2022 北京西城初三（上）期末

数　　学

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1．（2 分）古典园林中的窗户是中国传统建筑装饰的重要组成部分，一窗一姿容，一窗一景致．下列窗户图案中，是中心对称图形的是(　　)

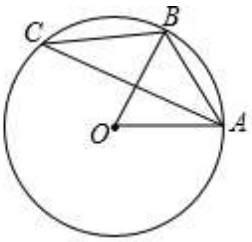
A．　　B．

C．　　D．

2．（2 分）二次函数 $y=2(x-3)^2+1$ 的图象的顶点坐标是(　　)

A．$(-2,1)$　　B．$(2,1)$　　C．$(-3,1)$　　D．$(3,1)$

3．（2 分）如图，点 A、B、C 在 $\odot O$ 上，ΔOAB 为等边三角形，则 $\angle ACB$ 的度数是(　　)

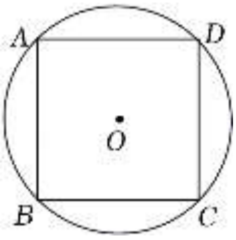


A．60°　　B．50°　　C．40°　　D．30°

4．（2 分）将一元二次方程 $x^2-8x+10=0$ 通过配方转化为 $(x+a)^2=b$ 的形式，下列结果中正确的是(　　)

A．$(x-4)^2=6$　　B．$(x-8)^2=6$　　C．$(x-4)^2=-6$　　D．$(x-8)^2=54$

5．（2 分）如图，$\odot O$ 是正方形 $ABCD$ 的外接圆，若 $\odot O$ 的半径为 4，则正方形 $ABCD$ 的边长为(　　)



A．4　　B．8　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$4\sqrt{2}$

6．（2 分）生活垃圾无害化处理可以降低垃圾及其衍生物对环境的影响．据统计，2017 年全国生活垃圾无害化处理能力约为 2.5 亿吨，随着设施的增加和技术的发展，2019 年提升到约 3.2 亿吨．如果设这两年全国生活垃圾无害化处理能力的年平均增长率为 x，那么根据题意可以列方程为(　　)

A．$2.5(1+x)=3.2$　　B．$2.5(1+2x)=3.2$

C．$2.5(1+x)^2=3.2$　　D．$2.5(1-x)^2=3.2$

7．（2 分）下列说法中，正确的是(　　)

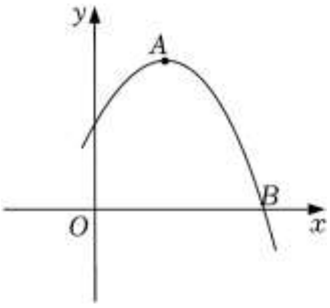
A．“射击运动员射击一次，命中靶心”是必然事件

B．事件发生的可能性越大，它的概率越接近 1

C．某种彩票中奖的概率是1%，因此买 100 张该种彩票就一定会中奖

D．抛掷一枚图钉，“针尖朝上”的概率可以用列举法求得

8．（2 分）抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 $A(2,m)$，且经过点 $B(5,0)$，其部分图象如图所示．对于此抛物线有如下四个结论：① $ac<0$；② $a-b+c>0$；③ $m+9a=0$；④若此抛物线经过点 $C(t,n)$，则 $t+4$ 一定是方程 $ax^2+bx+c=n$ 的一个根．其中所有正确结论的序号是(　　)



A．①②　　B．①③　　C．③④　　D．①④

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9．（2 分）在平面直角坐标系 xOy 中，点 $(4,-7)$ 关于原点的对称点坐标为 ____．

10．（2 分）关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx+4=0$ 有一个根为 1，则 m 的值为 ____．

11．（2 分）如图 1 所示的铝合金窗帘轨道可以直接弯曲制作成弧形．若制作一个圆心角为$160°$ 的圆弧形窗帘轨道（如图2) 需用此材料$800\pi mm$，则此圆弧所在圆的半径为 ____ mm．

图1

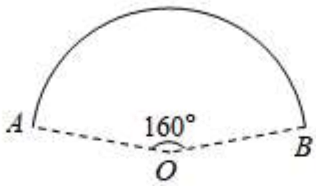
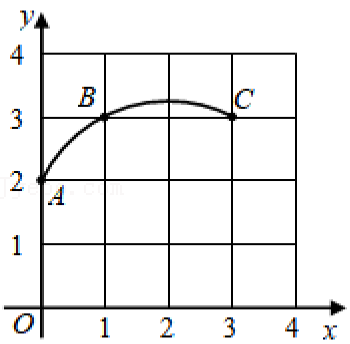


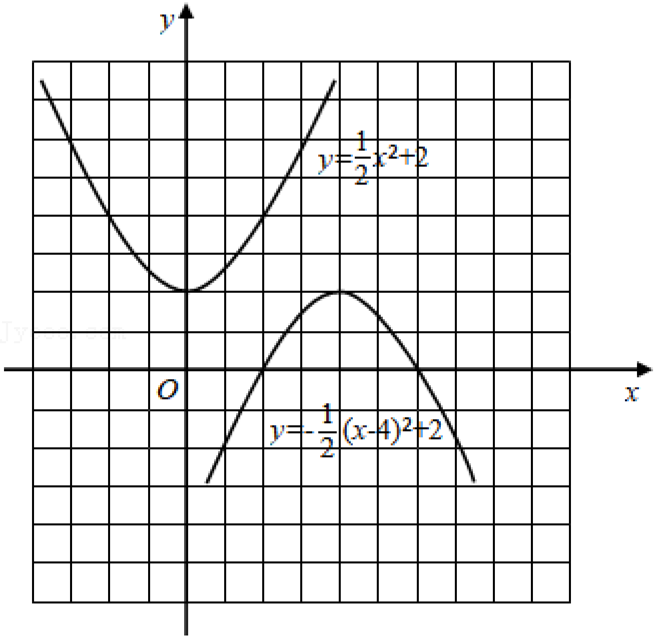
图2

12．（2 分）写出一个开口向下，且对称轴在 y 轴左侧的抛物线的表达式：____．

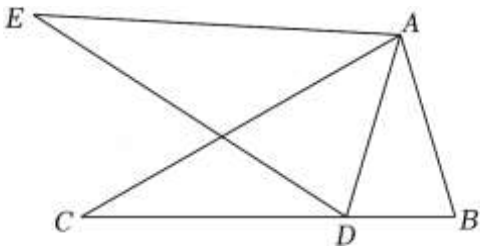
13．（2 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A，B，C 的横、纵坐标都为整数，过这三个点作一条圆弧，则此圆弧的圆心坐标为 ____．



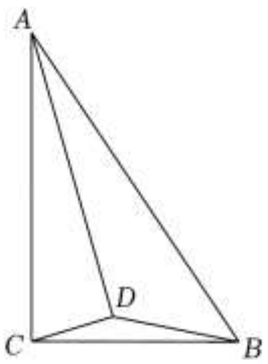
14．（2 分）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+2$ 可以看作是抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 经过若干次图形的变化（平移、轴对称、旋转）得到的，写出一种由抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+2$ 的过程：____．



15．（2 分）如图，将 ΔABC 绕点 A 顺时针旋转 $\alpha(0^\circ<\alpha<90^\circ)$ 得到 ΔADE，点 B 的对应点 D 恰好落在边 BC 上，则 $\angle ADE=$____．（用含 α 的式子表示）



16．（2 分）如图，在 RtΔABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，D 是 ΔABC 内的一个动点，满足 $AC^2-AD^2=CD^2$．若 $AB=2\sqrt{13}$，$BC=4$，则 BD 长的最小值为____．



三、解答题（共 68 分，第 17-18 题，每题 5 分，第 19 题 6 分，第 20 题 5 分，第 21 题 6 分，第 22-24 题，每题 5 分，第 25-26 题，每题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17．（5 分）解方程：$x^2-2x-2=0$．

18．（5 分）问题：如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 $\odot O$ 内，请仅用无刻度的直尺，作出 ΔABC 中 AB 边上的高．

小芸解决这个问题时，结合圆以及三角形高线的相关知识，设计了如下作图过程．

作法：如图，

①延长 AC 交 $\odot O$ 于点 D，延长 BC 交 $\odot O$ 于点 E；

②分别连接 AE，BD 并延长相交于点 F；

③连接 FC 并延长交 AB 于点 H．

所以线段 CH 即为 ΔABC 中 AB 边上的高．

（1）根据小芸的作法，补全图形；

（2）完成下面的证明．

证明：$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，点 D，E 在 $\odot O$ 上，

$\therefore \angle ADB = \angle AEB =$ ____$^{\circ}$．（____）（填推理的依据）

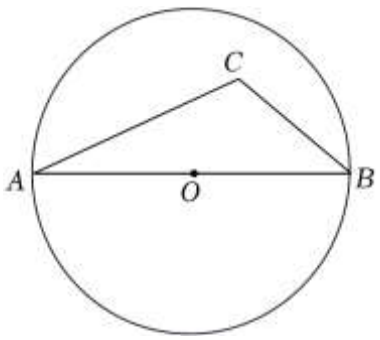
$\therefore AE \perp BE$，$BD \perp AD$．

$\therefore AE$，____是 ΔABC 的两条高线．

$\because AE$，BD 所在直线交于点 F，

$\therefore$ 直线 FC 也是 ΔABC 的高所在直线．

$\therefore CH$ 是 ΔABC 中 AB 边上的高．



19．（6 分）已知二次函数 $y = x^2 + 4x + 3$．

（1）求此函数图象的对称轴和顶点坐标；

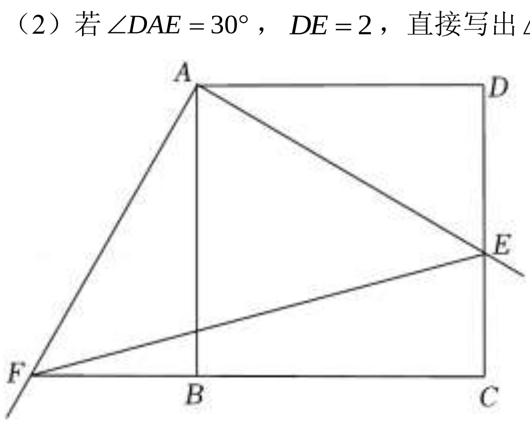
（2）画出此函数的图象；

（3）若点 $A(0, y_1)$ 和 $B(m, y_2)$ 都在此函数的图象上，且 $y_1 < y_2$，结合函数图象，直接写出 m 的取值范围．

20．（5 分）如图，在正方形 $ABCD$ 中，射线 AE 与边 CD 交于点 E，将射线 AE 绕点 A 顺时针旋转，与 CB 的延长线交于点 F，$BF = DE$，连接 FE．

（1）求证：$AF = AE$；

（2）若 $\angle DAE = 30^{\circ}$，$DE = 2$，直接写出 ΔAEF 的面积．



21.（6 分）已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k+5)x+6+2k=0$.

（1）求证：此方程总有两个实数根；

（2）若此方程恰有一个根小于 -1，求 k 的取值范围.

22.（5 分）有甲、乙两个不透明的口袋，甲口袋中装有两个相同的球，它们分别写有数 -2，2；乙口袋中装有三个相同的球，它们分别写有数 -5，m，5．小明和小刚进行摸球游戏，规则如下：先从甲口袋中随机取出一个球，其上的数记为 a；再从乙口袋中随机取出一个球，其上的数记为 b．若 $a<b$，小明胜；若 $a=b$，为平局；若 $a>b$，小刚胜.

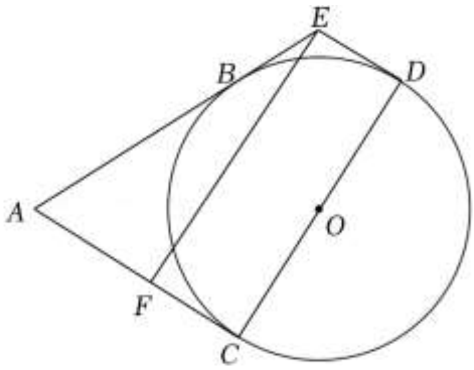
（1）若 $m=-2$，用树状图或列表法分别求出小明、小刚获胜的概率；

（2）当 m 为何值时，小明和小刚获胜的概率相同？直接写出一个符合条件的整数 m 的值.

23.（5 分）如图，AB，AC 是 $\odot O$ 的两条切线，切点分别为 B，C，连接 CO 并延长交 $\odot O$ 于点 D，过点 D 作 $\odot O$ 的切线交 AB 的延长线于点 E，$EF\perp AC$ 于点 F.

（1）求证：四边形 $CDEF$ 是矩形；

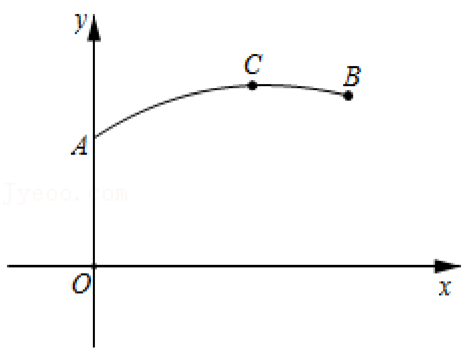
（2）若 $CD=2\sqrt{10}$，$DE=2$，求 AC 的长.



24.（5 分）某篮球队员的一次投篮命中，篮球从出手到命中行进的轨迹可以近似看作抛物线的一部分，表示篮球距地面的高度 y（单位：m）与行进的水平距离 x（单位：m）之间关系的图象如图所示．已知篮球出手位置 A 与篮筐的水平距离为 $4.5m$，篮筐距地面的高度为 $3.05m$；当篮球行进的水平距离为 $3m$ 时，篮球距地面的高度达到最大为 $3.3m$.

（1）图中点 B 表示篮筐，其坐标为 ____，篮球行进的最高点 C 的坐标为 ____；

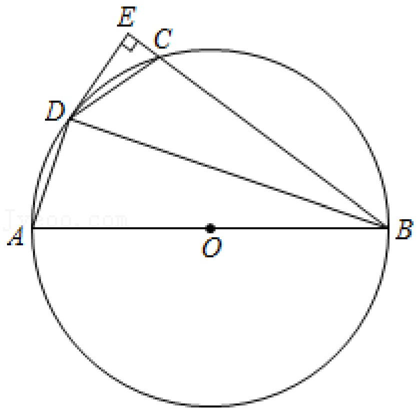
（2）求篮球出手时距地面的高度.



25.（6 分）如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，D 是 AC 的中点，$DE\perp BC$ 交 BC 的延长线于点 E.

（1）求证：DE 是 $\odot O$ 的切线；

（2）若 $AB=10$，$BC=8$，求 BD 的长.



26.（6分）在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=a(x-h)^2-8a$ 的顶点为 A，$0<h<\frac{7}{2}$.

（1）若 $a=1$，

①点 A 到 x 轴的距离为 ____；

②求此抛物线与 x 轴的两个交点之间的距离；

（2）已知点 A 到 x 轴的距离为 4，此抛物线与直线 $y=-2x+1$ 的两个交点分别为 $B(x_1,\ y_1)$，$C(x_2,\ y_2)$，其中 $x_1<x_2$，若点 $D(x_D,\ y_D)$ 在此抛物线上，当 $x_1<x_D<x_2$ 时，y_D 总满足 $y_2<y_D<y_1$，求 a 的值和 h 的取值范围.

27.（7分）如图1，在 ΔABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$CA=CB$，点 D，E 分别在边 CA，CB 上，$CD=CE$，连接 DE，AE，BD．点 F 在线段 BD 上，连接 CF 交 AE 于点 H．

（1）①比较 $\angle CAE$ 与 $\angle CBD$ 的大小，并证明；

②若 $CF\perp AE$，求证：$AE=2CF$；

（2）将图1中的 ΔCDE 绕点 C 逆时针旋转 $\alpha(0^\circ<\alpha<90^\circ)$，如图2．若 F 是 BD 的中点，判断 $AE=2CF$ 是否仍然成立．如果成立，请证明；如果不成立，请说明理由．

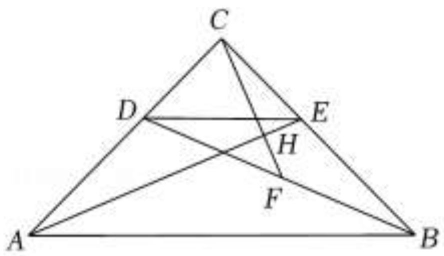


图1

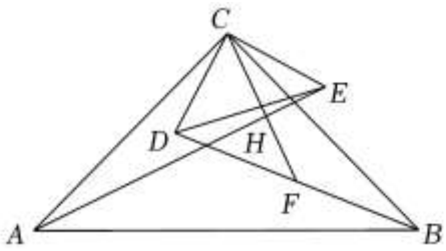


图2

28.（7分）在平面直角坐标系 xOy 中，$\odot O$ 的半径为 1，点 A 在 $\odot O$ 上，点 P 在 $\odot O$ 内，给出如下定义：连接 AP 并延长交 $\odot O$ 于点 B，若 $AP=kAB$，则称点 P 是点 A 关于 $\odot O$ 的 k 倍特征点．

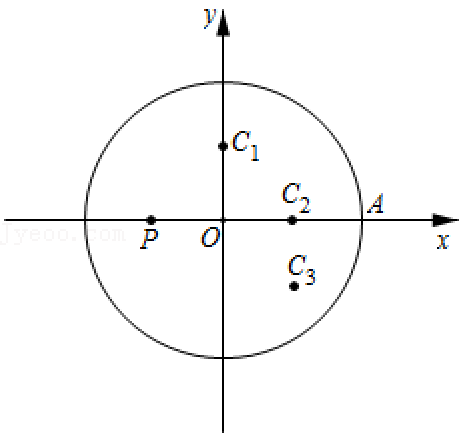
（1）如图，点 A 的坐标为 $(1,0)$．

①若点 P 的坐标为 $(-\frac{1}{2},\ 0)$，则点 P 是点 A 关于 $\odot O$ 的 ____倍特征点；

②在 $C_1(0,\frac{1}{2})$，$C_2(\frac{1}{2},\ 0)$，$C_3(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2})$ 这三个点中，点 ____是点 A 关于 $\odot O$ 的 $\frac{1}{2}$ 倍特征点；

③直线 l 经过点 A，与 y 轴交于点 D，$\angle DAO=60^\circ$．点 E 在直线 l 上，且点 E 是点 A 关于 $\odot O$ 的 $\frac{1}{2}$ 倍特征点，求点 E 的坐标；

（2）若当k取某个值时，对于函数$y=-x+1(0<x<1)$的图象上任意一点M，在$\odot O$上都存在点N，使得点M是点N关于$\odot O$的k倍特征点，直接写出k的最大值和最小值．



参考答案

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1.【分析】把一个图形绕某一点旋转180°，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，根据中心对称图形的概念求解.

【解答】解：选项C能找到这样的一个点，使图形绕某一点旋转180°后与原来的图形重合，所以是中心对称图形，选项A、B、D均不能找到这样的一个点，使图形绕某一点旋转180°后与原来的图形重合，所以不是中心对称图形，

故选：C.

【点评】本题主要考查了中心对称图形，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合.

2.【分析】二次函数$y=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$的顶点坐标是(h,k).

【解答】解：根据二次函数的顶点式方程$y=2(x-3)^2+1$知，该函数的顶点坐标是：$(3,1)$.

故选：D.

【点评】本题考查了二次函数的性质和二次函数的三种形式．解答该题时，需熟悉二次函数的顶点式方程$y=a(x-h)^2+k$中的h、k所表示的意义.

3.【分析】先根据等边三角形的性质得到$\angle AOB=60^\circ$，然后根据圆周角定理求$\angle ACB$的度数.

【解答】解：$\because \Delta OAB$为等边三角形，

$\therefore \angle AOB=60^\circ$，

$\therefore \angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle AOB=30^\circ$.

故选：D.

【点评】本题考查了圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半．也考查了等边三角形的性质.

4.【分析】先把常数项移到方程右边，再把方程两边加上 16，然后把方程作边写成完全平方形式即可.

【解答】解：$x^2-8x=-10$，

$x^2-8x+16=6$，

$(x-4)^2=6$.

故选：A.

【点评】此题考查了配方法解一元二次方程，配方法的一般步骤：

（1）把常数项移到等号的右边；

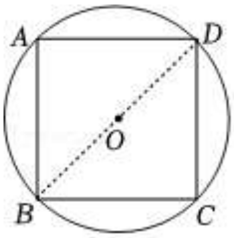
（2）把二次项的系数化为 1；

（3）等式两边同时加上一次项系数一半的平方.

选择用配方法解一元二次方程时，最好使方程的二次项的系数为 1，一次项的系数是 2 的倍数.

5.【分析】连接BD．由题意，ΔBCD是等腰直角三角形，故可得出结论.

【解答】解：如图，连接BD.



由题意，ΔBCD是等腰直角三角形，

$\because BD=8$，$\angle CBD=45^{\circ}$，$\angle BCD=90^{\circ}$，

$\therefore BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD=4\sqrt{2}$.

故选：D.

【点评】本题考查的是圆周角定理、垂径定理及勾股定理，根据题意作出辅助线，构造出等腰直角三角形是解答此题的关键.

6.【分析】利用 2019 年全国生活垃圾无害化处理能力$=2017$年全国生活垃圾无害化处理能力$\times(1+$年平均增长率）^{2}，即可得出关于x的一元二次方程，此题得解.

【解答】解：依题意得：$2.5(1+x)^{2}=3.2$.

故选：C.

【点评】本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

7.【分析】根据必然事件，随机事件，不可能事件的特点，以及列表法与树状图法逐一判断即可.

【解答】解：A．“射击运动员射击一次，命中靶心”是随机事件，故A不符合题意；

B．事件发生的可能性越大，它的概率越接近 1，故B符合题意；

C．某种彩票中奖的概率是1%，因此买 100 张该种彩票就可能会中奖，故C不符合题意；

D．抛掷一枚图钉，“针尖朝上”的概率不可以用列举法求得，故D不符合题意；

故选：B.

【点评】本题考查了概率的意义，随机事件，概率公式，列表法与树状图法，熟练掌握这些数学概念是解题的关键.

8.【分析】由抛物线开口和抛物线与y轴交点判断①，由抛物线的对称性及经过点$(5,0)$可判断②，由抛物线对称轴为直线$x=2$可得$b=-4a$，由$a-b+c=0$可得$c=-5a$，从而判断③，

点C对称点横坐标为$4-t$可判断④.

【解答】解：$\because$抛物线开口向下，

$\therefore a<0$，

$\because$抛物线与y轴交点在x轴上方，

$\therefore c>0$，

$\therefore ac<0$，①正确.

$\because$抛物线顶点为$A(2,m)$，

$\therefore$抛物线对称轴为直线$x=2$，

$\because$抛物线过点$(5,0)$，

$\therefore$由对称性可得抛物线经过点$(-1,0)$，

$\therefore a-b+c=0$，②错误，

$\because -\dfrac{b}{2a}=2$，

$\therefore b=-4a$，

$\therefore 5a+c=0$，

$\therefore c=-5a$

$\because (2,m)$ 为抛物线顶点，

$\therefore 4a+2b+c=m$，

$\therefore 4a-8a-5a=m$，即 $9a+m=0$，③正确，

$\because$ 点 $C(t,n)$ 在抛物线上，

$\therefore$ 点 C 关于对称轴对称点 $(4-t,n)$ 在抛物线上，

$\therefore 4-t$ 为 $ax^2+bx+c=n$ 的一个根，④错误.

故选：B.

【点评】本题考查二次函数图象与系数的关系，解题关键是掌握二次函数与方程及不等式的关系.

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9.【分析】利用关于原点对称点的坐标特点可得答案.

【解答】解：在平面直角坐标系 xOy 中，点 $(4,-7)$ 关于原点的对称点坐标为 $(-4,7)$，

故答案为：$(-4,7)$.

【点评】此题主要考查了关于原点对称点的坐标，关键是掌握两个点关于原点对称时，它们的横坐标互为相反数、纵坐标互为相反数

10.【分析】把 $x=1$ 代入方程 $x^2+mx+4=0$ 得 $1+m+4=0$，然后解关于 m 的方程.

【解答】解：把 $x=1$ 代入方程 $x^2+mx+4=0$ 得 $1+m+4=0$，

解得 $m=-5$.

故答案为：-5.

【点评】本题考查了一元二次方程的解：能使一元二次方程左右两边相等的未知数的值是一元二次方程的解.

11.【分析】利用弧长的计算公式即可求解.

【解答】解：设此圆弧所在圆的半径为 $R\ mm$，

由弧长公式得：$\dfrac{160\pi R}{180}=800\pi$，

解得：$R=900$，

即此圆弧所在圆的半径为 $900mm$，

故答案为：900.

【点评】本题考查了弧长的计算公式，熟记弧长公式是解题的关键.

12.【分析】满足开口向下且对称轴在 y 轴左侧可以判断 a、b 的正负，从而可以得到所求得抛物线的表达式.

【解答】解：$\because$ 开口向下，

$\therefore a<0$，

$\because$ 对称轴在 y 轴左侧，

$\therefore -\dfrac{b}{2a}<0$，

$\therefore b<0$，

故抛物线的解析式可以为$y=-x^2-x$，（答案不唯一），

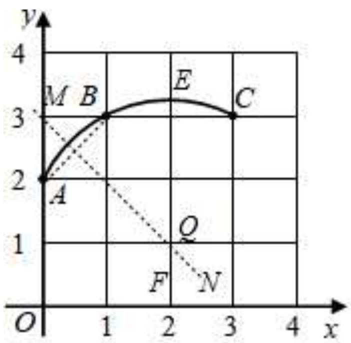
故答案为：$y=-x^2-x$，（答案不唯一）.

【点评】本题考查了二次函数的性质，能熟记二次函数的性质是解此题的关键，此题是一道开放型的题目，答案不唯一.

13．【分析】根据图形得出A、B、C的坐标，再连接AB，作线段AB和线段BC的垂直平分线MN、EF，两线交于Q，则Q是圆弧的圆心，最后求出点Q的坐标即可.

【解答】解：从图形可知：A点的坐标是$(0,2)$，B点的坐标是$(1,3)$，C点的坐标是$(3,3)$，

连接AB，作线段AB和线段BC的垂直平分线MN、EF，两线交于Q，则Q是圆弧的圆心，如图，



$\therefore Q$点的坐标是$(2,1)$，

故答案为：$(2,1)$.

【点评】本题考查了确定圆的条件，坐标与图形性质，垂径定理等知识点，能找出圆弧的圆心Q的位置是解此题的关键.

14．【分析】根据抛物线的顶点坐标和开口方向的变化进行解答.

【解答】解：抛物线$y=\dfrac{1}{2}x^2+2$的顶点为$(0,2)$，抛物线$y=-\dfrac{1}{2}(x-4)^2+2$的顶点为$(4,2)$，

$\therefore$将抛物线$y=\dfrac{1}{2}x^2+2$绕顶点$(0,2)$顺时针方向旋转180度，再向右平移4个单位长度得到抛物线$y=-\dfrac{1}{2}(x-4)^2+2$.

故答案为：将抛物线$y=\dfrac{1}{2}x^2+2$绕顶点$(0,2)$顺时针方向旋转 180 度，再向右平移 4 个单位长度得到抛物线$y=-\dfrac{1}{2}(x-4)^2+2$.（答案不唯一）.

【点评】本题考查了二次函数图象与几何变换：把抛物线的平移问题转化为顶点的平移问题是关键.

15．【分析】根据旋转的性质得到$AD=AB$，$\angle ADE=\angle B$，根据等腰三角形的性质得到$\angle ADB=\angle B$，求得$\angle ADE=\angle ADB=90^\circ-\dfrac{1}{2}\alpha$.

【解答】解：由旋转的性质可知，$AD=AB$，$\angle ADE=\angle B$，

$\therefore \angle ADB=\angle B$，

$\because \angle BAD=\alpha$，

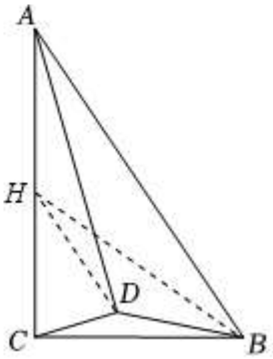
$\therefore \angle ADE=\angle ADB=\frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)=90^\circ-\frac{1}{2}\alpha$，

故答案为：$90^\circ-\frac{1}{2}\alpha$．

【点评】本题考查的是旋转变换的性质、等边三角形的性质，掌握旋转前、后的图形全等是解题的关键．

16．【分析】由 $AC^2-AD^2=CD^2$. 得 $\angle ADC=90^\circ$，取点 H 为 AC 的中点，可知 DH 和 BH 都是定值，从而解决问题．

【解答】解：取 AC 的中点 H，连接 HD，HB，



在 RtΔABC 中，由勾股定理得 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{52-16}=6$，

$\because AC^2-AD^2=CD^2$．

$\therefore \angle ADC=90^\circ$，

$\because$ 点 H 为 AC 的中点，

$\therefore DH=CH=3$，

$\therefore BH=\sqrt{CH^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$\because BD \geqslant BH-DH$，

$\therefore BD$ 的最小值为 $5-3=2$，

故答案为：2．

【点评】本题主要考查了勾股定理的应用，三角形三边关系，直角三角形斜边上的中线的性质等知识，做辅助线构造三角形是解题的关键．

三、解答题（共 68 分，第 17-18 题，每题 5 分，第 19 题 6 分，第 20 题 5 分，第 21 题 6 分，第 22-24 题，每题 5 分，第 25-26 题，每题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17．【分析】在本题中，把常数项 2 移项后，应该在左右两边同时加上一次项系数 -2 的一半的平方．

【解答】解：移项，得

$x^2-2x=2$，

配方，得

$x^2-2x+1=2+1$，即 $(x-1)^2=3$，

开方，得

$x-1=\pm\sqrt{3}$．

解得 $x_1=1+\sqrt{3}$，$x_2=1-\sqrt{3}$．

【点评】本题考查了配方法解一元二次方程．用配方法解一元二次方程的步骤：