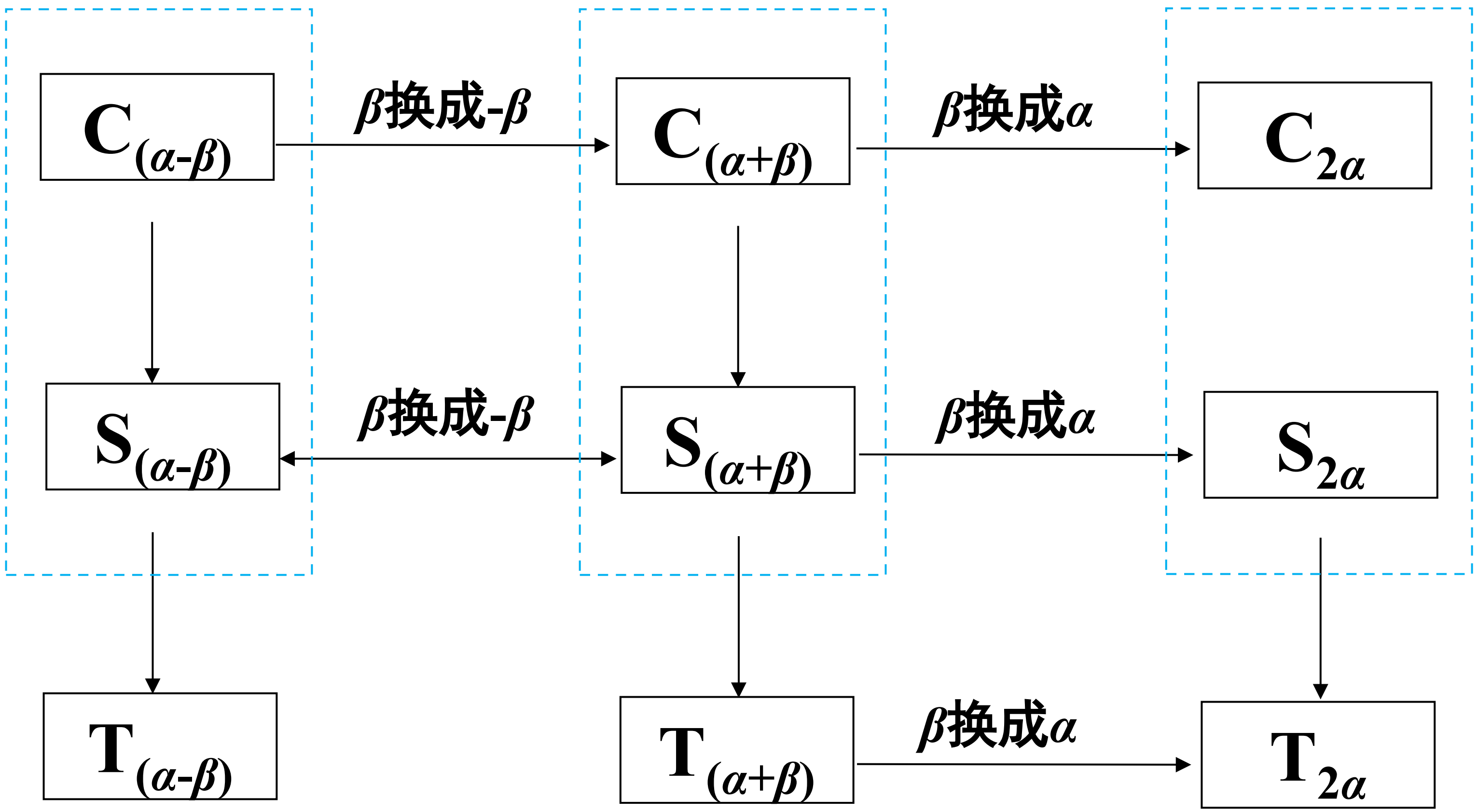
第5章　三角函数

5.5.2 简单的三角恒等变换
第三课时

问题1　两角差的余弦公式$C_{(\alpha-\beta)}$不仅是和（差）角公式的基础，也可以看成是诱导公式的一般化．你能画出本章公式的“逻辑图”吗?推导这些公式的过程中用到了哪些数学思想方法?

和（差）角公式、二倍角公式推导过程图：



和（差）角公式与诱导公式的关系图：

$C_{(\alpha-\beta)}$

- $-\beta = 2k\pi，k \in \mathbf{Z}$ → $\boxed{\cos(2k\pi + \alpha) = \cos\alpha}$
- $-\beta = \pi$ → $\boxed{\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha}$
- $\alpha = 0$ → $\boxed{\cos(-\beta) = \cos\beta}$
- $\alpha = \pi$ → $\boxed{\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta}$
- $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ → $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) = -\sin\beta}$
- $-\beta = \dfrac{\pi}{2}$ → $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha}$

推导这些公式的过程中用到了特殊与一般、转化与化归的数学思想方法.

例1　用α，β，γ的正弦、余弦值表示$\sin(\alpha+\beta-\gamma)$．

追问　请你观察例1中给出的问题，你能发现已知量与待求量之间的差异吗？能不能借助目前我们已经掌握的公式逐步消除或削弱这些差异？

变换对象中含有三个任意角，但如果把其中两个角的和或差看作一个整体，则可转化为两个角和或差的形式，可借助和角、差角公式变换求解．

例1　用α，β，γ的正弦、余弦值表示$\sin(\alpha+\beta-\gamma)$．

解： $\sin(\alpha+\beta-\gamma)=\sin[(\alpha+\beta)-\gamma]$

$=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta)\sin\gamma$

$=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

问题2　我们运用公式进行三角恒等变换的一般思路是什么？

寻找变换对象和变换目标之间的差异（包括角度差异、名称差异、结构差异、次数差异等），并以消除或削弱差异为目的选择适当的公式进行变换.

例2 观察以下各等式：

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin 30^\circ + \cos 60^\circ = \frac{3}{4},$$

$$\sin^2 20^\circ + \cos^2 50^\circ + \sin 20^\circ + \cos 50^\circ = \frac{3}{4},$$

$$\sin^2 15^\circ + \cos^2 45^\circ + \sin 15^\circ + \cos 45^\circ = \frac{3}{4}.$$

分析上述各式的共同特点，写出能反映一般规律的等式，并对等式的正确性作出证明.

追问1　你打算从哪些角度分析这些式子的相同点与不同点？

试逐条分析，并写出一般规律.

可以从角、函数名、次数三个角度着手分析.

角：每个式子均包括四个角，第一、第三个角相同；

第二、第四个角相同，且比第一、三个角大30°；

函数名：每个式子均出现四个函数名，

且从左向右均为正弦、余弦、正弦、余弦；

次数：各式各项均为二次.

追问1　你打算从哪些角度分析这些式子的相同点与不同点？

故可归纳出等式 $\sin^2\alpha+\cos^2(\alpha+30^\circ)+\sin\alpha\cos(\alpha+30^\circ)=\frac{3}{4}$.