浙江省宁波市奉化高中、三山高中等六校 2023-2024 学年高三下学期第三次阶段检测试题数学试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知 F_1,F_2 是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，A,B 是 C 的左、右顶点，点 P 在过 F_1 且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 的直线上，$\triangle PAB$ 为等腰三角形，$\angle ABP=120°$，则 C 的渐近线方程为（　　）

A． $y=\pm\frac{1}{2}x$　　**B．** $y=\pm 2x$　　**C．** $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　**D．** $y=\pm\sqrt{3}x$

2．已知 $x=0$ 是函数 $f(x)=x(ax-\tan x)$ 的极大值点，则 a 的取值范围是

A． $(-\infty,-1)$　　**B．** $(-\infty,1]$

C． $[0,+\infty)$　　**D．** $[1,+\infty)$

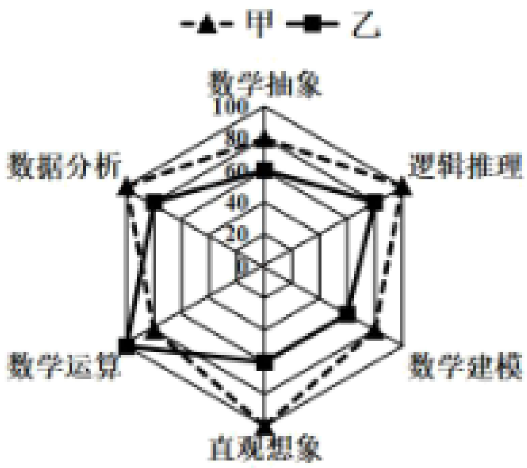
3．已知函数 $f(x)=a^x$（$a>0$，且 $a\neq 1$）在区间 $[m,2m]$ 上的值域为 $[m,2m]$，则 $a=$（　　）

A． $\sqrt{2}$　　**B．** $\frac{1}{4}$　　**C．** $\frac{1}{16}$或 $\sqrt{2}$　　**D．** $\frac{1}{4}$或 4

4．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^3+x^2, x<1\\ \dfrac{a\ln x}{x(x+1)}, x\geq 1\end{cases}$，若曲线 $y=f(x)$ 上始终存在两点 A，B，使得 $OA\perp OB$，且 AB 的中点在 y 轴上，则正实数 a 的取值范围为（　　）

A． $(0,+\infty)$　　**B．** $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$　　**C．** $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　　**D．** $[\mathrm{e},+\infty)$

5．为比较甲、乙两名高中学生的数学素养，对课程标准中规定的数学六大素养进行指标测验（指标值满分为 **100** 分，分值高者为优），根据测验情况绘制了如图所示的六大素养指标雷达图，则下面叙述不正确的是（　　）



A．甲的数据分析素养优于乙　　　　　　B．乙的数据分析素养优于数学建模素养

C．甲的六大素养整体水平优于乙　　　　D．甲的六大素养中数学运算最强

6．我国南北朝时的数学著作《张邱建算经》有一道题为："今有十等人，每等一人，宫赐金以等次差降之，上三人先入，得金四斤，持出，下三人后入得金三斤，持出，中间四人未到者，亦依次更给，问各得金几何？"则在该问题中，等级较高的二等人所得黄金比等级较低的九等人所得黄金（　）

A．多 1 斤　　B．少 1 斤　　C．多$\dfrac{1}{3}$斤　　D．少$\dfrac{1}{3}$斤

7．定义在 ***R*** 上的函数 $f(x)=x+g(x)$，$g(x)=-2x-2+g(-2-x)$，若 $f(x)$ 在区间 $\left[-1,+\infty\right)$ 上为增函数，且存在 $-2<t<0$，使得 $f(0)\cdot f(t)<0$.则下列不等式不一定成立的是（　　）

A．$f\left(t^2+t+1\right)>f\left(\dfrac{1}{2}\right)$　　B．$f(-2)>0>f(t)$

C．$f(t+2)>f(t+1)$　　D．$f(t+1)>f(t)$

8．已知 m，n 是两条不重合的直线，α 是一个平面，则下列命题中正确的是（　　）

A．若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$　　B．若 $m//\alpha$，$n\subset\alpha$，则 $m//n$

C．若 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，则 $n//\alpha$　　D．若 $m\perp\alpha$，$n//\alpha$，则 $m\perp n$

9．已知集合 $A=\left\{(x,y)\,|\,y=\sqrt{1-x^2}\right\}$，$B=\left\{(x,y)\,|\,y=2x\right\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为(　　)

A．3　　B．2　　C．1　　D．0

10．在 $\begin{cases}2x-y-6\le 0\\ x-y+2\ge 0\\ x+y\ge 2\end{cases}$ 条件下，目标函数 $z=ax+by\left(a>0,b>0\right)$ 的最大值为 40，则 $\dfrac{5}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值是（　　）

A．$\dfrac{7}{4}$　　B．$\dfrac{9}{4}$　　C．$\dfrac{5}{2}$　　D．2

11．已知$(1+\lambda x)^n$展开式中第三项的二项式系数与第四项的二项式系数相等，$(1+\lambda x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，若$a_1+a_2+\cdots a_n=242$，则$a_0-a_1+a_2-\cdots+(-1)^n a_n$的值为(　　)

A．1　　　　B．－1　　　　C．81　　　　D．－81

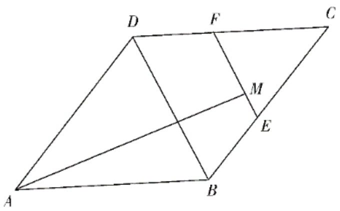
12．已知$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=\dfrac{\cos 2\beta}{1-\sin 2\beta}$，则（　　）

A．$2\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$　　　　B．$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$

C．$\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$　　　　D．$\alpha+2\beta=\dfrac{\pi}{2}$

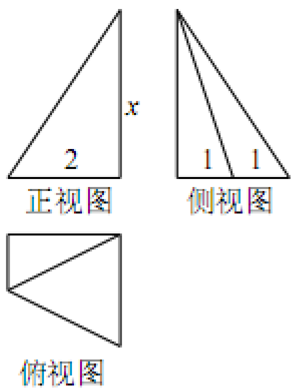
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．如图，在菱形 ***ABCD*** 中，***AB*=3**，$\angle BAD=60^\circ$，***E*，*F*** 分别为 ***BC*，*CD*** 上的点，$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB},\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FD}$，若线段 ***EF*** 上存在一点 ***M***，使得$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AD}\ (x\in R)$，则$x=$____________，$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=$____________．（本题第 **1** 空 **2** 分，第 **2** 空 **3** 分）



14．已知$f(x)$是定义在R上的偶函数，其导函数为$f'(x)$．若$x>0$时，$f'(x)<2x$，则不等式$f(2x)-f(x-1)>3x^2+2x-1$的解集是___________．

15．某几何体的三视图如图所示，且该几何体的体积是 **3**，则正视图的x的值__________．



16．设数列$\{a_n\}$的前 ***n*** 项和为S_n，且$2S_n=3(a_n+1)$，若$a_{10}=ka_8$，则$k=$______________．

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

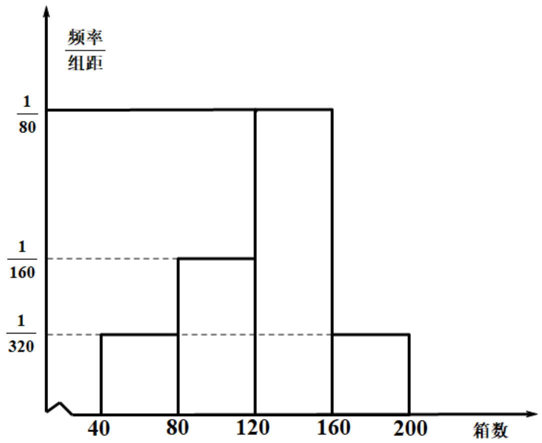
17．（12 分）已知函数$f(x)=2\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1, x\in R.$

（1）求 $f(x)$的单调递增区间；

（2）$\triangle ABC$ 内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，若 $f(\frac{A}{2})=1$ 且 A 为锐角，$a=3$，$\sin C=2\sin B$，求$\triangle ABC$ 的面积.

18.（12 分）近几年一种新奇水果深受广大消费者的喜爱，一位农户发挥聪明才智，把这种露天种植的新奇水果搬到了大棚里，收到了很好的经济效益．根据资料显示，产出的新奇水果的箱数 x（单位：十箱）与成本 y（单位：千元）的关系如下：

x	1	3	4	1	2
y	5	1．5	2	2．5	8



y 与 x 可用回归方程 $\hat{y}=\hat{b}\lg x+\hat{a}$ （ 其中 $\hat{a}$，$\hat{b}$ 为常数）进行模拟．

（Ⅰ）若该农户产出的该新奇水果的价格为 150 元/箱，试预测该新奇水果 100 箱的利润是多少元．|.

（Ⅱ）据统计，10 月份的连续 11 天中该农户每天为甲地配送的该新奇水果的箱数的频率分布直方图如图所示．

（i）若从箱数在 $[40,120)$ 内的天数中随机抽取 2 天，估计恰有 1 天的水果箱数在 $[80,120)$ 内的概率；

（ii）求这 11 天该农户每天为甲地配送的该新奇水果的箱数的平均值．（每组用该组区间的中点值作代表）

参考数据与公式：设 $t=\lg x$，则

$\overline{t}$	$\overline{y}$	$\sum_{i=1}^{5}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})$	$\sum_{i=1}^{5}(t_i-\overline{t})^2$
0.54	1.8	1.53	0.45

线性回归直线 $\hat{y}=\hat{b}\lg x+\hat{a}$ 中，$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}$.

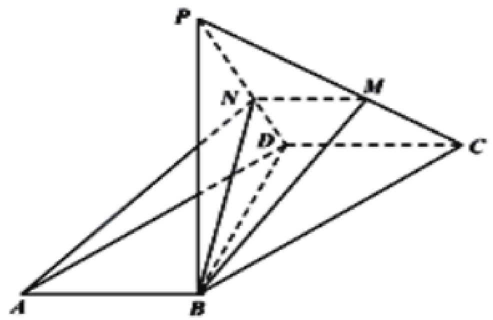
19.（12 分）在平面直角坐标系 xOy 中，以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为

$\rho = 2\sin\theta + 2a\cos\theta\left(a > 0\right)$；直线 **l** 的参数方程为 $\begin{cases} x = -2 + \sqrt{2}t \\ y = \sqrt{2}t \end{cases}$（**t** 为参数）.直线 **l** 与曲线 **C** 分别交于 **M**，**N** 两点.

（1）写出曲线 **C** 的直角坐标方程和直线 **l** 的普通方程；

（2）若点 **P** 的极坐标为 $\left(2,\pi\right)$，$\left|PM\right| + \left|PN\right| = 5\sqrt{2}$，求 a 的值.

20．（12 分）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AD = 2AB$，$\angle A = 60°$，现沿对角线 BD 将 ΔABD 折起，使点 **A** 到达点 **P**，点 **M**，**N** 分别在直线 PC，PD 上，且 **A**，**B**，**M**，**N** 四点共面.



（1）求证：$MN \perp BD$；

（2）若平面 $PBD \perp$ 平面 BCD，二面角 $M - AB - D$ 平面角大小为 $30°$，求直线 PC 与平面 BMN 所成角的正弦值.

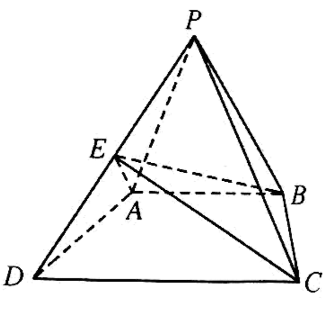
21．（12 分）已知函数 $f(x) = x\ln x$.

（1）若函数 $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x}$，求 $g(x)$ 的极值；

（2）证明：$f(x) + 1 < e^x - x^2$.

（参考数据：$\ln 2 \approx 0.69$　$\ln 3 \approx 1.10$　$e^{\frac{3}{2}} \approx 4.48$　$e^2 \approx 7.39$）

22．（10 分）如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为等腰梯形，$AB//CD, CD = 2AB = 4, AD = \sqrt{2}$，$\triangle PAB$ 为等腰直角三角形，$PA = PB$，平面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$，E 为 PD 的中点.



（1）求证：$AE//$ 平面 PBC；

（2）若平面 EBC 与平面 PAD 的交线为 l，求二面角 $P - l - B$ 的正弦值.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

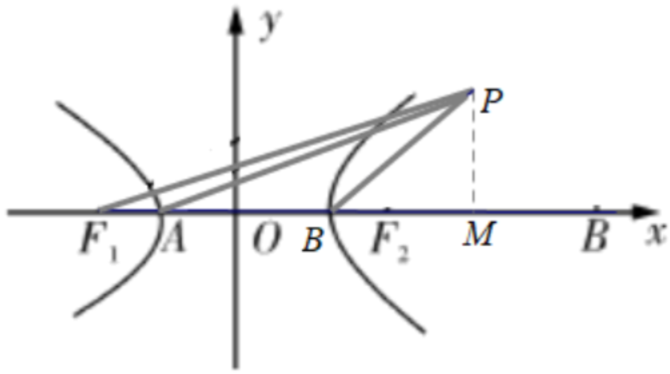
1、**D**

【解析】

根据$\triangle PAB$为等腰三角形，$\angle ABP=120^{\circ}$可求出点 **P** 的坐标，又由PF_1的斜率为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$可得出a,c关系，即可求出渐近线斜率得解.

【详解】

如图，



因为$\triangle PAB$为等腰三角形，$\angle ABP=120^{\circ}$，

所以$|PB|=|AB|=2a$，$\angle PBM=60^{\circ}$，

$\therefore x_P=|PB|\cdot\cos 60^{\circ}+a=2a, y_P=|PB|\cdot\sin 60^{\circ}=\sqrt{3}a$，

又$k_{PF_1}=\dfrac{\sqrt{3}a-0}{2a+c}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore 2a=c$

$\therefore 3a^2=b^2$，

解得$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，

所以双曲线的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，

故选：D

【点睛】

本题主要考查了双曲线的简单几何性质，属于中档题.

2、**B**

【解析】

方法一：令 $g(x)=ax-\tan x$，则 $f(x)=x\cdot g(x)$，$g'(x)=a-\dfrac{1}{\cos^2 x}$，

当 $a\le 1$，$x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 时，$g'(x)\le 0$，$g(x)$ 单调递减，

$\therefore x\in(-\dfrac{\pi}{2},0)$ 时，$g(x)>g(0)=0$，$f(x)=x\cdot g(x)<0$，且 $f'(x)=xg'(x)+g(x)>0$，

$\therefore f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},0)$ 上单调递增，

$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$g(x)<g(0)=0$，$f(x)=x\cdot g(x)<0$，且 $f'(x)=xg'(x)+g(x)<0$，

$\therefore f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减，$\therefore x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，$\therefore a\le 1$ 满足题意；

当 $a>1$ 时，存在 $t\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 使得 $\cos t=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$，即 $g'(t)=0$，

又 $g'(x)=a-\dfrac{1}{\cos^2 x}$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减，$\therefore x\in(0,t)$ 时，$g(x)>g(0)=0$，所以 $f(x)=x\cdot g(x)>0$，

这与 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点矛盾.

综上，$a\le 1$．故选 **B**.

方法二：依据极值的定义，要使 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点，须在 $x=0$ 的左侧附近，$f(x)<0$，即 $ax-\tan x>0$；在 $x=0$ 的右侧附近，$f(x)<0$，即 $ax-\tan x<0$．易知，$a=1$ 时，$y=ax$ 与 $y=\tan x$ 相切于原点，所以根据 $y=ax$ 与 $y=\tan x$ 的图象关系，可得 $a\le 1$，故选 **B**.

3、**C**

【解析】

对 a 进行分类讨论，结合指数函数的单调性及值域求解.

【详解】

分析知，$m>0$.讨论：当 $a>1$ 时，$\begin{cases}a^m=m\\a^{2m}=2m\end{cases}$，所以 $a^m=2$，$m=2$，所以 $a=\sqrt{2}$；当 $0<a<1$ 时，$\begin{cases}a^m=2m\\a^{2m}=m\end{cases}$，所以 $a^m=\dfrac{1}{2}$，$m=\dfrac{1}{4}$，所以 $a=\dfrac{1}{16}$.综上，$a=\dfrac{1}{16}$ 或 $a=\sqrt{2}$，故选 **C**.

【点睛】

本题主要考查指数函数的值域问题，指数函数的值域一般是利用单调性求解，侧重考查数学运算和数学抽象的核心素养.

4、**D**

【解析】

根据 AB 中点在 y 轴上，设出 A,B 两点的坐标 $A\left(-t,t^3+t^2\right)$，$B(t,f(t))$，（$t>0$）.对 t 分成 $t\langle 1,t=1,t\rangle 1$ 三类，利用 $OA\perp OB$ 则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，列方程，化简后求得 $a=\dfrac{t}{\ln t}$，利用导数求得 $\dfrac{t}{\ln t}$ 的值域，由此求得 a 的取值范围.

【详解】

根据条件可知 A，B 两点的横坐标互为相反数，不妨设 $A\left(-t,t^3+t^2\right)$，$B(t,f(t))$，（$t>0$），若 $t<1$，则 $f(t)=-t^3+t^2$，由 $OA\perp OB$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即 $-t^2+\left(t^3+t^2\right)\left(-t^3+t^2\right)=0$，方程无解；若 $t=1$，显然不满足 $OA\perp OB$；若 $t>1$，则 $f(t)=\dfrac{a\ln t}{t(t+1)}$，由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即 $-t^2+\left(t^3+t^2\right)\dfrac{a\ln t}{t(t+1)}=0$，即 $a=\dfrac{t}{\ln t}$，因为 $\left(\dfrac{t}{\ln t}\right)'=\dfrac{\ln t-1}{(\ln t)^2}$，所以函数 $\dfrac{t}{\ln t}$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上递减，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上递增，故在 $t=\mathrm{e}$ 处取得极小值也即是最小值 $\dfrac{\mathrm{e}}{\ln\mathrm{e}}=e$，所以函数 $y=\dfrac{t}{\ln t}$ 在 $(1+\infty)$ 上的值域为 $[e,+\infty)$，故 $a\in[\mathrm{e},+\infty)$.故选 **D.**

【点睛】

本小题主要考查平面平面向量数量积为零的坐标表示，考查化归与转化的数学思想方法，考查利用导数研究函数的最小值，考查分析与运算能力，属于较难的题目.

5、**D**

【解析】

根据所给的雷达图逐个选项分析即可.

【详解】

对于 **A**，甲的数据分析素养为 **100** 分，乙的数据分析素养为 **80** 分，

故甲的数据分析素养优于乙，故 **A** 正确；

对于 **B**，乙的数据分析素养为 **80** 分，数学建模素养为 **60** 分，

故乙的数据分析素养优于数学建模素养，故 **B** 正确；

对于 **C**，甲的六大素养整体水平平均得分为

$$\frac{100+80+100+80+100+80}{6}=\frac{310}{3},$$

乙的六大素养整体水平均得分为 $\dfrac{80+60+80+60+60+100}{6}=\dfrac{250}{3}$，故 **C** 正确；

对于 **D**，甲的六大素养中数学运算为 **80** 分，不是最强的，故 **D** 错误；

故选：D

【点睛】

本题考查了样本数据的特征、平均数的计算，考查了学生的数据处理能力，属于基础题.

6、**C**

【解析】

设这十等人所得黄金的重量从大到小依次组成等差数列$\left\{a_n\right\}$，则$a_1+a_2+a_3=4$，$a_8+a_9+a_{10}=3$，由等差数列的性质得$a_2=\dfrac{4}{3},a_9=1,\therefore a_2-a_9=\dfrac{4}{3}-1=\dfrac{1}{3}$ ，

故选 **C**

7、**D**

【解析】

根据题意判断出函数的单调性，从而根据单调性对选项逐个判断即可.

【详解】

由条件可得$f(-2-x)=-2-x+g(-2-x)=-2-x+g(x)+2x+2=g(x)+x=f(x)$

$\therefore$函数$f(x)$关于直线$x=-1$对称；

$\because f(x)$在$[-1$，$+\infty)$上单调递增，且在$-2<t<0$时使得$f(0)\cdot f(t)<0$；

又$\because f(-2)=f(0)$

$\therefore f(t)<0$， $f(-2)=f(0)>0$，所以选项B成立；

$\because t^2+t+2-\dfrac{3}{2}=(t+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}>0$， $\therefore t^2+t+1$比$\dfrac{1}{2}$离对称轴远，

$\therefore$可得$f(t^2+t+1)>f(\dfrac{1}{2})$，$\therefore$选项$A$成立；

$\because (t+3)^2-(t+2)^2=2t+5>0$， $\therefore |t+3|>|t+2|$， $\therefore$可知$t+2$比$t+1$离对称轴远

$\therefore f(t+2)>f(t+1)$，选项C成立；

$\because -2<t<0$， $\therefore (t+2)^2-(t+1)^2=2t+3$符号不定，$\therefore |t+2|$， $|t+1|$无法比较大小，

$\therefore f(t+1)>f(t)$不一定成立.

故选：D.

【点睛】

本题考查了函数的基本性质及其应用，意在考查学生对这些知识的理解掌握水平和分析推理能力.

8、**D**

【解析】

利用空间位置关系的判断及性质定理进行判断.

【详解】

解：选项 **A** 中直线 m，n 还可能相交或异面，

选项 **B** 中 m，n 还可能异面，

选项 **C**，由条件可得 $n//\alpha$ 或 $n\subset\alpha$.

故选：**D.**

【点睛】

本题主要考查直线与平面平行、垂直的性质与判定等基础知识；考查空间想象能力、推理论证能力，属于基础题.

9、**C**

【解析】

集合 A 表示半圆上的点，集合 B 表示直线上的点，联立方程组求得方程组解的个数，即为交集中元素的个数.

【详解】

由题可知：集合 A 表示半圆上的点，集合 B 表示直线上的点，

联立 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与 $y=2x$，

可得 $\sqrt{1-x^2}=2x$，整理得 $x^2=\frac{1}{5}$，

即 $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$，

当 $x=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时，$y=2x<0$，不满足题意；

故方程组有唯一的解 $\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

故 $A\cap B=\left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$.

故选：**C.**

【点睛】

本题考查集合交集的求解，涉及圆和直线的位置关系的判断，属基础题.

10、**B**

【解析】

画出可行域和目标函数，根据平移得到最值点，再利用均值不等式得到答案.

【详解】

如图所示，画出可行域和目标函数，根据图像知：