2023—2024 学年度（下）七校协作体高二联考

数学试题

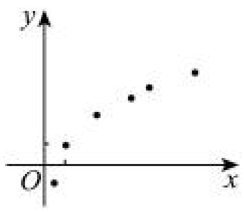
考试时间：120 分钟　满分：150 分

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 在正项等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_2=1$，$a_3+a_4=6$，则$a_1a_4=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

2. 如图，由观测数据$(x_i, y_i)(i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$的散点图可知，$y$与$x$的关系可以用模型$y=b\ln x+a$拟合，设$z=\ln x$，利用最小二乘法求得$y$关于$z$的回归方程$\hat{y}=\hat{b}z+1$．已知$x_1x_2x_3x_4x_5x_6=\mathrm{e}^{12}$，$\sum\limits_{6}^{i=1}y_i=18$，则$\hat{b}=$（　　）



A. $\dfrac{17}{\mathrm{e}^{12}}$　　B. $\dfrac{12}{\mathrm{e}^{12}}$　　C. 1　　D. $\dfrac{17}{12}$

3. 图 1 是第七届国际数学教育大会（简称 ICME－7）的会徽图案，会徽的主题图案是由如图2 所示的一连串直角三角形演化而成的，其中$OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\ldots=A_7A_8=1$，如果把图 2 中的直角三角形继续作下去，则第$n$个三角形的面积为（　　）

图1

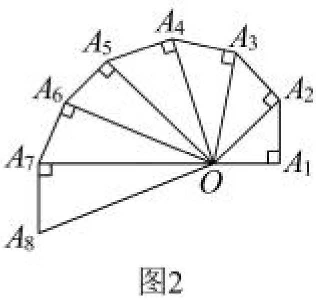


图2

A. $\dfrac{n}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{n}}{2}$　　C. $\dfrac{n^2}{2}$　　D. $\sqrt{n}$

4. 下列说法中正确的有（　　）

A. 已知互不相同的30 个样本数据，若去掉其中最大和最小的数据，则剩下 28 个数据的30%分位数可能等于原样本数据的30%分位数；

B. 若 A,B 两组成对数据的样本相关系数分别为 $r_A = 0.97, r_B = -0.99$，则A 组数据比B 组数据的线性相关性强；

C. 设随机变量$X \sim N\left(3,2^2\right)$，则 $E\left(\frac{1}{2}X+1\right)=\frac{5}{2}, D\left(\frac{1}{2}X+1\right)=2$；

D. 某人参加一次游戏，游戏有三个题目，每个题目答对的概率都为 0.5，答对题数多于答错题数可得 4 分，否则得 2 分，则某人参加游戏得分的期望为 3

5. 已知函数$f\left(x\right)=x\left(m-e^x\right)$，曲线$y=f\left(x\right)$上存在不同的两点，使得曲线在这两点处的切线都与直线 $y=x$ 平行，则实数 m 的取值范围是（　　）

A. $\left(1-e^{-2},1\right)$　　B. $\left(-1-e^{-2},-1\right)$　　C. $\left(-e^{-2},0\right)$　　D. $\left(1-e^{-2},+\infty\right)$

6. 抛掷一枚质地均匀的骰子两次，设“第一次向上的点数是 2”为事件 A，“第二次向上的点数是奇数”为事件 B，“两次向上的点数之和能被 3 整除”为事件 C，则下列说法正确的是（　　）

A. 事件 A 与事件 B 互为对立事件

B. $P\left(C\right)=\frac{1}{6}$

C. $P\left(BC\right)=\frac{1}{6}$

D. 事件 B 与事件 C 相互不独立

7. 设数列$\left\{a_n\right\}$的前n 项和为S_n, $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=-1, S_1=32$，则下列说法正确的是（　　）

A. $\left\{a_n\right\}$是等比数列

B. S_3, S_6-S_3, S_9-S_6 成等差数列，公差为 -9

C. 当且仅当 $n=17$ 时，S_n 取得最大值

D. $S_n \geq 0$ 时，n 的最大值为 33

8. 设函数$f\left(x\right)=\ln x-ax^2-(a-2)x$，若不等式$f\left(x\right)>0$ 恰有两个整数解，则实数a 的取值范围是

A. $[\frac{6+\ln 3}{12},\frac{4+\ln 2}{6})$　　B. $(\frac{6+\ln 3}{12},\frac{4+\ln 2}{6})$　　C. $\left[\frac{4+\ln 2}{6},1\right)$　　D. $\left(\frac{4+\ln 2}{6},1\right]$

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n 项和为 S_n $\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$，下列说法正确的是（　　）

A. 若 $\left\{a_n\right\}$是等差数列，$a_{15}+a_{16}>0, a_{15}+a_{17}<0$，则使 $S_n>0$ 的最大正整数n 的值为 15

B. 若 $\left\{a_n\right\}$是等比数列，$S_n=5^n+c$（c 为常数），则必有 $c=-1$

C. 若 $\{a_n\}$是等比数列，则 $S_n = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$

D. 若 $a_n + 4S_{n-1}S_n = 0\left(n \geq 2\right), a_1 = \frac{1}{4}$，则数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$为递增等差数列

10. 甲、乙、丙、丁四名同学相约去电影院看春节档热映的《热辣滚烫》，《飞驰人生2》，《第二十条》三部电影，每人都要看且限看其中一部.记事件 A 为“恰有两名同学所看电影相同”，事件B 为“只有甲同学一人看《飞驰人生 2》”，则（ ）

A. 四名同学看电影情况共有3^4 种

B. “每部电影都有人看”的情况共有 72 种

C. $P\left(B|A\right)=\frac{1}{6}$

D. “四名同学最终只看了两部电影”的概率是$\frac{14}{27}$

11. 已知函数$f(x) = x^2 - 2x\ln x$， $g(x) = e^x - \ln x - 2$，下列说法正确的是（　　）

A. 函数$g\left(x\right)$存在唯一极值点x_0，且$x_0 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$

B. 令$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$，则函数$h(x)$ 无零点

C. 若$g\left(x\right) + 2 > m$ 恒成立，则$m < 2$

D. 若$a > 0$，$b > 0$，则$a + \frac{b}{2} - \ln(a+b) > \frac{a}{b}\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 设等差数列$\{a_n\}$的前n 项和为S_n，若$a_{11} - a_8 = 3, S_{11} - S_8 = 3$，则使$a_n > 0$ 的最小正整数n 的值是______.

13. 函数$f\left(x\right) = x^3 - 3x^2 + a, g\left(x\right) = x\ln x$.对于$\forall x_1 \in [0,3], \forall x_2 \in \left[\frac{1}{e^2}, e\right]$，都有$f\left(x_1\right) > g\left(x_2\right)$，则实数$a$ 的取值范围是______.

14. 已知有A, B 两个盒子，其中 A 盒装有 3 个黑球和 3 个白球，B 盒装有 3 个黑球和2 个白球，这些球除颜色外完全相同. 甲从 A 盒、乙从B 盒各随机取出一个球，若 2 个球同色，则甲胜，并将取出的2 个球全部放入 A 盒中，若 2 个球异色，则乙胜，并将取出的 2 个球全部放入B 盒中. 按上述方法重复操作两次后，B

盒中恰有 7 个球的概率是______.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. 已知函数 $f(x)=(a-1)x+e^x(a\in\mathbf{R})$.

（1）讨论函数 $y=f(x)$ 的单调性；

（2）设函数 $g(x)=f(x)-\sin x$，若函数 $y=g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，求实数 a 的取值范围.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_2=3$，$a_{14}=3a_5$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $2S_n=3b_n-1$.

（1）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $c_n=a_n.b_n$，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，

①求 T_n；

②若 $T_n-n.3^n<(-1)^n.m$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

17. 某学校号召学生参加"每天锻炼 1 小时"活动，为了解学生参加活动的情况，统计了全校所有学生在假期每周锻炼的时间，现随机抽取了 60 名同学在某一周参加锻炼的数据，整理如下 2×2 列联表：

性别	不经常锻炼	经常锻炼	合计
男生	7		
女生		16	30
合计	21		

注：将一周参加锻炼时间不小于 3 小时的称为"经常锻炼"，其余的称为"不经常锻炼".

（1）请完成上面 2×2 列联表，并依据小概率值 $\alpha=0.1$ 的独立性检验，能否认为性别因素与学生锻炼的经常性有关系；

（2）将一周参加锻炼为 0 小时的称为"极度缺乏锻炼"．在抽取的 60 名同学中有 5 人"极度缺乏锻炼".以样本频率估计概率.若在全校抽取 20 名同学，设"极度缺乏锻炼"的人数为 X，求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$；

（3）将一周参加锻炼 6 小时以上的同学称为"运动爱好者"．在抽取的 60 名同学中有 10 名"运动爱好者"，其中有 7 名男生，3 名女生．为进一步了解他们的生活习惯，在 10 名"运动爱好者"中，随机抽取 3 人进行访谈，设抽取的 3 人中男生人数为 Y，求 Y 的分布列和数学期望.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$

α	0.1	0.05	0.01
x_α	2.706	3.841	6.635

18. 已知函数$f(x)=x^2-(a+2)x+a\ln x$，常数$a>0$.

（1）当$x=1$时，函数$f(x)$取得极小值-2，求函数$f(x)$的极大值.

（2）设定义在D上的函数$y=h(x)$在点$P(x_0,h(x_0))$处的切线方程为$l:y=g(x)$，当$x\neq x_0$时，若$\dfrac{h(x)-g(x)}{x-x_0}>0$在$D$内恒成立，则称点$P$为$h(x)$的"类优点"，若点$(1,f(1))$是函数$f(x)$的"类优点".

①求函数$f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程.

②求实数a的取值范围.

19. 定义首项为1且公比为正数的等比数列为"M-数列".

（1）已知等比数列$\{a_n\}$满足：$a_2a_4=a_5, a_3-4a_2+4a_1=0$，求证：数列$\{a_n\}$为"$M$-数列"；

（2）已知数列$\{b_n\}$满足：$b_1=1, 2S_n=\dfrac{b_nb_{n+1}}{b_{n+1}-b_n}$，其中$S_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和.

①求数列$\{b_n\}$的通项公式；

②设m为正整数，若存在"M-数列"$\{c_n\}$，对任意正整数k，当$k\le m$时，都有$c_k\le b_k\le c_{k+1}$成立，求m的最大值.

2023—2024 学年度（下）七校协作体高二联考

数学试题

考试时间：120 分钟　满分：150 分

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 在正项等比数列$\{a_n\}$中，已知$a_2=1$，$a_3+a_4=6$，则$a_1a_4=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

【答案】B

【解析】

【分析】利用等比数列的基本量运算求出公比q，进而化简a_1a_4求值即可．

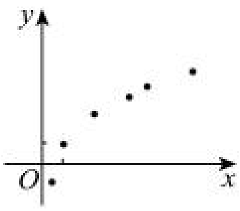
【详解】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q

$\because a_3+a_4=a_2q+a_2q^2=q+q^2=6$，$\therefore q=2$ 或$q=-3$（舍）

则$a_1a_4=\frac{a_2}{q}\times a_2q^2=\frac{1}{2}\times 4=2$

故选：B

2. 如图，由观测数据$(x_i,\ y_i)(i=1,2,3,4,5,6)$的散点图可知，$y$ 与 x 的关系可以用模型 $y=b\ln x+a$ 拟合，设 $z=\ln x$，利用最小二乘法求得 y 关于 z 的回归方程 $\hat{y}=\hat{b}z+1$．已知 $x_1x_2x_3x_4x_5x_6=e^{12}$，$\sum_{i=1}^{6}y_i=18$，则 $\hat{b}=$（　　）



A. $\frac{17}{e^{12}}$　　B. $\frac{12}{e^{12}}$　　C. 1　　D. $\frac{17}{12}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用已知数据可求得样本中心点$(2,3)$，再利用回归方程必过样本中心点，即可求出$\hat{b}=1$.

【详解】由 $\sum\limits_{6}^{i=1} y_i = 18$ 可得：$\overline{y} = \dfrac{\sum\limits_{6}^{i=1} y_i}{6} = \dfrac{18}{6} = 3$，

由 $x_1x_2x_3x_4x_5x_6=\mathrm{e}^{12}$ 可得：

$$\bar{z}=\frac{\sum_{i=1}^{6} z_i}{6}=\frac{\ln x_1+\ln x_2+\ln x_3+\ln x_4+\ln x_5+\ln x_6}{6}=\frac{\ln x_1x_2x_3x_4x_5x_6}{6}=\frac{\ln \mathrm{e}^{12}}{6}=\frac{12}{6}=2,$$

由回归方程 $\hat{y}=\hat{b}z+1$ 必过样本中心点 $(\bar{z},\bar{y})$，即过点 $(2,3)$，

所以 $3=2\hat{b}+1$，解得 $\hat{b}=1$，

故选：C.

3．图 1 是第七届国际数学教育大会（简称 ICME - 7 ）的会徽图案，会徽的主题图案是由如图2 所示的一连串直角三角形演化而成的，其中 $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\ldots=A_7A_8=1$，如果把图 2 中的直角三角形继续作下去，则第 n 个三角形的面积为（　　）


ICME-7
图1

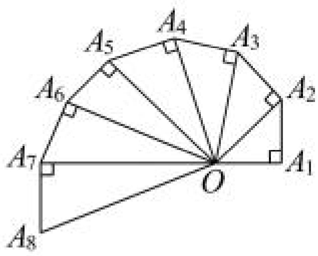


图2

A. $\frac{n}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{n}}{2}$　　C. $\frac{n^2}{2}$　　D. $\sqrt{n}$

【答案】B

【解析】

【分析】记 OA_1，OA_2，…，OA_n 的长度构成的数列为 $\{a_n\}$，依题意可得 $a_n^2=a_{n-1}^2+1$，即可得到 $\{a_n^2\}$ 是以 1 为首项， 1为公差的等差数列，从而求出 a_n，再由面积公式计算可得.

【详解】记 OA_1，OA_2，…，OA_n 的长度构成的数列为 $\{a_n\}$，

由题意知， $OA_1=A_1A_2=A_2A_3=\ldots=A_7A_8=1$，且 $\triangle OA_1A_2$，$\triangle OA_2A_3$，…，$\triangle OA_7A_8$ 都是直角三角形，

所以 $a_1=1$，且 $a_n^2=a_{n-1}^2+1$，所以数列 $\{a_n^2\}$ 是以 1为首项， 1为公差的等差数列，

所以 $a_n^2=1+(n-1)\times 1=n$，

由 $a_n > 0$，所以 $a_n = \sqrt{n}$.