输入基 $|v_i\rangle$ 和输出基 $|w_j\rangle$, $\langle w_j|A|v_i\rangle$ 表示 A 的第 i 列第 j 行元素.

1.2.3 张量积

张量积是将向量空间合在一起, 构成更大向量空间的一种方法, 这个构造对理解量子力学的多粒子系统很关键.

设 V 和 W 是维数分别是 m 和 n 的向量空间, 并假定 V 和 W 是 Hilbert 空间, 于是 $V \otimes W$ (读作"V 张量 W") 是一个 mn 维向量空间. $V \otimes W$ 的元素是 V 的元素 $|v\rangle$ 和 W 的元素 $|w\rangle$ 的张量积 $|v\rangle \otimes |w\rangle$ 的线性组合. 特别地, 如果 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 是 V 和 W 的标准正交基, 则 $|i\rangle \otimes |j\rangle$ 是 $V \otimes W$ 的一个基, 常用缩写符号 $|v\rangle|w\rangle$, $|v, w\rangle$ 或 $|vw\rangle$ 来表示张量积 $|v\rangle \otimes |w\rangle$. 例如, 当 V 是以 $|0\rangle, |1\rangle$ 为基向量的二维向量空间, 则 $|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle$ 是 $V \otimes V$ 的一个元素.

由定义, 张量积满足如下的基本性质.

(1) 对任意标量 z, V 的元素 $|v\rangle$ 和 W 的元素 $|w\rangle$, 满足

$$z(|v\rangle \otimes |w\rangle) = (z|v\rangle) \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes (z|w\rangle); \tag{1.11}$$

(2) 对 V 中任意的 $|v_1\rangle$ 和 $|v_2\rangle$ 和 W 中的 $|w\rangle$, 满足

$$(|v_1\rangle + |v_2\rangle) \otimes |w\rangle = |v_1\rangle \otimes |w\rangle + |v_2\rangle \otimes |w\rangle; \tag{1.12}$$

(3) 对 V 中任意的 $|v\rangle$ 和 W 中的 $|w_1\rangle$ 和 $|w_2\rangle$, 满足

$$|v\rangle \otimes (|w_1\rangle + |w_2\rangle) = |v\rangle \otimes |w_1\rangle + |v\rangle \otimes |w_2\rangle. \tag{1.13}$$

设 $|v\rangle$ 和 $|w\rangle$ 分别是 V 和 W 中的向量, A 和 B 分别是 V 和 W 上的线性算子. 我们可以在 $V \otimes W$ 上定义一个线性算子 $A \otimes B$, 定义如下

$$(A \otimes B)(|v\rangle \otimes |w\rangle) \equiv A|v\rangle \otimes B|w\rangle. \tag{1.14}$$

为保证其线性, $A \otimes B$ 的定义可以自然地扩展到 $V \otimes W$ 中的所有元素, 即

$$(A \otimes B)(\sum_i a_i|v_i\rangle \otimes |w_i\rangle) \equiv \sum_i a_i A|v_i\rangle \otimes B|w_i\rangle, \tag{1.15}$$

可以证明如此定义的 $A \otimes B$ 是 $V \otimes W$ 上的定义良好的线性算子.

张量积具有 Kronecker 积的矩阵表示, 使得问题会变得具体直观. 设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, B 是一个 $p \times q$ 矩阵, 则我们有矩阵表示

$$A \otimes B \equiv \begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \cdots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \cdots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \cdots & A_{mn}B \end{bmatrix}. \tag{1.16}$$

在这个表示中, $A_{11}B$ 的项代表 $p \times q$ 子矩阵, 其元素正比于 B, 全局比例常数为 A_{11}. 例如, 向量 $(4, 1)$ 和 $(3, 2)$ 的张量积是向量

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \times 3 \\ 4 \times 2 \\ 1 \times 3 \\ 1 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{1.17}$$

Pauli 矩阵 X 和 Y 的张量积是

$$X \otimes Y = \begin{bmatrix} 0 \cdot Y & 1 \cdot Y \\ 1 \cdot Y & 0 \cdot Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.18}$$

1.3 量子测量

要从一个量子系统中获取所需信息, 必须对系统进行测量. 量子测量是一种特殊的操作方式, 也可以用算符表示. 通常有三种模式: 通用测量、投影测量和 POVM 测量.

1.3.1 通用测量

通用测量又叫做一般测量, 由一组测量算子 $\{M_m\}$ 来描述, 这些算子作用在被测系统状态空间上, 指标 m 表示实验中可能的测量结果. 如果在测量前, 量子系统的状态是 $|\psi\rangle$, 则结果 m 发生的可能性由

$$p(m) = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle \tag{1.19}$$

给出, 且测量后系统的状态为

$$\frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}} = \frac{M_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle}}. \tag{1.20}$$

测量算子满足完备性方程

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I, \tag{1.21}$$

完备性方程表达了概率之和为 1 的事实:

$$1 = \sum_m p(m) = \sum_m \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle. \tag{1.22}$$

1.3.2 投影测量

投影测量由被观测系统状态空间上的一个可观测量 Hermite 算子 M 描述, 该可观测量具有谱分解

$$M = \sum_m P_m, \tag{1.23}$$

其中 P_m 是在特征值为 m 的本征空间 M 上的投影. 测量的可能结果对应于测量算子的特征值 m. 测量状态为 $|\psi\rangle$ 时, 得到结果 m 的概率为

$$p(m) = \langle\psi|P_m|\psi\rangle. \tag{1.24}$$

给定测量结果 m, 测量后量子系统的状态即为

$$\frac{P_m|\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}. \tag{1.25}$$

1.3.3 POVM 测量

量子测量假设涉及两个要素. 首先, 它给出一个描述测量统计的规则, 即分别得到不同测量结果的概率; 其次, 它给出描述测量后, 系统状态的规则. POVM 主要关心的是系统得到不同结果的概率.

设测量算子 M_m 在状态为 $|\psi\rangle$ 的量子系统上进行测量, 则得到结果 m 的概率为 $p(m)=\langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle$. 如果定义

$$E_m=M_m^\dagger M_m, \tag{1.26}$$

E_m 是满足 $\sum_m E_m=I$ 和 $p(m)=\langle\psi|E_m|\psi\rangle$ 的半正定算子. 于是算子集合 $\{E_m\}$ 足以确定不同测量结果的概率, 算子 E_m 称为与测量相联系的 POVM 元, 完整的集合 $\{E_m\}$ 称为一个 POVM (Positive Operator-Valued Measurement).

特别地, 如果所有的POVM 元都正比于单位算符, 即 $M_m^\dagger M_m\propto I$. 不妨设 $M_m^\dagger M_m=aI$, 即对于一组正交量子态 $\{\phi_j\}_{j=1}^r$, 其 POVM 元都满足

$$p(m)=\langle\phi_1|M_m^\dagger M_m|\phi_1\rangle=\cdots=\langle\phi_r|M_m^\dagger M_m|\phi_r\rangle=a, \tag{1.27}$$

这意味着结果 m 发生时, 不能判别出所测量的是集合中的哪一个量子态, 我们就称这类 POVM 测量为**平凡测量**. 显然, 这类测量没有给出被测状态的任何信息.

1.4 量子态的局域区分

1.4.1 局域操作和经典通信

局域操作和经典通信 (LOCC): 对于一个复合量子系统, 分离的参与方只允许在各自的系统上进行量子操作, 通过经典信道来交换信息.

如果一组局域测量作用到一个多体正交态集合上, 测后态仍保持正交, 那么就称这组局域测量为**保正交的局域测量 (Orthogonality-Preserving Local Measurements, 简记为 OPLM)**.

1.4.2 非局域、局域不可约和局域冗余

给定一组正交量子态 $\{|\psi_i\rangle\}$, 如果不能通过局域操作和经典通信实现完美区分, 那么 $\{|\psi_i\rangle\}$ 是局域不可区分的. 如果一组正交量子态局域不可区分, 我们称这组正交量子态具有**非局域性**.

在多体量子系统中, 如果通过保正交的局域测量不能从一组多体正交量子态中消除一个或多个态, 则称这组正交量子态为**局域不可约的**.

如果一组正交量子态丢弃一个或多个子系统后仍保持正交, 则称这组正交量子态为**局域冗余的**.

1.4.3 真隐非局域性、真隐强形式非局域性和真隐强非局域性

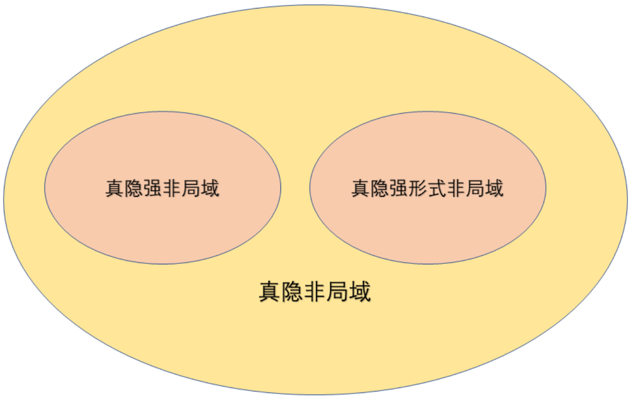
对于一个局域可区分的正交量子态集合, 它是无局域冗余的, 如果存在一个保正交的局域测量, 使得测后态集合是局域不可区分的, 则称这组正交量子态具有**真隐非局域**

性. 若测后态集合的基数等于原始态集合的基数, 则称为**类型 I 真隐非局域**; 若测后态集合的基数小于原始态集合的基数, 则称为**类型 II 真隐非局域**.

对于一个局域可区分的正交量子态集合, 它是无局域冗余的, 如果存在一个保正交的局域测量, 使得测后态集合是局域不可约的, 则称这组正交量子态具有**真隐强形式非局域性**.

对于一个局域可区分的正交量子态集合, 它是无局域冗余的, 如果存在一个保正交的局域测量, 使得测后态集合是强非局域的, 则称这组正交量子态具有**真隐强非局域性**.

不难发现, 真隐强非局域的是真隐非局域的, 真隐强形式非局域的是真隐非局域的, 真隐强形式非局域与真隐强非局域没有必然的联系. 三者的关系可以用下面的 Venn 图表示:



第二章　真隐非局域正交直积态集合的构造

本章我们主要研究真隐非局域正交直积态集合的构造. 2.1 节介绍了两体系统 $\mathbb{C}^{d_1}\otimes\mathbb{C}^{d_2}$ ($d_1\geq 8, d_2\geq 10$ 且 d_1,d_2 为偶数) 上类型 I 真隐非局域正交直积态集合的构造. 进一步在四体系统 $\mathbb{C}^{d_1}\otimes\mathbb{C}^{d_2}\otimes\mathbb{C}^{d_3}\otimes\mathbb{C}^{d_4}$ ($10\leq d_1\leq d_2\leq d_3\leq d_4$, d_i 为偶数, 其中 $i\in\{1,2,3,4\}$) 上构造了类型 I 真隐非局域正交直积态集合, 最后给出 $2N$ 体系统 $\mathbb{C}^{d_1}\otimes\mathbb{C}^{d_2}\otimes\cdots\mathbb{C}^{d_{2N}}$ ($10\leq d_1\leq d_2\leq\cdots\leq d_{2N}$, d_i 为偶数, 其中 $i\in\{1,2,\cdots,2N\}$) 上类型 I 真隐非局域正交直积态集合的构造. 2.2 节介绍了两体系统 $\mathbb{C}^{d}\otimes\mathbb{C}^{2d}$ ($d\geq 3$) 上类型 II 真隐非局域正交直积态集合的构造, 三体系统 $\mathbb{C}^{d}\otimes\mathbb{C}^{d}\otimes\mathbb{C}^{2d}$ ($d\geq 3$) 上类型 II 真隐非局域正交直积态集合的构造和三体系统 $\mathbb{C}^{d}\otimes\mathbb{C}^{d}\otimes\mathbb{C}^{2d}$ ($d\geq 3$) 上类型 II 真隐强非局域正交直积态集合的构造. 为方便起见, 注意每一章证明集合 $\mathcal{S}$ 通过 OPLM 转化时, 执行测量前后集合中态的表示是相同的, 例如测量前用 $|\phi_1\rangle$ 表示, 测量后仍用 $|\phi_1\rangle$ 表示. $|_0+_d\rangle$ 表示 $|0+1+2+\cdots+d\rangle$.

2.1　类型 I 真隐非局域正交直积态集合

这一节, 我们给出一般两体系统类型 I 真隐非局域正交直积态集合的构造, 进一步考虑一般四体和 $2N$ 体系统上类型 I 真隐非局域正交直积态集合的构造.

2.1.1　两体系统 $\mathbb{C}^{d_1}\otimes\mathbb{C}^{d_2}$

这里, 我们首先给出一个具体的例子.

命题 2.1　*在两体系统 $\mathbb{C}^{8}\otimes\mathbb{C}^{10}$ 中, 下面正交直积态构成的集合 $\mathcal{S}$ 是类型 I 真隐非局域的.*

$$
\begin{aligned}
&|\phi_1\rangle=|1-5\rangle|0-1\rangle, && |\phi_7\rangle=|0-1+4-5\rangle|4\rangle,\\
&|\phi_2\rangle=|2-6\rangle|0-2\rangle, && |\phi_8\rangle=|0-1+4-5\rangle|5\rangle,\\
&|\phi_3\rangle=|3-7\rangle|0-3\rangle, && |\phi_9\rangle=|0-1+4-5\rangle|6\rangle,\\
&|\phi_4\rangle=|0-3+4-7\rangle|1\rangle, && |\phi_{10}\rangle=|3-7\rangle|2-4\rangle,\\
&|\phi_5\rangle=|0-1+4-5\rangle|2\rangle, && |\phi_{11}\rangle=|2-6\rangle|4-5\rangle,\\
&|\phi_6\rangle=|0-2+4-6\rangle|3\rangle, && |\phi_{12}\rangle=|3-7\rangle|5-6\rangle,\\
&|\varphi_1\rangle=|0-1+7-6\rangle|9\rangle, && |\varphi_3\rangle=|1-6\rangle|7-8\rangle,\\
&|\varphi_2\rangle=|0-2+7-5\rangle|8\rangle, && |\varphi_4\rangle=|2-5\rangle|7-9\rangle,\\
&|S_1\rangle=|_0+_7\rangle|_0+_6\rangle, && |S_2\rangle=|_0+_7\rangle|_7+_9\rangle.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

证明 我们需要证明集合 $\mathcal{S}$ 是局域可区分的, 局域无冗余的和集合 $\mathcal{S}$ 通过 OPLM 转化为局域不可区分集.

(1) 证明集合 $\mathcal{S}$ 是局域可区分的.

Bob 执行测量 $M_1=\{P_i^B=\sum_i |i\rangle_B\langle i|,\ i\in Z_{10}\}$.

当 Bob 执行测量 $P_i^B, i\in Z_{10}$ 时, 得到的态 Alice 方正交可区分. 例如当 Bob 执行测量 P_1^B 时, 得到的态为 $|\phi_1\rangle$, $|\phi_4\rangle$, $|S_1\rangle$, 它们的 Alice 方正交, 因此可区分.

(2) 证明集合 $\mathcal{S}$ 是局域无冗余的.

利用文献 [24]中证明局域无冗余的方法, 由集合 $\mathcal{S}$ 中量子态的性质, 可以观察到 $\langle\phi_i|\phi_j\rangle_A\neq 0$, 对于不同的 $i,j\in\{4,5,\cdots,9\}$. 如果集合 $\mathcal{S}$ 是局域冗余的, 一定存在 $\mathcal{S}_B\subseteq\{B_1,B_2\}$ 和一些 U 矩阵 $U_B\in U(d)$, 使得 $\{Tr_{\mathcal{S}_B}[U_B|\phi_i\rangle_B\langle\phi_i|U_B^+]\}_{i=4}^9$ 是相互正交的, 然而系统的维数对应于 $\{B_1,B_2\}\backslash\mathcal{S}_B$ 至多为 5 , 小于 6 , 推出矛盾. 所以集合 $\mathcal{S}$ 是局域无冗余的.

(3) 证明集合 $\mathcal{S}$ 通过 OPLM 转化为局域不可区分集.

Alice 执行测量 $K_A=\{K_1=\sum_{i=0}^3|i\rangle_A\langle i|, K_2=\sum_{j=4}^7|j\rangle_A\langle j|\}$.

当 Alice 执行测量 K_1 时, 得到下面集合

$$\begin{aligned}
&|\phi_1\rangle=|1\rangle|0-1\rangle, && |\phi_7\rangle=|0-1\rangle|4\rangle,\\
&|\phi_2\rangle=|2\rangle|0-2\rangle, && |\phi_8\rangle=|0-1\rangle|5\rangle,\\
&|\phi_3\rangle=|3\rangle|0-3\rangle, && |\phi_9\rangle=|0-1\rangle|6\rangle,\\
&|\phi_4\rangle=|0-3\rangle|1\rangle, && |\phi_{10}\rangle=|3\rangle|2-4\rangle,\\
&|\phi_5\rangle=|0-1\rangle|2\rangle, && |\phi_{11}\rangle=|2\rangle|4-5\rangle,\\
&|\phi_6\rangle=|0-2\rangle|3\rangle, && |\phi_{12}\rangle=|3\rangle|5-6\rangle,\\
&|\varphi_1\rangle=|0-1\rangle|9\rangle, && |\varphi_3\rangle=|1\rangle|7-8\rangle,\\
&|\varphi_2\rangle=|0-2\rangle|8\rangle, && |\varphi_4\rangle=|2\rangle|7-9\rangle,\\
&|S_1\rangle=|_0+_3\rangle|_0+_6\rangle, && |S_2\rangle=|_4+_7\rangle|_7+_9\rangle.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

由文献 [38]知, 式 (2.2) 中包含的 $\{\phi_i\rangle\}_{i=1}^{12}$ 和 $|S_1\rangle$ 在两体系统 $\mathbb{C}^4\otimes\mathbb{C}^7$ 中是局域不可区分的, 所以式 (2.2) 是局域不可区分的.

当 Alice 执行测量 K_2 时, 得到下面集合

$$\begin{aligned}
&|\phi_1\rangle=|5\rangle|0-1\rangle, && |\phi_7\rangle=|4-5\rangle|4\rangle,\\
&|\phi_2\rangle=|6\rangle|0-2\rangle, && |\phi_8\rangle=|4-5\rangle|5\rangle,\\
&|\phi_3\rangle=|7\rangle|0-3\rangle, && |\phi_9\rangle=|4-5\rangle|6\rangle,\\
&|\phi_4\rangle=|4-7\rangle|1\rangle, && |\phi_{10}\rangle=|7\rangle|2-4\rangle,
\end{aligned}$$