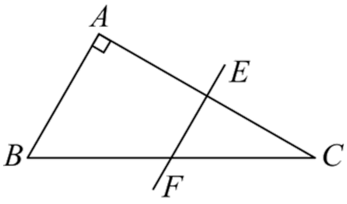
专题 2.22 轴对称的最值问题（提升练）

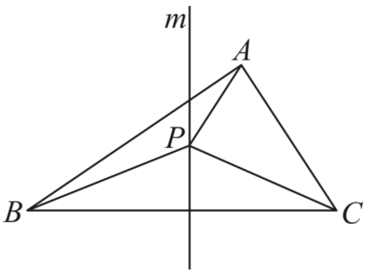
一、单选题

1．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle A=90^\circ$，$\angle C=30^\circ$，$AB=3$，EF 是 AC 的垂直平分线，P 是直线 EF 上的任意一点，则 $PA+PB$ 的最小值是（　）



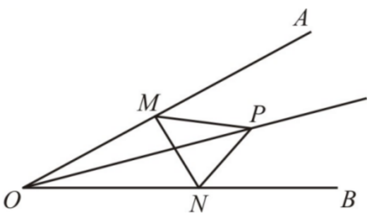
A．3　　B．4　　C．5　　D．6

2．如图，直线 m 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边的垂直平分线，点 P 是直线 m 上一动点，若 $AB=8$，$AC=7$，$BC=9$，则△APC 周长的最小值是（　）



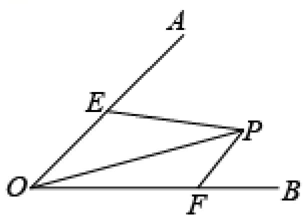
A．15　　B．16　　C．17　　D．15.5

3．如图，$\angle AOB=30^\circ$，M，N 分别是射线 OA,OB 上的动点，OP 平分 $\angle AOB$，$OP=9$，则 $\triangle PMN$ 的周长的最小值为（　　）



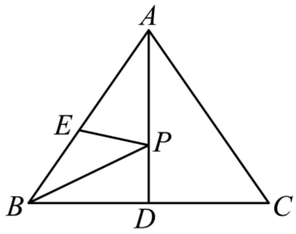
A．9　　B．$\dfrac{9}{2}$　　C．6　　D．27

4．如图，已知 $\angle AOB$ 的大小为 α，P 是 $\angle AOB$ 内部的一个定点，且 $OP=5$，点 E、F 分别是 OA、OB 上的动点，若 $\triangle PEF$ 周长的最小值等于 5，则 $\alpha=$(　)



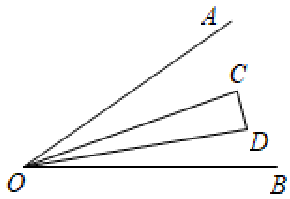
A．30°　　　　B．45°　　　　C．60°　　　　D．90°

5．如图，在ΔABC中，$AB = AC = 10$，D为BC的中点，$AD = 8$，$BD = 6$，点P为AD边上的一个动点，点E为AB边上的一个动点，则$PE + PB$的最小值为（　）



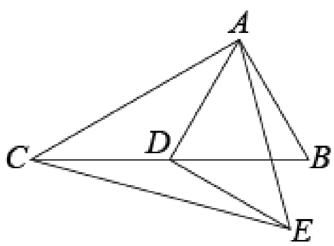
A．12　　　　B．10　　　　C．$\frac{48}{5}$　　　　D．$\frac{54}{5}$

6．如图，$\angle AOB = 35°$，点C，D在$\angle AOB$内部，连接OC，OD，CD，在射线OA上取一点E，在射线OB上取一点F，连接CE，EF，FD，得到四边形$CEFD$，若$OC = OD = 5$，$CD = 1$，$\angle COD = 10°$，则四边形$CEFD$周长最小值是（　　）



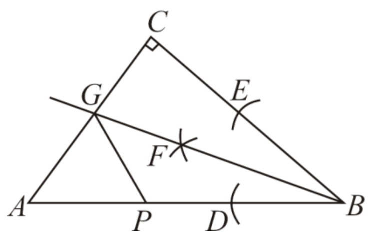
A．5　　　　B．6　　　　C．7　　　　D．11

7．如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle B$＝60°，D是线段BC上一动点，将A绕点D顺时针旋转90°至点E，连接CE．当CE取最小值时，$\angle ACE$＝（　　）



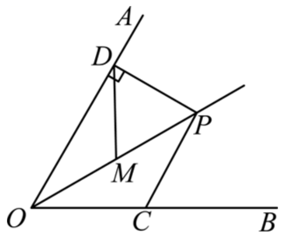
A．45°　　　　B．65°　　　　C．75°　　　　D．105°

8．如图，$Rt\triangle ABC$中，$\angle C$＝90°，$\angle B$＝60°．首先以顶点B为圆心、适当长为半径作弧，在边BC、BA上截取BE、BD；然后分别以点D、E为圆心、以大于$\frac{1}{2}DE$的长为半径作弧，两弧在$\angle CBA$内交于点F；作射线BF交AC于点G．若BG＝1，P为边AB上一动点，则GP的最小值为（　）



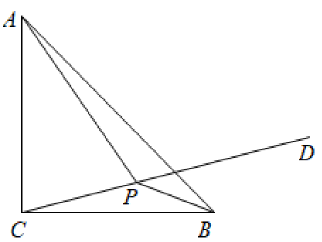
A．无法确定　　B．$\frac{1}{2}$　　C．1　　D．2

9．如图，$\angle AOB=60°$，P是$\angle AOB$角平分线上一点，$PD\perp AO$，垂足为D，点M是OP的中点，且$DM=4$，如果点C是射线OB上一个动点，则PC的最小值是（　　）



A．8　　B．6　　C．4　　D．2

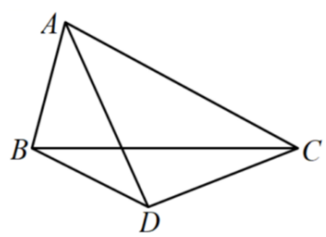
10．如图，若$\triangle ABC$为等腰直角三角形，$AC=BC=5$，$\angle BCD=15°$，P为CD上的动点，则$|PA-PB|$的最大值是（　　）



A．3　　B．4　　C．5　　D．6

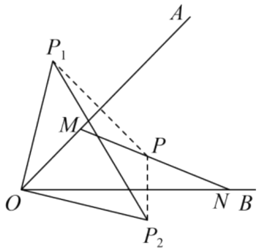
二、填空题

11．如图，$\triangle ABC$中，BC=10，$AC-AB=6$，AD是$\angle BAC$的角平分线，$CD\perp AD$，则$\triangle BCD$的面积最大值为_____.

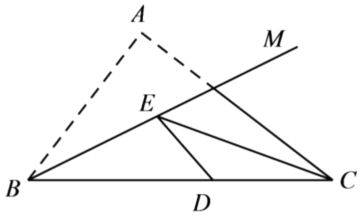


12．如图，$\angle AOB=45°$，点M、N分别在射线OA、OB上，$MN=8$，$\triangle OMN$的面积为12，P是直线MN上的动点，点P关于OA对称的点为P_1，点P关于OB对称的点为P_2，当点P在直线NM上运动时，$\triangle OP_1P_2$

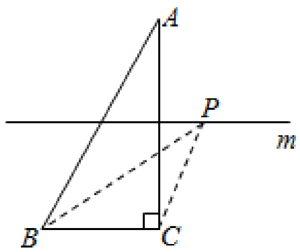
的面积最小值为_____.



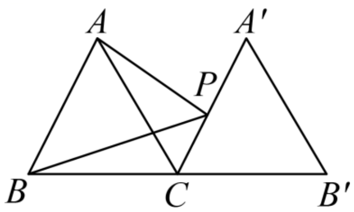
13．如图，在$\triangle ABC$中，$AB=12$，$AC=16$，$BC=20$．将$\triangle ABC$沿射线BM折叠，使点A与BC边上的点D重合，E为射线BM上的一个动点，则$\triangle CDE$周长的最小值_____.



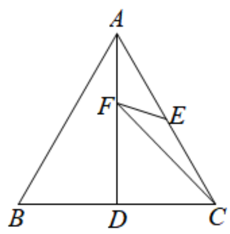
14．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，$BC=1$，直线m垂直平分AC，点P为直线m上的动点，则$PB+PC$的最小值是____.



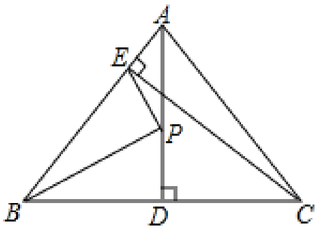
15．如图，等边$\triangle ABC$和等边$\triangle A'B'C$的边长都是4，点B，C，B'在同一条直线上，点P在线段$A'C$上，则$AP+BP$的最小值为________.



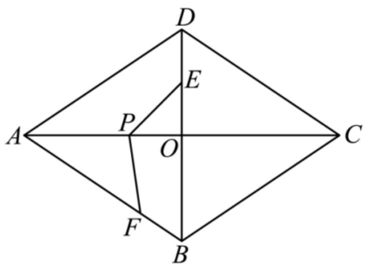
16．如图，等边三角形ABC中，AD是BC边上的中线，F是AD边上的动点，E是边AC的中点．当$\triangle ECF$的周长取得最小值时，$\angle EFC$的度数为__________°.



17．如图，在△ABC 中，AB＝AC＝5，$S_{\triangle}ABC$＝12，$AD\perp BC$ 于点 D，$CE\perp AB$ 于点 E．若点 P 是 AD 上一动点，连接 PE，PB，则 PE＋PB 的最小值是_____．



18．如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=120°$，对角线 AC、BD 交于点 O，$BD=8$，点 E 为 OD 的中点，点 F 为 AB 上一点，且 $AF=3BF$，点 P 为 AC 上一动点，连接 PE、PF，则 $\left|PF-PE\right|$ 的最大值为______．



三、解答题

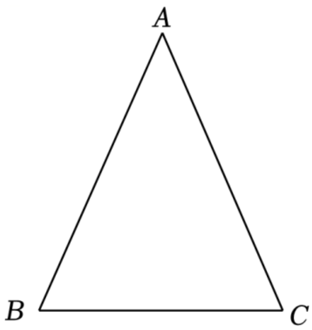
19．如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$．

(1)作 AB 的垂直平分线交 AB 于点 N，交 AC 于点 M（保留作图痕迹）.

(2)连接 MB，若 $AB=8\text{cm}$，$\triangle MBC$ 的周长是 14cm．

①求 BC 的长；

②在直线 MN 上是否存在点 P，使 $PB+CP$ 的值最小，若存在，标出点 P 的位置并求 $PB+CP$ 的最小值，若不存在，说明理由．



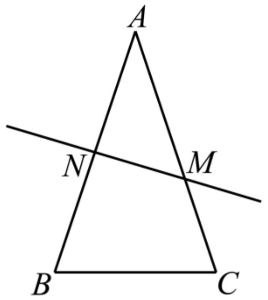
20．如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，AB的垂直平分线交AB于N，交AC于M．

（1）若$\angle B=70^{\circ}$，则$\angle NMA$的度数是_；

（2）连接MB，若$AB=8\text{cm}$，$\triangle MBC$的周长是14cm．

①求BC的长；

②在直线MN上是否存在点P，使$PB+CP$的值最小，若存在，标出点P的位置并直接写出$PB+CP$的最小值；若不存在，说明理由．



21．已知：$\triangle ABC$为等边三角形．

(1)如图1，点D、E分别为边BC、AC上的点，且$BD=CE$．

①求证：$\triangle ABD\cong\triangle BCE$．

②求$\angle AFE$的度数．

(2)如图2，点D为$\triangle ABC$外一点，$\angle BDC=60^{\circ}$，BA、CD的延长线交于点E，连接AD，猜想线段AD、CD、BD之间的数量关系并加以证明．

(3)如图3，D是等边三角形ABC外一点．若$BD=8, CD=6$，连接AD，直接写出AD的最大值与最小值的差．

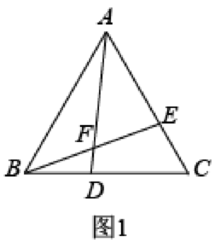


图1

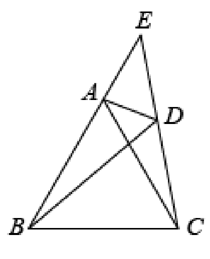


图2

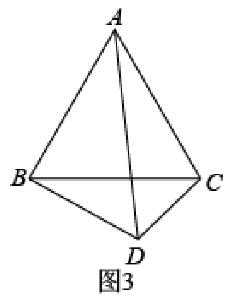


图3

22．如图 1、图 2 和图 3，A、B 两点在直线 l 同侧，且点 A、B 所在直线与 l 不平行，在直线 l 上画出符合要求的点 P（不写做法与理由，保留作图痕迹）.

（1）$PA-PB$ 为最大值，在图 1 中的直线 l 上画出点 P_1 的位置；

（2）$PA=PB$，在图 2 中的直线 l 上画出点 P_2 的位置；

（3）$PA+PB$ 为最小值，在图 3 中的直线 l 画出点 P_3 的位置.

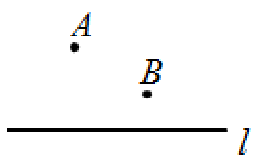


图1

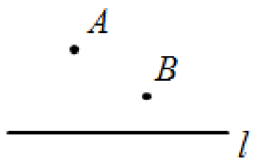


图2

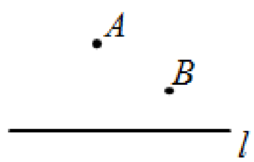


图3

23．已知：△ABC 为等边三角形.

（1）如图 1，点 D、E 分别为边 BC、AC 上的点，且 BD＝CE.

①求证：△ABD≌△BCE；

②求∠AFE 的度数；

（2）如图 2，点 D 为△ABC 外一点，BA、CD 的延长线交于点 E，连接 AD，已知∠BDC＝60°，且 AD＝2，CD＝5，求 BD 的长；

（3）如图 3，线段 DB 的长为 3，线段 DC 的长为 2，连接 BC，以 BC 为边作等边△ABC，连接 AD，直接写出当线段 AD 取最大值与最小值时∠BDC 的度数.

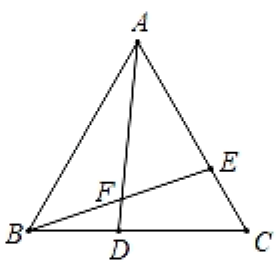


图1

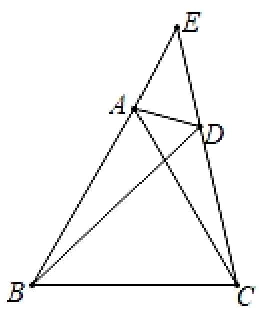


图2

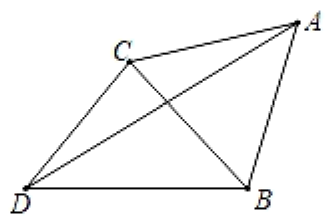
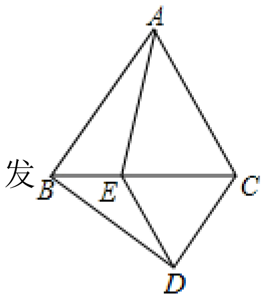
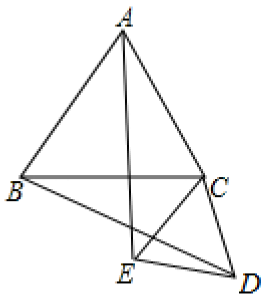


图3

24．如图①，△ABC，△CDE 都是等边三角形．



①



②

（1）写出 AE 与 BD 的大小关系．

（2）若把△CDE 绕点 C 逆时针旋转到图②的位置时，上述（1）的结论仍成立吗？请说明理由．

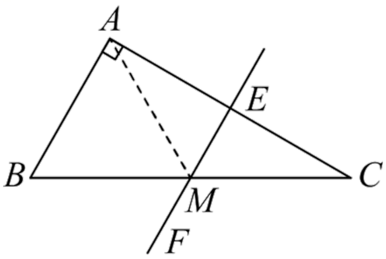
（3）△ABC 的边长为 5，△CDE 的边长为 2，把△CDE 绕点 C 逆时针旋转一周后回到图①位置，求出线段 AE 长的最大值和最小值．

参考答案

1．D

【分析】根据线段的垂直平分线的性质可得$MA=MC$，根据两点之间线段最短即可求解．

【详解】解：设EF与BC于点M ,连接AM，如图，



$\because \angle A=90°,\ \angle C=30°,\ AB=3$，

$\therefore BC=2AB=2\times 3=6$，

$\because EF$是AC的垂直平分线，

$\therefore MA=MC$，

根据两点之间线段最短，

$PA+PB=PB+PC=BC$，最小，

此时点P与点M重合．

所以$PA+PB$的最小值即为BC的长，为6．

所以$PA+PB$的最小值为6．

故选：D．

【点拨】本题考查了轴对称-最短路线问题，解决本题的关键是利用线段的垂直平分线的性质．

2．A

【分析】根据垂直平分线的性质$BP=PC$，所以$\triangle APC$周长$=AC+AP+PC=AC+AP+BP\geq AC+AB=9$．

【详解】$\because$直线m是$\triangle ABC$中BC边的垂直平分线,

$\therefore BP=PC$

$\therefore \triangle APC$周长$=AC+AP+PC=AC+AP+BP$

$\because$两点之间线段最短

$\therefore AP+BP\geq AB$

$\therefore \triangle APC$的周长$=AC+AP+BP\geq AC+AB$

$\because AC=7$，$AB=8$

$\therefore \triangle APC$周长最小为$AC+AB=15$

故选：A

【点拨】本题主要考查线段垂直平分线的性质定理，以及两点之间线段最短．解题的关键是能得出 $AP+BP\geq AB$．

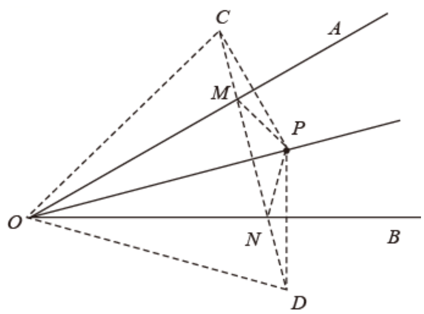
3．A

【分析】作 P 点关于射线 OA 的对称点 C 点，作 P 点关于射线 OB 的对称点 D 点，连接 CD， CD 与射线 OA,OB 的交点

即为 M 点、N 点，连接 PM、PN，此时 $\triangle PMN$ 的周长最小，证明 $\triangle COD$ 是等边三角形即可求解．

【详解】解：作 P 点关于射线 OA 的对称点 C 点，作 P 点关于射线 OB 的对称点 D 点，连接 CD， CD 与射线 OA,OB 的

交点即为 M 点、N 点，连接 PM、PN，此时 $\triangle PMN$ 的周长最小，



∵C 点、P 点关于射线 OA 对称，

∴射线 OA 垂直平分 PC，

∴$CO=OP=9, CM=PM$，

∴$\angle COA=\angle AOP$，

同理：$\angle POB=\angle DOB, PN=ND, PO=OD=9$，

∴$CO=OD$，

∵$\angle AOB=30°$，

∴$\angle AOB=\angle AOP+\angle BOP=30°$，

∴$\angle COD=2\angle AOP+2\angle BOP=2(\angle AOP+\angle BOP)=60°$，

∴$\triangle COD$ 是等边三角形，

∴$CD=CO=9$，

∴$\triangle PMN$ 的周长 $=PM+PN+MN=MC+ND+MN=CD=9$，

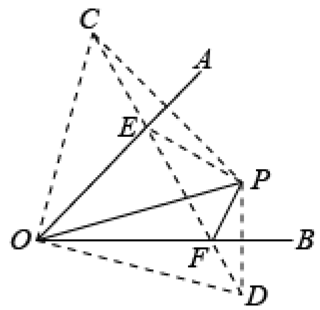
故选：A．

【点拨】本题考查了轴对称的性质、等边三角形的判定及性质，利用对称将$\triangle PMN$的周长最小值转化为两点间线段最短是关键与难点．

4．A

【分析】设点P关于OA的对称点为C，关于OB的对称点为D，当点E、F在CD上时，$\triangle PEF$的周长为$PE+EF+FP=CD$，此时周长最小，根据$CD=5$可得出$\triangle COD$是等边三角形，进而可求出α的度数．

【详解】解：如图，作点P关于OA的对称点C，关于OB的对称点D，连接CD，交OA于E，OB于F．



此时，$\triangle PEF$的周长最小．

连接OC，OD，PE，PF．

$\because$点P与点C关于OA对称，

$\therefore OA$垂直平分PC，

$\therefore \angle COA=\angle AOP$，$PE=CE$，$OC=OP$，

同理，可得$\angle DOB=\angle BOP$，$PF=DF$，$OD=OP$．

$\therefore \angle COA+\angle DOB=\angle AOP+\angle BOP=\angle AOB=\alpha$，$OC=OD=OP=5$，

$\therefore \angle COD=2\alpha$．

又$\because \triangle PEF$的周长$=PE+EF+FP=CE+EF+FD=CD=5$，

$\therefore OC=OD=CD=5$，

$\therefore \triangle COD$是等边三角形，

$\therefore 2\alpha=60°$，

$\therefore \alpha=30°$．

故选：A．

【点拨】本题主要考查了最短路径问题，本题找到点E和F的位置是解题的关键．要使$\triangle PEF$的周长最小，通常是把三边的和转化为一条线段，运用三角形三边关系解决．

5．C

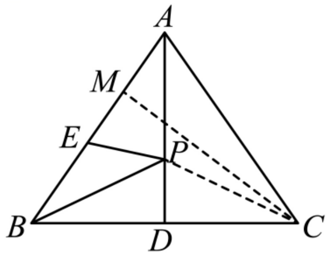
【分析】根据等腰三角形三线合一可得$AD\perp BC$，连接CP，过点C作$CM\perp AB$，可得

$PE+PB=PE+CP$，当 E、P、C 三点共线且 $CE\perp AB$ 时，$PE+PB$ 最小值=CM，结合面积法即可求解.

【详解】解：∵在 ΔABC 中，$AB=AC=10$，D 为 BC 的中点，$AD=8$，$BD=6$，

$\therefore AD\perp BC$，$BC=2\times 6=12$，

连接 CP，过点 C 作 $CM\perp AB$，



∵B、C 关于 AD 轴对称，

$\therefore BP=CP$，

$\therefore PE+PB=PE+CP$，当 E、P、C 三点共线且 $CE\perp AB$ 时，$PE+PB$ 最小值=CM，

$\because \frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}AB\cdot CM$，

$\therefore CM=12\times 8\div 10=\frac{48}{5}$，

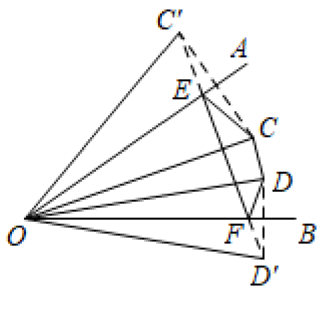
故选 C.

【点拨】本题主要考查等腰三角形的性质，轴对称的性质，掌握等腰三角形三线合一以及面积法时关键.

6．B

【分析】过点 C 作 OA 的对称点 C'，过点 D 作 OB 的对称点 $D¢$，连接 $C'D'$ 交 OA、OB 于点 E 和 F，则四边形 $CEFD$ 周长取得最小值，证明△$C'OD'$ 是等边三角形，据此求解即可.

【详解】解：过点 C 作 OA 的对称点 C'，过点 D 作 OB 的对称点 $D¢$，连接 $C'D'$ 交 OA、OB 于点 E 和 F，则四边形 $CEFD$ 周长取得最小值，



∵点 C、点 C' 关于 OA 对称，点 D、点 $D¢$ 关于 OB 对称，

$\therefore OC=OC'$，$\angle COA=\angle C'OA$，$EC=EC'$，$OD=OD'$，$\angle DOB=\angle D'OB$，$FD=FD'$，

$\therefore OC'=OC=OD'=OD$，

∴四边形 $CEFD$ 周长 $=CD+EC+EF+FD=CD+EC'+EF+FD'=CD+C'D'$，

∵ $\angle AOB=35^\circ$， $\angle COD=10^\circ$，

∴ $\angle COA+\angle DOB=35^\circ-10^\circ=25^\circ$，

∴ $\angle C'OD'=2\angle COA+2\angle DOB+\angle COD=50^\circ+10^\circ=60^\circ$，

∴ $\triangle C'OD'$ 是等边三角形，

∵ $OC=OD=5$， $CD=1$，

∴四边形 $CEFD$ 周长最小值是 $CD+C'D'=1+5=6$．

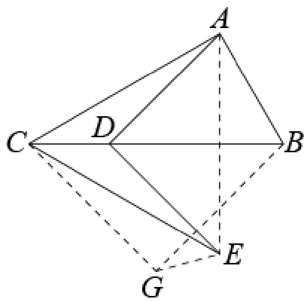
故选：B．

【点拨】本题考查轴对称-最短问题，等边三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会利用轴对称解决最短问题．

7．C

【分析】以 BC 为斜边向下作等腰直角三角形 BCG，根据 $CE\geq CG+GE$，当 C,G,E 三点共线时，CE 取得最小值，即可求解．

【详解】解：如图，以 BC 为斜边向下，作等腰直角三角形 BCG，



∵ $CE\geq CG+GE$，

当 C,G,E 三点共线时，CE 取得最小值，此时

$\angle ACE=\angle ACB+\angle BCE=30^\circ+45^\circ=75^\circ$．

故选 C

【点拨】本题考查了等腰直角三角形的性质，两点之间线段最短，掌握以上知识是解题的关键．

8．B

【分析】由尺规作图步骤可得，BG 平分$\angle ABC$，根据角平分线的性质以及含 30 度角的直角三角形的性质，可得 $CG=\frac{1}{2}BG=\frac{1}{2}$，根据垂线段最短即可求解．

【详解】解：由尺规作图步骤可得，BG 平分$\angle ABC$，

∵$\angle C$＝90°，$\angle B$＝60°，

∴$\angle CBG$＝$\angle ABG$＝30°，

∴$CG=\frac{1}{2}BG=\frac{1}{2}$，

∴点 G 到 AB 的距离等于 GC，

∴GP 的最小值为$\frac{1}{2}$，

故选：B．

【点评】本题考查作图﹣基本作图，垂线段最短，角平分线的性质定理等知识，解题的关键是读懂图象信息，属于中考常考题型．

9．C

【分析】根据角平分线的定义可得$\angle AOP=\frac{1}{2}\angle AOB=30°$，再根据直角三角形的性质求得 $PD=\frac{1}{2}OP=4$，然后根据角平分线的性质和垂线段最短得到结果．

【详解】解：∵P 是$\angle AOB$ 角平分线上的一点，$\angle AOB=60°$，

∴$\angle AOP=\frac{1}{2}\angle AOB=30°$，

∵$PD\perp OA$，M 是 OP 的中点，$DM=2$，

∴$OP=2DM=8$，

∴$PD=\frac{1}{2}OP=4$，

∵点 C 是 OB 上一个动点，

∴PC 的最小值为 P 到 OB 距离，

∴PC 的最小值=$PD=4$．

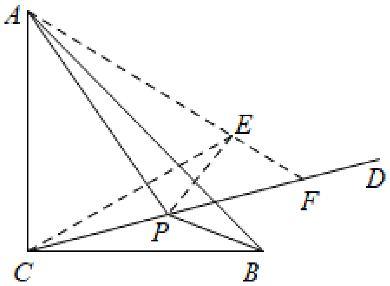
故选：C．

【点拨】本题考查了角平分线上的点到角的两边距离相等的性质，直角三角形的性质，熟记性质并作出辅助线构造成直角三角形是解题的关键．

10．C

【分析】作点B关于直线CD的对称点E，连接AE并延长交CD于点F，连接CE、PE，易得$PB=PE$，$BC=CE$，$\angle PCE=\angle BCD=15°$，进而构造出等边三角形，然后根据三角形的三边关系可得$|PA-PB|=|PA-PE|\le AE$，求出AE的长即可．

【详解】解：如图，作点B关于直线CD的对称点E，连接AE并延长交CD于点F，连接CE、PE，



由轴对称图形的性质可知 $PB=PE$， $BC=CE$， $\angle PCE=\angle BCD=15°$，

$\therefore \left|PA-PB\right|=\left|PA-PE\right|\le AE$，

即当 P、E、A 三点共线时，$\left|PA-PB\right|$ 的最大值为 AE，

$\because$ $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形， $AC=BC=5$，

$\therefore \angle ACB=90°$， $CE=BC=AC=5$，

$\therefore \angle ACE=\angle ACB-(\angle BCD+\angle PCE)=60°$，

$\therefore \triangle ACE$ 是等边三角形，

$\therefore AE=AC=4$，

即 $\left|PA-PB\right|$ 的最大值为 4.

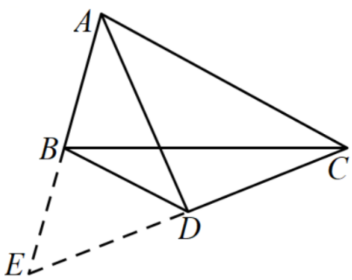
故选：C.

【点拨】本题考查了等腰直角三角形的性质、等边三角形的判定与性质、轴对称图形的性质等知识，通过轴对称图形的性质转化线段和角是解题的关键.

11．15

【分析】延长 AB， CD 交点于 E， 可证 $\Delta ADE\cong\Delta ADC\left(ASA\right)$， 得出 $AC=AE$， $DE=CD$， 则 $S_{\Delta BDC}=\frac{1}{2}S_{\Delta BCE}$， 当 $BE\perp BC$ 时， $S_{\Delta BEC}$ 最大面积为 30，即 $S_{\Delta BDC}$ 最大面积为 15.

【详解】解：如图：延长 AB， CD 交点于 E，



$\because$ AD 平分 $\angle BAC$，