2022~2023 学年华二附中高二（下）5 月月考数学试卷

一 填空题

1. 已知随机事件 $A\ B, P\ A\ \frac{1}{3}, P\ B\ \frac{1}{4}, P\ A|B\ \frac{3}{4}$，则 $P\ B|A$ __________.

2. 钥匙掉了，掉在宿舍里 掉在教室里 掉在路上的概率分别是 50% 、 30% 和 20% ，而掉在上述三处被找到的概率分别是 0.8 、 0.3 和 0.1 ，则找到钥匙的概率为__________.

3. 今有 2 个红球 3 个黄球 4 个白球，同色球不加以区分，将这 9 个球排成一列，要求 2 个红球相邻，3 个黄球不相邻，不同的排列种数为__________.（用数字作答）

4. 设随机变量 X 的分布列如下：其中 $a\ b\ c$ 成等差数列，若 $E\ X\ \frac{1}{3}$，则方差 $D\ X$ __________.

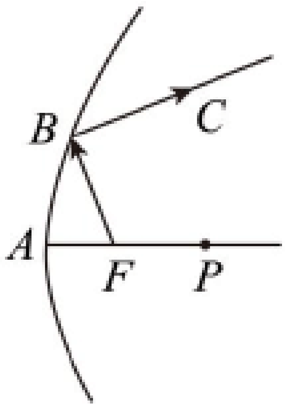
X	-1	0	1
P	a	b	c

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}\ \frac{y^2}{b^2}\ 1$ 的离心率 $e\ \frac{5}{4}$，实半轴长为 4，则双曲线的方程为__________.

6. 牛顿迭代法又称牛顿—拉夫逊方法，它是牛顿在 17 世纪提出的一种在实数集上近似求解方程根的一种方法．具体步骤如下：设 r 是函数的一个零点，任意选取 x_0 作为 r 的初始近似值，作曲线 $y\ f\ x$ 在点 $x_0, f\ x_0$ 处的切线 l_1，设 l_1 与 x 轴交点的横坐标为 x_1，并称 x_1 为 r 的 1 次近似值；作曲线 $y\ f\ x$ 在点 $x_1, f\ x_1$ 处的切线 l_2，设 l_2 与 x 轴交点的横坐标为 x_2，并称 x_2 为 r 的 2 次近似值．一般地，作曲线 $y\ f\ x$ 在点 $x_n, f\ x_n\ n\ N$ 处的切线 $l_{n\ 1}$，记 $l_{n\ 1}$ 与 x 轴交点的横坐标为：$x_{n\ 1}$，并称 $x_{n\ 1}$ 为 r 的 $n\ 1$ 次近似值．设函数 $f\ x\ \frac{1}{3}x^3\ 2x\ 1$ 的零点为 r，取 $x_0\ 0$，则 r 的 2 次近似值为______.

7. 把二项式 $\sqrt[3]{x}\ \frac{2}{x}\ ^9$ 的所有展开项重新排列，则有理项不相邻的概率为__________.

8. 圆锥曲线都具有光学性质，如双曲线的光学性质是：从双曲线的一个焦点发出的光线，经过双曲线反射后，反射光线是发散的，其反向延长线会经过双曲线的另一个焦点．如图，一镜面的轴截面图是一条双曲线的部分，AP 是它的一条对称轴，F 是它的一个焦点，一光线从焦点 F 发出，射到镜面上点 B，反射光线是 BC，若 $PFB\ 120$，$\angle FBC = 90°$，则该双曲线的离心率等于________.



9. 抛物线C ：$y^2 \quad 4x$的焦点为F ，直线l与C 交于A ，B两点，线段AB 的垂直平分线交x轴于点$P(4,0)$ ，则$|AF| \quad |BF|$ ________.

10. 若关于x的不等式$a\ln\frac{\sqrt{x}}{e} \quad x$恒成立，则a的取值范围是__________.

11. 从$1,2,3,4,5,6,7,8,9$中依次取出4个不同的数，分别记作a,b,c,d ，则$a \quad b$和$c \quad d$的奇偶性相同的概率是__________.（用数字作答）.

12. 已知关于x的方程$xe^{x \ 1} \quad a \quad x \quad \ln x \quad 2a \quad 0$在$0,1$上有两个不相等的实根，则实数$a$的取值范围是________

二 选择题

13. 已知函数$f(x) \quad x^3 \quad 3x^2$，则（　　）

A. 函数$f(x)$的极大值点为$(0,0)$

B. 函数$f(x)$的极小值为2

C. 过点$(\ 1,0)$作曲线$y \quad f(x)$的切线有两条

D. 直线$3x \quad y \quad 1 \quad 0$是曲线$y \quad f(x)$的一条切线

14. 已知甲、乙两地一年中雨天占的比例分别为25%，20%，两地同时下雨的概率为0.12,则下列说法正确的是(　　)

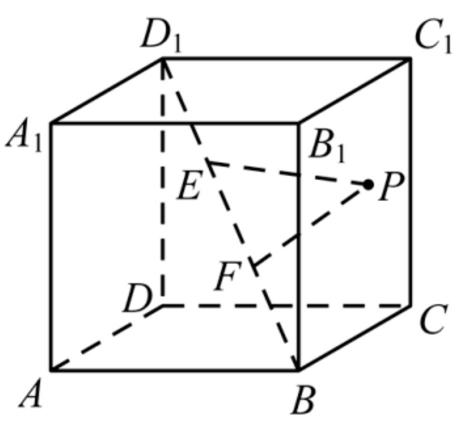
A. 甲地为雨天时，乙地也为雨天的概率为0.52

B. 乙地为雨天时，甲地也为雨天的概率为0.60

C. 甲地为雨天时，乙地不为雨天的概率为0.32

D. 乙地不为雨天时，甲地也不为雨天的概率为0.60

15. 如图，棱长为3的正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$中，P为正方体表面BCC_1B_1上的一个动点，E，F分别为BD_1的三等分点，则$|PE| \quad |PF|$的最小值为（　　）



A. $3\sqrt{3}$　　B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$　　C. $1\ \ \sqrt{6}$　　D. $\sqrt{11}$

16. 已知 $f\ x\ \ \left|xe^x\right|$，又 $g\ x\ \ f^2\ x\ \ tf\ x\ \ t\ \ R$，若满足 $g\ x\ \ \ 1$ 的 x 有四个，则 t 的取值范围是

A. $\ ,\ \frac{e^2\ \ 1}{e}$　　B. $\frac{e^2\ \ 1}{e},$　　C. $\frac{e^2\ \ 1}{e},\ 2$　　D. $2,\frac{e^2\ \ 1}{e}$

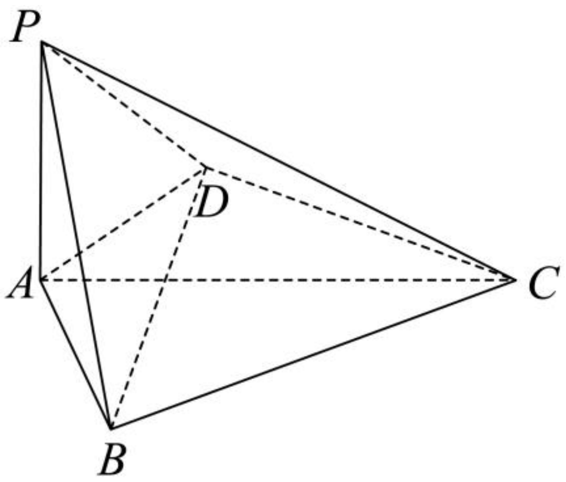
三 解答题

17. 甲 乙两选手进行乒乓球单打比赛，已知在每局中甲胜的概率为 0.6, 乙胜的概率为 0.4.

（1）比赛采用三局两胜制，求甲胜的概率；

（2）若比赛采用五局三胜制，对甲会更有利吗？请说明理由.

18. 如图，在四棱锥 $P\ \ ABCD$ 中，PA 　平面 $ABCD$,$PA\ \ AB\ \ 2,\ \ BAD\ \ 120$,$AC\ \ BD$，$\triangle BCD$ 是等边三角形.



（1）证明：平面 PAD 　平面 PCD .

（2）求二面角 $B\ \ PC\ \ D$ 的正弦值.

19. 已知 $C_1: y\ \ ax\ \ b\ a,b\ \ \ 0,1,2,3,4, C_2: x^2\ \ y^2\ \ 2$.求：

（1）C_1, C_2 有交点的概率 $P\ \ A$ ；

（2）设交点个数为 X，求 X 的分布列及数学期望 $E\ \ X$.

20. 已知平面曲线 C 满足：它上面任意一定到 $0,\frac{1}{2}$ 的距离比到直线 $y\ \ \ \frac{3}{2}$ 的距离小 1.

（1）求曲线 C 的方程；

（2）D 为直线 $y\ \ \ \frac{1}{2}$ 上的动点，过点 D 作曲线 C 的两条切线，切点分别为 $A\ B$，证明：直线 AB 过定点；

（3）在（2）的条件下，以 $E\ \ 0,\frac{5}{2}$ 为圆心的圆与直线 AB 相切，且切点为线段 AB 的中点，求四边形 $ADBE$ 的面积.

21. 已知函数 $f\ x\ \ \ e^x\ \ a\sin x\ \ 1\ a\ \ R$,

（1）求函数 $y\ \ \ f\ x$ 在 $x\ \ 0$ 处的切线方程；

（2）若函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内有唯一极值点 x_1，解答以下问题：

（i）求实数 a 的取值范围；

（ii）证明：$f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内有唯一零点 x_2，且 $x_2 < 2x_1$.

2022~2023学年华二附中高二（下）5月月考数学试卷

一 填空题

1. 已知随机事件 A,B，$P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{1}{4}$，$P(A|B)=\frac{3}{4}$，则 $P(B|A)=$__________.

【答案】$\frac{9}{16}$

【分析】由条件概率的计算公式即可求解.

【详解】由条件概率可得 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{3}{4}\Rightarrow P(AB)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$，

所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{3}}=\frac{9}{16}$.

故答案为：$\frac{9}{16}$

2. 钥匙掉了，掉在宿舍里 掉在教室里 掉在路上的概率分别是 50% 、30% 和 20% ，而掉在上述三处被找到的概率分别是 0.8、0.3 和 0.1，则找到钥匙的概率为__________.

【答案】0.51

【分析】由全概率公式即可求解.

【详解】记事件 A_1 为"钥匙掉在宿舍里"，A_2 为"钥匙掉在教室里"，A_3 为"钥匙掉在宿舍里"，

事件 B 为"找到钥匙"，由全概率公式得

$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=0.5\times0.8+0.3\times0.3+0.2\times0.1=0.51$ 故答案为：0.51

3. 今有 2 个红球 3 个黄球 4 个白球，同色球不加以区分，将这 9 个球排成一列，要求 2 个红球相邻，3 个黄球不相邻，不同的排列种数为__________.（用数字作答）

【答案】100

【分析】先将 4 个白球放好，把两个红球捆绑插空，然后再将 3 个黄球插空即可求解.

【详解】先将 4 个白球放好有一种，将两个红球捆绑插空有 $C_5^1=5$ 种，将两个红球看作一个与 4 个白球共 6 个空，将 3 个黄球插空则有 $C_6^3=5\times4=20$ 种，

所以共有 $1\times C_5^1\times C_6^3=1\times5\times20=100$ 种，

故答案为：100.

4. 设随机变量 X 的分布列如下：其中 a b c 成等差数列，若 $E(X)=\frac{1}{3}$，则方差 $D(X)=$__________.

X	-1	0	1

P	a	b	c

【答案】$\frac{5}{9}$

【分析】由分布列的性质以及等差中项，结合均值的计算即可求解$a=\frac{1}{6},b=\frac{1}{3},c=\frac{1}{2}$，由方差公式即可求解.

【详解】a b c成等差数列，$E(X)=\frac{1}{3}$,由变量X 的分布列，

知：$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 2b=a+c \\ -a+c=\frac{1}{3} \end{cases}$，解得$a=\frac{1}{6},b=\frac{1}{3},c=\frac{1}{2}$，

$D(X)=\left(-1-\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(0-\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{9}$.

故答案为：$\frac{5}{9}$

5. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的离心率$e=\frac{5}{4}$，实半轴长为 4，则双曲线的方程为__________.

【答案】$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

【分析】由离心率求出c，再由$c^2=a^2+b^2$求出b可得双曲线方程.

【详解】由已知可得$\begin{cases} \frac{c}{a}=\frac{5}{4} \\ a=4 \\ c^2=a^2+b^2 \end{cases}$,即得$b=3$,所以双曲线方程为:$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

故答案为：$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

6. 牛顿迭代法又称牛顿—拉夫逊方法，它是牛顿在 17 世纪提出的一种在实数集上近似求解方程根的一种方法．具体步骤如下：设 r 是函数的一个零点，任意选取x_0作为 r 的初始近似值，作曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线l_1，设l_1与 x 轴交点的横坐标为x_1，并称x_1为 r 的 1 次近似值；作曲线$y=f(x)$在点$(x_1,f(x_1))$处的切线l_2，设l_2与 x 轴交点的横坐标为x_2，并称x_2为 r 的 2 次近似值．一般地，作曲线$y=f(x)$在点$(x_n,f(x_n))$ $(n\in N)$处的切线l_{n+1}，记l_{n+1}与 x 轴交点的横坐标为：x_{n+1}，并称x_{n+1}为 r 的$n+1$次近似值．设函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x+1$的零点为 r，取$x_0=0$，则 r 的 2 次近似值为______.

【答案】 $\frac{13}{27}$

【分析】先求 $x_0 \quad 0$ 处的切线，再求 x_1，再求切线可得答案.

【详解】因为 $f \ x \quad \frac{1}{3}x^3 \quad 2x \quad 1$，所以 $f(x) \quad x^2 \quad 2$，

$f(0) \ 2$， $f(0) \ 1$，

所以曲线 $y \quad f \ x$ 在点 $x_0, f \ x_0$ 处的切线为 $y \ 1 \quad 2x$，即 $y \quad 2x \quad 1$；

令 $y \quad 0$ 得 $x \quad \frac{1}{2}$；

$f(\frac{1}{2}) \quad \frac{9}{4}, f(\frac{1}{2}) \quad \frac{1}{24}$，

所以曲线 $y \quad f \ x$ 在点 $\frac{1}{2}, f \quad \frac{1}{2}$ 处的切线为 $y \quad \frac{1}{24} \quad \frac{9}{4} \quad x \quad \frac{1}{2}$，即 $27x \quad 12y \quad 13 \quad 0$；

令 $y \quad 0$ 得 $x \quad \frac{13}{27}$.

故答案为： $\frac{13}{27}$.

7. 把二项式 $\sqrt[3]{x} \quad \frac{2}{x}^{9}$ 的所有展开项重新排列，则有理项不相邻的概率为__________.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【分析】由二项式展开式的通项特征即可求解有理项，由不相邻问题插空法即可求解.

【详解】 $T_{r \ 1} \quad C_9^r \ (\sqrt[3]{x})^{9 \ r} \quad \frac{2}{x}^{r} \quad C_9^r \ x^{3 \ \frac{r}{3}} \frac{2^r}{x^r} \quad C_9^r \ x^{3 \ \frac{4r}{3}} \ 2^r$，其中 $0 \leqslant r \leqslant 9, r \quad N$，

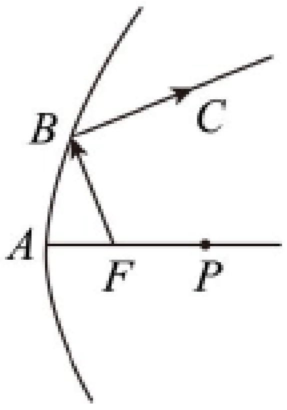
当 $r \quad 0,3,6,9$ 时，$3 \quad \frac{4}{3}r$ 为整数，故项为有理项，则有 4 项有理项，6 项无理项，展开式的 10 项全排列共有 A_{10}^{10} 种，

有理项互不相邻可把 6 个无理项全排，把 4 个有理项在形成的 7 个空中插空即可，有 $A_6^6 \quad A_7^4$ 种，

有理项都互不相邻的概率为 $\frac{A_6^6 A_7^4}{A_{10}^{10}} \quad \frac{1}{6}$.

故答案为： $\frac{1}{6}$

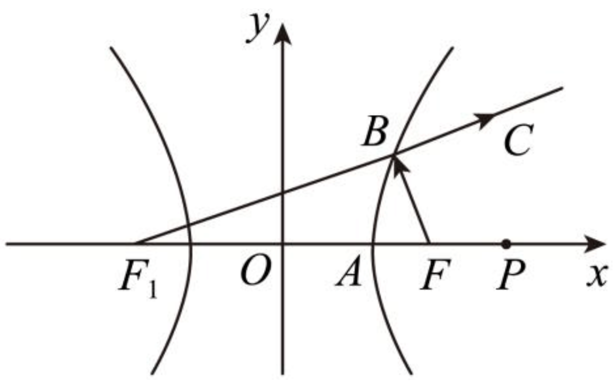
8. 圆锥曲线都具有光学性质，如双曲线的光学性质是：从双曲线的一个焦点发出的光线，经过双曲线反射后，反射光线是发散的，其反向延长线会经过双曲线的另一个焦点. 如图，一镜面的轴截面图是一条双曲线的部分，AP 是它的一条对称轴，F 是它的一个焦点，一光线从焦点 F 发出，射到镜面上点 B，反射光线是 BC，若 PFB 120，ÐFBC = 90°，则该双曲线的离心率等于________.



【答案】$\sqrt{3}+1$##$1+\sqrt{3}$

【分析】反射光线BC的反向延长线经过双曲线的另一个焦点F_1，由题中条件可得$\angle BFF_1=60^\circ$，$\angle FBF_1=90^\circ$，在直角三角形F_1BF中，$|BF_1|=\sqrt{3}c$，$|BF|=c$，由双曲线的定义可得$|BF_1|-|BF|=2a$，所以$\sqrt{3}c-c=2a$，即可求得答案.

【详解】在平面直角坐标系中，如图，



反射光线BC的反向延长线经过双曲线的另一个焦点F_1，

由$\angle PFB=120^\circ$，$\angle FBC=90^\circ$，可得$\angle BFF_1=60^\circ$，$\angle FBF_1=90^\circ$，

在直角三角形F_1BF中，$|BF_1|=|F_1F|\sin 60^\circ=\sqrt{3}c$，$|BF|=|F_1F|\cos 60^\circ=c$，

由双曲线的定义可得$|BF_1|-|BF|=2a$，所以$\sqrt{3}c-c=2a$，即$(\sqrt{3}-1)c=2a$，

所以$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$，

故答案为：$\sqrt{3}+1$.

9. 抛物线C：$y^2=4x$的焦点为F，直线l与C交于A，B两点，线段AB的垂直平分线交x轴于点$P(4,0)$，则$|AF|+|BF|=$________.

【答案】6

【分析】要求$|AF|+|BF|$，需要求出x_A+x_B，设直线l的斜率为k，根据条件表示出线段AB的垂直平分线方程，令$y=0$，可得$4=ky_0+x_0$，又由点差法可得$ky_0=2$，从而可求出x_0，即$x_A+x_B=2x_0$也可知道，从而可求出$|AF|+|BF|$

【详解】由题意得$F(1,0)$，设线段AB的中点为$M(x_0,y_0)$，

则 $|AF|+|BF|=x_A+1+x_B+1=2x_0+2$，

设直线l的斜率为 k，

则线段 AB 的垂直平分线方程为 $y-y_0=-\frac{1}{k}\left(x-x_0\right)$，

令 $y=0$，得 $x=ky_0+x_0$，即 $4=ky_0+x_0$，

又 $\begin{cases} y_A^2=4x_A \\ y_B^2=4x_B \end{cases}$，作差得 $\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{4}{y_A+y_B}$

整理得 $ky_0=2$，

所以 $x_0=2$，

$\therefore |AF|+|BF|=6$.

故答案为6.

【点睛】本题考查直线与抛物线相交的弦的垂直平分线问题，关键在于点差法以及弦长公式的运用，考查学生的计算能力，是基础题

10. 若关于 x 的不等式 $a\ln\frac{\sqrt{x}}{e}\le x$ 恒成立，则 a 的取值范围是__________.

【答案】 $\left[0,2e^3\right]$

【分析】按 $\ln\frac{\sqrt{x}}{e}>0$、$\ln\frac{\sqrt{x}}{e}<0$ 两种情况进行参变分离后构造函数，求导后利用单调性可得参数的取值范围.

【详解】①当 $\ln\frac{\sqrt{x}}{e}>0$ 即 $x\in\left(e^2,+\infty\right)$ 时，$a\ln\frac{\sqrt{x}}{e}\le x\Leftrightarrow a\le\frac{x}{\ln\sqrt{x}-1}=\frac{2x}{\ln x-2}$，

设 $f\left(x\right)=\frac{2x}{\ln x-2}, x\in\left(e^2,+\infty\right)$，则 $f'(x)=\frac{2(\ln x-2)-2}{(\ln x-2)^2}=\frac{2\ln x-6}{(\ln x-2)^2}$，

当 $x\in\left(e^2,e^3\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in\left(e^3,+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，故 $f\left(x\right)_{\min}=f\left(e^3\right)=2e^3$，

此时易知 $a\le 2e^3$；

②当 $\ln\frac{\sqrt{x}}{e}<0$ 即 $x\in\left(0,e^2\right)$ 时，$a\ln\frac{\sqrt{x}}{e}\le x\Leftrightarrow a\ge\frac{x}{\ln\sqrt{x}-1}=\frac{2x}{\ln x-2}$，

因为 $x\in\left(0,e^2\right)$，所以 $\ln x\in\left(-\infty,2\right)$，$\ln x-2\in\left(-\infty,0\right)$，所以 $\frac{2x}{\ln x-2}<0$，则 $a\ge 0$，

综上，$a\in\left[0,2e^3\right]$.

故答案为：$\left(0,2e^{3}\right)$.

11. 从$1,2,3,4,5,6,7,8,9$中依次取出4个不同的数，分别记作a,b,c,d，则$a+b$和$c+d$的奇偶性相同的概率是__________.（用数字作答）.

【答案】$\frac{11}{21}$

【分析】分情况讨论两组数的奇偶性，再用古典概型公式计算即可.

【详解】若$a+b$和$c+d$都是奇数，则a,b为一奇一偶，c,d也一奇一偶，

有$2C_5^1C_4^1\cdot 2C_4^1C_3^1=960$种取法；

若$a+b$和$c+d$都是偶数，则有以下两种情况：

①a,b,c,d均是奇数或者均是偶数，有$A_5^4+A_4^4=144$种取法；

②a,b两奇（偶）数，c,d两偶（奇）数，有$A_5^2A_4^2A_2^2=480$种取法；

共计$960+144+480=1584$种取法，

故$a+b$和$c+d$的奇偶性相同的概率是$P=\frac{1584}{A_9^4}=\frac{11}{21}$.

故答案为：$\frac{11}{21}$

12. 已知关于x的方程$xe^{x-1}-a\left(x+\ln x\right)-2a=0$在$\left(0,1\right)$上有两个不相等的实根，则实数$a$的取值范围是________

【答案】$\left(\frac{1}{e^2},\frac{1}{3}\right)$

【分析】先利用指、对数性质整理方程为$e^{\ln x+x-1}-a\left(x+\ln x\right)-2a=0$，令$t=\ln x+x-1$，$x\in\left(0,1\right)$，即得$a=\frac{e^t}{t+3}$在$t\in\left(-\infty,-3\right)\cup\left(-3,0\right)$有两个不相等的实根，再转化为$y=a$和$g\left(t\right)=\frac{e^t}{t+3}$，$t\in\left(-\infty,-3\right)\cup\left(-3,0\right)$有两个不同的交点，利用导数研究函数图象，并结合图象得到结果即可.

【详解】解：由$x=e^{\ln x}$，则方程$xe^{x-1}-a\left(x+\ln x\right)-2a=0$，即$e^{\ln x+x-1}-a\left(x+\ln x\right)-2a=0$，

令$t=\ln x+x-1$，$x\in\left(0,1\right)$，则由$y=\ln x,y=x-1$单调性可知，函数$t=\ln x+x-1$是递增的，故$x\in\left(0,1\right)$时，值域为$t\in\left(-\infty,0\right)$.

而$e^{\ln x+x-1}-a\left(x+\ln x\right)-2a=0$转化为$e^t-at-3a=0$，

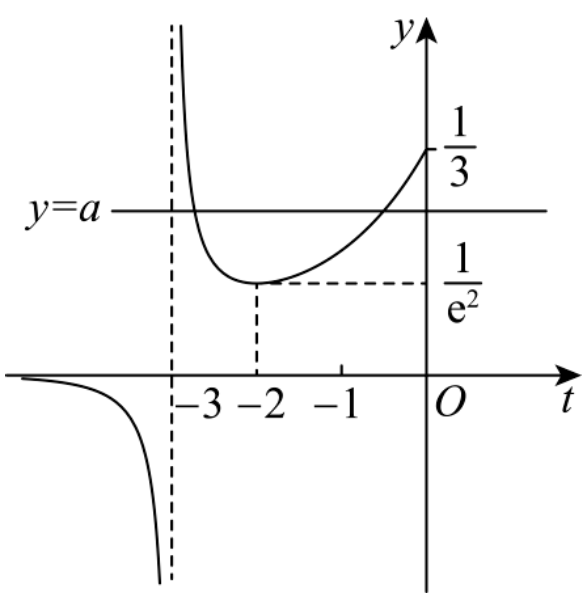
当$t=-3$时，方程为$e^t=0$，不成立，故$t\neq-3$，即转化为$a=\frac{e^t}{t+3}$在$t\in\left(-\infty,-3\right)\cup\left(-3,0\right)$有两个不相等的实根，

即 $y \quad a$ 和 $y \quad g \quad t \quad \frac{e^t}{t \quad 3}$，$t \qquad , 3 \qquad 3, 0$ 有两个不同的交点.

$g \quad t \quad \frac{e^t \quad x \quad 2}{t \quad 3^2}$，当 $t \qquad , 3$ 和 $t \quad 3, 2$ 时，$g \quad t \quad 0$，即 $g \quad t$ 在 $t \qquad , 3$ 上递减，在 $t \quad 3, 2$ 上递减；当 $t \quad 2, 0$ 时，$g \quad t \quad 0$，$g \quad t$ 递增.

另外，$t \quad 3$ 时，$g \quad t \quad \frac{e^t}{t \quad 3} \quad 0$；$t \quad 3$ 时，$g \quad t \quad 0$；$g \quad 2 \quad \frac{1}{e^2}, g \quad 0 \quad \frac{1}{3}$.

结合函数 $y \quad g \quad t \quad \frac{e^t}{t \quad 3}$，$t \qquad , 3 \qquad 3, 0$ 图象可知，



当 $a \quad \frac{1}{e^2}, \frac{1}{3}$ 时，$y \quad a$ 和 $g \quad t \quad \frac{e^t}{t \quad 3}$，$t \qquad , 3 \qquad 3, 0$ 的图象有两个不同的交点.

故答案为：$\frac{1}{e^2}, \frac{1}{3}$.

【点睛】方法点睛：已知函数有零点(方程有根)或已知零点个数(方程根的个数)求参数值(取值范围)常用的方法：

（1）直接法：直接求解方程得到方程的根，再通过解不等式确定参数范围；

（2）分离参数法：先将参数分离，转化成求函数的值域问题加以解决；

（3）数形结合法：先对解析式变形，进而构造两个函数，然后在同一平面直角坐标系中画出函数的图象，利用数形结合的方法求解.

二 选择题

13. 已知函数 $f(x) \quad x^3 \quad 3x^2$，则（　　）

A. 函数 $f(x)$ 的极大值点为 $(0, 0)$

B. 函数 $f(x)$ 的极小值为 2

C. 过点 $(\ 1, 0)$ 作曲线 $y \quad f(x)$ 的切线有两条

D. 直线 $3x \quad y \quad 1 \quad 0$ 是曲线 $y \quad f(x)$ 的一条切线

【答案】D

【分析】利用求导分析函数 $f(x)$ 的单调性，即可求出极大值点和极小值，判断 AB 选项正误；设过 $(-1,0)$ 的切线为 $y=k(x+1)$，切点为 $\left(x_0,x_0^3-3x_0^2\right)$，利用点斜式整理比较 k 值列方程，方程的解的个数即为切点个数和切线条数，判断 C 选项正误；利用切线斜率求出切点，即可得到切线方程，判断 D 选项正误.

【详解】$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=2$，

因为 $x\in(-\infty,0)$，$f'(x)>0$；$x\in(0,2)$，$f'(x)<0$；$x\in(2,+\infty)$，$f'(x)>0$；

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 递增，$[0,2)$ 递减，$[2,+\infty)$ 递增，

故 $f(x)$ 的极大值点为 $x=0$，故 A 错误；

极小值为 $f(2)=2^3-3\times2^2=8-12=-4$，故 B 错误；

设过 $(-1,0)$ 的切线为 $y=k(x+1)$，切点为 $\left(x_0,x_0^3-3x_0^2\right)$，

所以 $y-\left(x_0^3-3x_0^2\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)=\left(3x_0^2-6x_0\right)\left(x-x_0\right)$，

则 $y=\left(3x_0^2-6x_0\right)x-\left(3x_0^3-6x_0^2\right)+x_0^3-3x_0^2=\left(3x_0^2-6x_0\right)x-2x_0^3+3x_0^2$，

从而 $3x_0^2-6x_0=-2x_0^3+3x_0^2\Rightarrow 2x_0^3-6x_0=0\Rightarrow x_0\left(x_0^2-3\right)=0$，

解得 $x_0=0$ 或 $x_0=\pm\sqrt{3}$，有三条切线，故 C 错误；

令 $k=f'\left(x_0\right)=3x_0^2-6x_0=-3$，即 $x_0^2-2x_0+1=0$，解得 $x_0=1$，

从而 $y-f(1)=-3(x-1)\Rightarrow y+2=-3x+3$，即切线方程为 $3x+y-1=0$，故 D 正确.

故选：D.

14. 已知甲、乙两地一年中雨天占的比例分别为 25%，20%，两地同时下雨的概率为 0.12，则下列说法正确的是(　　)

A. 甲地为雨天时，乙地也为雨天的概率为 0.52

B. 乙地为雨天时，甲地也为雨天的概率为 0.60

C. 甲地为雨天时，乙地不为雨天的概率为 0.32

D. 乙地不为雨天时，甲地也不为雨天的概率为 0.60

【答案】B

【分析】设一年中甲地下雨记为事件 A，乙地下雨记为事件 B，则两地同时下雨记为事件 AB.利用条件概率的计算公式分别求概率即可.

【详解】设一年中甲地下雨记为事件 A，乙地下雨记为事件 B，则两地同时下雨记为事件 AB.

由题意可得：$P(A)=0.25, P(B)=0.20, P(AB)=0.12, P(\bar{A})=0.75, P(\bar{B})=0.80$.

如图示：