山西省晋中市2024届高三下学期5月高考适应训练考试数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．复数$\dfrac{1+i}{2-i}$在复平面内对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．设集合$A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}|x^2-5x+4\geq 0\}$，则$A\cap B=$（　）

A．$\{1\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{0,1\}$　　D．$\{1,2,3\}$

3．下列函数中既是奇函数，又在$(0,+\infty)$上单调递减的是（　）

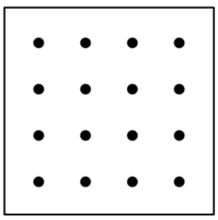
A．$f(x)=2^{|x|}$　　B．$f(x)=x^3$

C．$f(x)=\dfrac{1}{x}-x$　　D．$f(x)=\begin{cases}\ln x, x>0,\\ -\ln(-x), x<0\end{cases}$

4．已知圆$C:x^2+y^2-4x+2y+1=0$，过圆C外一点P作两条夹角为$\dfrac{\pi}{3}$的直线分别与圆C相交，当所得的弦长均为2时，$|CP|=$（　）

A．2　　B．$2\sqrt{3}$　　C．4　　D．$3\sqrt{2}$

5．如图，16颗黑色围棋子构成4×4的正方形网格，从其中任选3颗互相连线，可以围成不同的三角形的个数为（两个三角形中至少有一个顶点不同即认为是不同的三角形）（　）



A．576　　B．528　　C．520　　D．516

6．已知$\alpha,\beta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin\alpha+\sin\beta=-\dfrac{3}{2}$, $\cos\alpha-\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 则$\sin(\alpha+\beta)=$（　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$-\dfrac{1}{2}$

7．已知三棱锥$P-ABC$中，$PA=PB=4,PC=1,\angle APB=\angle APC=\angle BPC=\dfrac{\pi}{3},M,N,T$分别为棱$AB,AC,PB$的中点，则直线$PM$与$NT$所成角的正切值为（　　）

A．$4\sqrt{2}$　　B．$4\sqrt{3}$　　C．$5\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{13}$

8．已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左焦点为$F$，过点$F$且斜率为$\sqrt{3}$的直线与$C$的两条渐近线分别交于点$M,N$，且$M,N$分别位于第二、三象限，若$\dfrac{|MF|}{|NF|}=\dfrac{1}{2}$，则$C$的离心率为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　B．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　C．$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$　　D．$\sqrt{3}$

二、多选题

9．下列有关回归分析的结论中，正确的有（　　）

A. 在样本数据$\left(x_i，y_i\right)\left(i=1,2,3,\cdots,10\right)$中，根据最小二乘法求得线性回归方程为$\hat{y}=3x-1$，去除一个样本点$\left(x_1,y_1\right)$后，得到的新线性回归方程一定会发生改变

B．具有相关关系的两个变量x,y的相关系数为r，那么r越大，x,y之间的线性相关程度越强

C．若散点图中的散点均落在一条斜率非0的直线上，则决定系数$R^2=1$

D．在残差图中，残差点分布的水平带状区域越窄，说明模型的拟合精度越高

10．已知函数$f\left(x\right)$的定义域为$\mathbf{R}$，满足$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)f\left(y\right)+f\left(x\right)+f\left(y\right)$，且$f\left(0\right)\neq-1$，$f\left(1\right)>-1$，则下列说法正确的是（　　）

A．$f\left(0\right)=0$　　B．$f\left(x\right)$为非奇非偶函数

C．若$f\left(1\right)=1$，则$f\left(4\right)=15$　　D．$f\left(x\right)>-1$对任意$x\in\mathbf{N}^*$恒成立

11．在正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2A_1B_1=4,$则下列说法正确的是（　　）

A．若正四棱台内部存在一个与棱台各面均相切的球，则该棱台的侧棱长为$\sqrt{10}$

B．若正四棱台的各顶点均在一个半径为$\sqrt{10}$的球面上，则该棱台的体积为$28\sqrt{2}$

C. 若侧棱长为$\sqrt{3}$,M 为棱B_1C_1的中点，P 为线段BM 上的动点（不含端点），则$DP \perp A_1C$不可能成立

D．若侧棱长为$\sqrt{3}$,Q 为棱BB_1的中点，过直线C_1Q且与直线B_1D_1平行的平面将棱台分割成体积不等的两部分，则其中较小部分的体积为4

三、填空题

12．已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，$C$上一点$P$满足$\left|\overrightarrow{PF_1}\right|=\left|\overrightarrow{PF_2}\right|=\left|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right|=2$，则$\overrightarrow{F_1F_2}\cdot\overrightarrow{F_1P}=$_____.

13．下面给出一个“三角形数阵”：

$\frac{1}{2}$

1　2

$\frac{3}{2}$　3　6

2　4　8　16

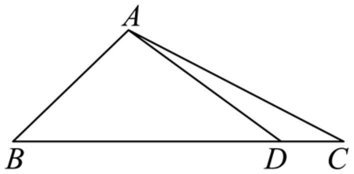
……

该数阵满足每一列成等差数列，每一行的项数由上至下构成公差为1的等差数列，从第3行起，每一行的数由左至右均构成公比为2的等比数列，记第1行的数为a_1,第2行的数由左至右依次为a_2,a_3,依次类推，则$a_{100}=$_____.

14．已知函数$f\left(\theta\right)=\left|a\cos\theta+b\sin\theta\right|+\left|a\sin\theta-b\cos\theta\right|$的最大值为$4\sqrt{2}$，则满足条件$b>\mathrm{e}^a$的整数$a$的个数为_____.

四、解答题

15．在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$b^2+c^2+bc=a^2$.



(1)求$\tan A$；

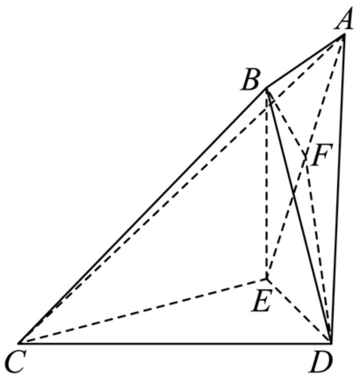
(2)若$b=\left(\sqrt{3}+1\right)c$，在边$BC$上（不含端点）存在点$D$，使得$AD=1$，求$a$的取值范围.

16．已知函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3+ax$，$a\in\mathbf{R}$

(1)讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

(2)若函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)+2\ln x$ 存在两个极值点，求实数 a 的取值范围．

17．如图，在六面体 $ABCDE$ 中，$BC=BD=\sqrt{6}$，$EC\perp ED$，且 $EC=ED=\sqrt{2}$，AB 平行于平面 CDE，AE 平行于平面 BCD，$AE\perp CD$．



(1)证明：平面 $ABE\perp$ 平面 CDE；

(2)若点A到直线 CD 的距离为 $2\sqrt{2}$，F 为棱 AE 的中点，求平面 BDF 与平面 BCD 夹角的余弦值．

18．甲、乙两名同学玩掷骰子积分游戏，规则如下: 每人的初始积分均为 0 分，掷 1 枚骰子 1 次为一轮，在每轮游戏中，从甲、乙两人中随机选一人掷骰子，且两人被选中的概率均为 $\frac{1}{2}$，当骰子朝上的点数不小于 3 时，掷骰子的人积 2 分，否则此人积 1 分，未掷骰子的人本轮积 0 分，然后进行下一轮游戏．已知每轮掷骰子的结果相互独立．

(1)求经过 4 轮游戏，甲的累计积分为 4 分的概率

(2)经商议，甲、乙决定修改游戏规则，具体如下：甲、乙轮流掷骰子，谁掷谁积分，第一次由甲掷．当骰子朝上的点数不小于 3 时，积 2 分，否则积 1 分．甲、乙分别在 5~25 分之间选一个整数分数（含 5 分和 25 分），且两人所选的分数不同，当两人累计积分之和首先等于其中一人所选分数时，此人赢得游戏．记两人累计积分之和为 n 的概率为 $P\left(n\right)$.

（i）证明：$\left\{P\left(n+1\right)-P\left(n\right)\right\}$ 为等比数列．

（ⅱ）甲选哪个分数对自己最有利？请说明理由

19．在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $M\left(1,0\right)$, P 为动点，以线段 MP 为直径的圆与 y 轴相切．

(1)求动点 P 的轨迹 Γ 的方程.

(2)已知点 $A\left(1,2\right)$, 问：在 Γ 上是否存在点 B,C, 使得 $\triangle ABC$ 为等边三角形？若不存在，请说明理由；若存在，请说明这样的点 B,C 有几组（不必说明点 B,C 的坐标）.

参考答案：

1．A

【详解】$\frac{1+i}{2-i}=\frac{1+3i}{5}$对应的点位于第一象限，选 A.

2．C

【分析】利用交集的定义，将两个集合的条件联立即可得到结果.

【详解】由$A=\{0,1,2,3\}$，$B=\left\{x\in\mathbf{N}\middle|x^2-5x+4\geq0\right\}=\left\{x\in\mathbf{N}\middle|(x-1)(x-4)\geq0\right\}=\{x\in\mathbf{N}\mid x\leq1$或$x\geq4\}$，

知$A\cap B=\{0,1\}$.

故选：C.

3．C

【分析】根据奇函数和单调性的定义，结合基本初等函数的图象逐项判断.

【详解】对于 A：函数$f(x)=2^{|x|}$的定义域为$\mathbf{R}$，

又$f(-x)=2^{|-x|}=f(x)$，所以$f(x)$是偶函数，故 A 错误；

对于 B：由幂函数$f(x)=x^3$的图象可知，$f(x)=x^3$在$(0,+\infty)$上单调递增，故 B 错误；

对于 C：函数$f(x)=\frac{1}{x}-x$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

又$f(-x)=\frac{1}{-x}-(-x)=-f(x)$，所以$f(x)$是奇函数，

又幂函数$y=\frac{1}{x},y=-x$都在$(0,+\infty)$上单调递减，

所以函数$f(x)=\frac{1}{x}-x$在$(0,+\infty)$上单调递减，故 C 正确；

对于 D：因为对数函数$y=\ln x$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以函数$f(x)=\begin{cases}\ln x,x>0,\\-\ln(-x),x<0\end{cases}$在$(0,+\infty)$上单调递增，故 D 错误.

故选：C.

4．B

【分析】先确定圆心$C(2,-1)$，然后由条件可知C到两直线的距离$d=\sqrt{3}$，设C到其中一条直线的投影为H，由条件可知$\angle HPC=\frac{\pi}{6}$，最后利用$CH=d=\sqrt{3}$即得结果.

【详解】圆C的方程化为标准方程即为$\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2=4$，所以圆心$C\left(2,-1\right)$，且半径$r=2$.

而一条直线被圆C所截得的弦长为2，意味着圆心$C\left(2,-1\right)$到该直线的距离

$d=\sqrt{r^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2}=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$.

记C到其中一条直线的投影为H，则$CH=d=\sqrt{3}$，$\angle HPC=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$，所以

$CP=\frac{CH}{\sin\angle HPC}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{3}$.

故选：B.

5．D

【分析】考虑运用间接法，用从16颗棋子中任选3颗的方法数，去掉不符合题意的情形下的方法数即得.

【详解】运用间接法，在从16颗棋子中任选3颗的方法数C_{16}^3，

去掉有4颗棋子在一条直线上的10种情形下的方法数$10\mathrm{C}_4^3$和恰有三颗棋子在一条直线上的4种情形下的方法数$4\mathrm{C}_3^3$，

即得可围成的不同的三角形的个数，为$\mathrm{C}_{16}^3-10\mathrm{C}_4^3-4\mathrm{C}_3^3=516$.

故选：D.

6．B

【分析】由已知$\sin\alpha+\sin\beta=-\frac{3}{2},\cos\alpha-\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，平分求和可得$\cos\left(\alpha+\beta\right)$的值，结合角度范围可得所求.

【详解】因为$\sin\alpha+\sin\beta=-\frac{3}{2},\cos\alpha-\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

平方求和得：$2+2\left(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta\right)=3$，所以$\cos\left(\alpha+\beta\right)=-\frac{1}{2}$，

由$\alpha,\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$得$\alpha+\beta\in\left[-\pi,\pi\right]$，所以$\alpha+\beta=-\frac{2\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$，

又$\sin\alpha+\sin\beta=-\frac{3}{2}$，则$\sin\alpha,\sin\beta<0$，所以$\alpha,\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，

所以$\alpha+\beta=-\frac{2\pi}{3},\sin\left(\alpha+\beta\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：B.

7．C

【分析】根据空间向量的数量积和运算律求出$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{TN}$的值，再分别求出两向量的模，最后利用夹角公式即可.

【详解】记$\overrightarrow{PA}=\vec{a},\overrightarrow{PB}=\vec{b},\overrightarrow{PC}=\vec{c}$，则$\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$，

$\overrightarrow{TN}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times4\times\frac{1}{2}=8,\vec{a}\cdot\vec{c}=4\times1\times\frac{1}{2}=2,\vec{b}\cdot\vec{c}=4\times1\times\frac{1}{2}=2$

则$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{TN}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)=\frac{1}{4}\left(\vec{a}^2-\vec{b}^2+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=1$，

$\left|\overrightarrow{PM}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2}=2\sqrt{3}$，

$\left|\overrightarrow{TN}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^2+\vec{c}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{c}\cdot\vec{b}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$，

设直线PM与NT所成的角为θ,则

$$\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{TN}}{\left|\overrightarrow{PM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{TN}\right|}\right|=\left|\frac{1}{2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{17}}{2}}\right|=\frac{\sqrt{51}}{51},\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{51}}{51}\right)^2}=\frac{5\sqrt{102}}{51},$$

所以$\tan\theta=5\sqrt{2}$.

故选：C.

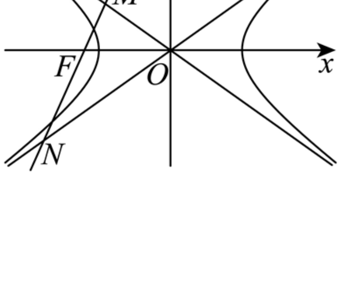
8．B

【分析】由$\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{1}{2}$，得$\frac{|MO|}{|NO|}=\frac{1}{2}$，令$\angle MOF=\theta$，$\triangle MON$中，由正弦定理解得

$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{b}{a}$，可求双曲线离心率.

【详解】设O为坐标原点，由$\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{1}{2}$，得$\frac{S_{\triangle OFM}}{S_{\triangle OFN}}=\frac{1}{2}$，又两渐近线关于$x$轴对称，所以

$\frac{|MO|}{|NO|}=\frac{1}{2}$.



直线MN斜率为$\sqrt{3}$，则$\angle MFO=\dfrac{\pi}{3}$，

令$\angle MOF=\theta$，则$\angle FMO=\dfrac{2\pi}{3}-\theta, \angle FNO=\dfrac{\pi}{3}-\theta$，

$\triangle MON$中，由正弦定理得$\dfrac{|MO|}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}=\dfrac{|NO|}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)}$，

即$\dfrac{|MO|}{|NO|}=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\dfrac{1}{2}\sin\theta}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta}=\dfrac{1}{2}$，解得$\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以C的离心率$e=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

故选：B

9．CD

【分析】对于A，若(x_1, y_1)在回归方程上; 对于B，C，由相关系数和相关指数的性质判断;对于D，由残差点分布的特征判断.

【详解】对于A，若去除的点恰好在原回归直线上，则去除该点后，回归方程不会发生改变，故A错误；

对于B，$|r|$越接近于1，则x, y之间的线性相关程度越强，故B错误；

对于C，若散点图中的散点均落在一条斜率非的直线上，则变量与变量之间满足线性函数关系，决定系数$R^2=1$,故C正确；

对于D，在残差图中，残差点分布的水平带状区域越窄，说明波动越小，即模型的拟合精度越高，故D正确.

故选：CD

10．ACD

【分析】先将条件化为$f(x+y)+1=f(x)f(y)+f(x)+f(y)+1=(f(x)+1)(f(y)+1)$，然后直接在恒等式中取特殊值，即可验证A选项，并得到$f(x+1)+1=(f(x)+1)(f(1)+1)$，再由此验证C和D选项. 对于B选项，直接给出一个反例即可.

【详解】我们有恒等式：$f(x+y)+1=f(x)f(y)+f(x)+f(y)+1=(f(x)+1)(f(y)+1)$.

对于A，由恒等式可得$f(0)+1=(f(0)+1)(f(0)+1)$，而$f(0)\neq -1$，故$f(0)+1\neq 0$，所以