2022-2023学年山东省乳山市下学期高三4月月考数学试题

请考生注意：

1．请用2B铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用0．5毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。

2．答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知函数 $f(x)=\begin{cases} kx-1, x>0, \\ -\ln(-x), x<0, \end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 的图象上关于原点对称的点有2对，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,0)$　　B．$(0,1)$　　C．$(0,+\infty)$　　D．$\left(0,\frac{1}{2}\right)$

2．在 $\triangle ABC$ 中，内角 *A*，*B*，*C* 所对的边分别为 *a*，*b*，*c*，且 $a\cos B+b\sin A=c$.若 $a=2$，$\triangle ABC$ 的面积为 $3(\sqrt{2}-1)$，则 $b+c=$（　　）

A．5　　B．$2\sqrt{2}$　　C．4　　D．16

3．大衍数列，来源于我国古代文献《乾坤谱》中对易传“大衍之数五十”的推论，主要用于解释我国传统文化中的太极衍生原理，数列中的每一项，都代表太极衍生过程中，曾经经历过的两仪数量总和.已知该数列前10项是0，2，4，8，12，18，24，32，40，50，…，则大衍数列中奇数项的通项公式为（　　）

A．$\frac{n^2-n}{2}$　　B．$\frac{n^2-1}{2}$　　C．$\frac{(n-1)^2}{2}$　　D．$\frac{n^2}{2}$

4．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=4$，$\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上投影为 -2，则 $|\vec{a}-3\vec{b}|$ 的最小值为(　　)

A．12　　B．10　　C．$\sqrt{10}$　　D．2

5．若命题□：从有2件正品和2件次品的产品中任选2件得到都是正品的概率为三分之一；命题□：在边长为4的正方形□□□□内任取一点□，则□□□□ $> 90^{\circ}$ 的概率为 $\frac{□}{8}$，则下列命题是真命题的是（　　）

A．□ ∧ □　　B．(¬□) ∧ □　　C．□ ∧ (¬□)　　D．¬□

6．“$-1\le x+y\le 1$ 且 $-1\le x-y\le 1$”是“$x^2+y^2\le 1$”的（　　）

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．已知正项数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足：$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+10b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \end{cases}$，设 $c_n=\frac{a_n}{b_n}$，当 c_3+c_4 最小时，c_5 的值为(　　)

A．2　　　B．$\frac{14}{5}$　　　C．3　　　D．4

8．已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-x, x\le a \\ 5-x, x>a \end{cases}$（$a>0$），若函数 $g(x)=f(x)-4|x|$ 有三个零点，则 a 的取值范围是（　　）

A．$(0,1)\cup[5,+\infty)$　　　B．$(0,\frac{6}{5})\cup[5,+\infty)$

C．$(1,5]$　　　D．$(\frac{6}{5},5]$

9．已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的点 M 到其焦点 F 的距离比点 M 到 y 轴的距离大 $\frac{1}{2}$，则抛物线的标准方程为（　）

A．$y^2=x$　　　B．$y^2=2x$　　　C．$y^2=4x$　　　D．$y^2=8x$

10．若直线 $2x+y+m=0$ 与圆 $x^2+2x+y^2-2y-3=0$ 相交所得弦长为 $2\sqrt{5}$，则 $m=$（　　）

A．1　　　B．2　　　C．$\sqrt{5}$　　　D．3

11．为得到$\square=\sin(2\square-\frac{\square}{3})$的图象，只需要将$\square=\sin2\square$的图象（ ）

A．向左平移$\frac{\square}{3}$个单位　　　B．向左平移$\frac{\square}{6}$个单位

C．向右平移$\frac{\square}{3}$个单位　　　D．向右平移$\frac{\square}{6}$个单位

12．已知将函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$（$0<\omega<6$，$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$）的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象都关于 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，则 ω 的值为（　　）

A．2　　　B．3　　　C．4　　　D．$\frac{3}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．利用等面积法可以推导出在边长为 a 的正三角形内任意一点到三边的距离之和为定值 $\frac{\sqrt{3}a}{2}$，类比上述结论，利用等体积法进行推导，在棱长为 a 的正四面体内任意一点到四个面的距离之和也为定值，则这个定值是______

14．已知实数 x，y 满足 $\begin{cases} y\ge x \\ 2x-y\ge 0 \\ x+y\le 5 \end{cases}$，则 $z=\frac{y}{x+2}$ 的最大值为______．

15．经过椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 中心的直线与椭圆相交于 M、N 两点（点 M 在第一象限），过点 M 作 x 轴的垂线，垂足为点 E．设直线 NE 与椭圆的另一个交点为 P．则 $\cos\angle NMP$ 的值是________________．

16．已知$(2x-1)^7=a_o+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_7x^7$，则 $a_2=$____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12 分）在ΔABC中，角A,B,C所对的边分别是a,b,c，且$2\sin^2(B+C)-3\cos A=0$.

（1）求角A的大小；

（2）若$B=\dfrac{\pi}{4}$，$a=2\sqrt{3}$，求边长c.

18．（12 分）在△*ABC* 中，角 *A*，*B*，*C* 的对边分别为 *a*，*b*，*c*，且 $b(a^2+c^2-b^2)=a^2c\cos C+ac^2\cos A$.

（1）求角 *B* 的大小；

（2）若△*ABC* 外接圆的半径为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，求△*ABC* 面积的最大值.

19．（12 分）在某社区举行的 2020 迎春晚会上，张明和王慧夫妻俩参加该社区的"夫妻蒙眼击鼓"游戏，每轮游戏中张明和王慧各蒙眼击鼓一次，每个人击中鼓则得积分 100 分，没有击中鼓则扣积分 50 分，最终积分以家庭为单位计分.已知张明每次击中鼓的概率为$\dfrac{3}{4}$，王慧每次击中鼓的概率为$\dfrac{2}{3}$；每轮游戏中张明和王慧击中与否互不影响，假设张明和王慧他们家庭参加两轮蒙眼击鼓游戏.

（1）若家庭最终积分超过 200 分时，这个家庭就可以领取一台全自动洗衣机，问张明和王慧他们家庭可以领取一台全自动洗衣机的概率是多少？

（2）张明和王慧他们家庭两轮游戏得积分之和ξ的分布列和数学期望$E(\xi)$.

20．（12 分）2019 年春节期间，某超市准备举办一次有奖促销活动，若顾客一次消费达到 400 元则可参加一次抽奖活动，超市设计了两种抽奖方案.

方案一：一个不透明的盒子中装有 30 个质地均匀且大小相同的小球，其中 10 个红球，20 个白球，搅拌均匀后，顾客从中随机抽取一个球，若抽到红球则顾客获得 60 元的返金券，若抽到白球则获得 20 元的返金券，且顾客有放回地抽取 3 次.

方案二：一个不透明的盒子中装有 30 个质地均匀且大小相同的小球，其中 10 个红球，20 个白球，搅拌均匀后，顾客从中随机抽取一个球，若抽到红球则顾客获得 80 元的返金券，若抽到白球则未中奖，且顾客有放回地抽取 3 次.

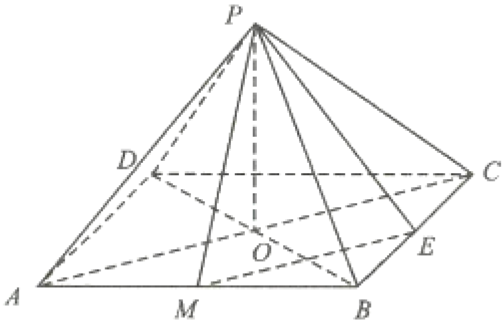
（1）现有两位顾客均获得抽奖机会，且都按方案一抽奖，试求这两位顾客均获得 180 元返金券的概率；

（2）若某顾客获得抽奖机会.

①试分别计算他选择两种抽奖方案最终获得返金券的数学期望；

②为了吸引顾客消费，让顾客获得更多金额的返金券，该超市应选择哪一种抽奖方案进行促销活动？

21．（12 分）如图，在四棱锥$P-ABCD$中，O是边长为4的正方形$ABCD$的中心，$PO\perp$平面$ABCD$，E为BC的中点.



（Ⅰ）求证：平面 $PAC\perp$ 平面 PBD；

（Ⅱ）若 $PE=3$，求二面角 $D-PE-B$ 的余弦值.

22.（10 分）设函数 $f(x)=x\ln x-ae^{x}, p\left(x\right)=kx$，其中 $a\in R,e$ 是自然对数的底数.

（Ⅰ）若 $f(x)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上存在两个极值点，求 a 的取值范围；

（Ⅱ）若 $\varphi(x)=\ln x+1-f'(x),\varphi(1)=e$，函数 $\varphi(x)$ 与函数 $p(x)$ 的图象交于 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，且 AB 线段的中点为 $P\left(x_0,y_0\right)$，证明：$\varphi(x_0)<p(1)<y_0$.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

考虑当 $x>0$ 时，$kx-1=\ln x$ 有两个不同的实数解，令 $h\left(x\right)=\ln x-kx+1$，则 $h\left(x\right)$ 有两个不同的零点，利用导数和零点存在定理可得实数 k 的取值范围.

【详解】

因为 $f\left(x\right)$ 的图象上关于原点对称的点有 **2** 对，

所以 $x>0$ 时，$kx-1=\ln x$ 有两个不同的实数解.

令 $h\left(x\right)=\ln x-kx+1$，则 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 有两个不同的零点.

又 $h'\left(x\right)=\dfrac{1-kx}{x}$，

当$k\le 0$时，$h'(x)>0$，故$h(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数，

$h(x)$在$(0,+\infty)$上至多一个零点，舍.

当$k>0$时，

若$x\in\left(0,\frac{1}{k}\right)$，则$h'(x)>0$，$h(x)$在$\left(0,\frac{1}{k}\right)$上为增函数；

若$x\in\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$，则$h'(x)<0$，$h(x)$在$\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$上为减函数；

故$h(x)_{\max}=h\left(\frac{1}{k}\right)=\ln\frac{1}{k}$，

因为$h(x)$有两个不同的零点，所以$\ln\frac{1}{k}>0$，解得$0<k<1$.

又当$0<k<1$时，$\frac{1}{e}<\frac{1}{k}$且$h\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{k}{e}<0$，故$h(x)$在$\left(0,\frac{1}{k}\right)$上存在一个零点.

又$h\left(\frac{e}{k^2}\right)=\ln\frac{e}{k^2}-\frac{e}{k}+1=2+2\ln t-et$，其中$t=\frac{1}{k}>1$.

令$g(t)=2+2\ln t-et$，则$g'(t)=\frac{2-et}{t}$，

当$t>1$时，$g'(t)<0$，故$g(t)$为$(1,+\infty)$减函数，

所以$g(t)<g(1)=2-e<0$即$h\left(\frac{e}{k^2}\right)<0$.

因为$\frac{e}{k^2}>\frac{1}{k^2}>\frac{1}{k}$，所以$h(x)$在$\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$上也存在一个零点.

综上，当$0<k<1$时，$h(x)$有两个不同的零点.

故选：**B.**

【点睛】

本题考查函数的零点，一般地，较为复杂的函数的零点，必须先利用导数研究函数的单调性，再结合零点存在定理说明零点的存在性，本题属于难题.

2、**C**

【解析】

根据正弦定理边化角以及三角函数公式可得$A=\frac{\pi}{4}$,再根据面积公式可求得$bc=6(2-\sqrt{2})$,再代入余弦定理求解即可.

【详解】

$\triangle ABC$ 中,$a\cos B+b\sin A=c$,由正弦定理得$\sin A\cos B+\sin B\sin A=\sin C$,

又$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$,

$\therefore\sin B\sin A=\cos A\sin B$,又$\sin B\neq 0$,$\therefore\sin A=\cos A$,$\therefore\tan A=1$,又$A\in(0,\pi)$,

$\therefore A=\dfrac{\pi}{4}$.$\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{4}bc=3(\sqrt{2}-1)$,

$\therefore bc=6(2-\sqrt{2})$,$\because a=2$,$\therefore$由余弦定理可得$a^2=(b+c)^2-2bc-2bc\cos A$,

$\therefore(b+c)^2=4+(2+\sqrt{2})bc=4+(2+\sqrt{2})\times 6(2-\sqrt{2})=16$,可得$b+c=4$.

故选:C

【点睛】

本题主要考查了解三角形中正余弦定理与面积公式的运用,属于中档题.

3、B

【解析】

直接代入检验,排除其中三个即可.

【详解】

由题意$a_1=0$,排除D,$a_3=4$,排除A,C.同时B也满足$a_5=12$,$a_7=24$,$a_9=40$,

故选:B.

【点睛】

本题考查由数列的项选择通项公式,解题时可代入检验,利用排除法求解.

4、B

【解析】

根据$\vec{b}$在$\vec{a}$上投影为-2,以及$\cos<\vec{a},\vec{b}>\in[-1,0)$,可得$|\vec{b}|_{\min}=2$;再对所求模长进行平方运算,可将问题转化为模长和夹角运算,代入$|\vec{b}|_{\min}$即可求得$|\vec{a}-3\vec{b}|_{\min}$.

【详解】

$\vec{b}$在$\vec{a}$上投影为-2,即$|\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>=-2$

$\because |\vec{b}|>0\qquad \therefore\cos<\vec{a},\vec{b}><0$

又$\cos<\vec{a},\vec{b}>\in[-1,0)\qquad \therefore |\vec{b}|_{\min}=2$

$$|\vec{a}-3\vec{b}|^2=\vec{a}^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^2=|\vec{a}|^2-6|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>+9|\vec{b}|^2=9|\vec{b}|^2+64$$

$\therefore \left|\vec{a}-3\vec{b}\right|_{\min}=\sqrt{9\times 4+64}=10$

本题正确选项：B

【点睛】

本题考查向量模长的运算，对于含加减法运算的向量模长的求解，通常先求解模长的平方，再开平方求得结果；解题关键是需要通过夹角取值范围的分析，得到$\left|\vec{b}\right|$的最小值.

5、**B**

【解析】因为从有 **2** 件正品和 **2** 件次品的产品中任选 **2** 件得到都是正品的概率为$□_1=\frac{1}{□_4^2}=\frac{1}{6}$，即命题□是错误，

则$\neg$□是正确的; 在边长为 **4** 的正方形□□□□内任取一点□，若□□□□ $> 90^\circ$的概率为$□_2=\frac{\frac{1}{2}\times □\times 4}{4\times 4}=\frac{□}{8}$，即命题□是

正确的，故由符合命题的真假的判定规则可得答案 $(\neg □)\wedge □$是正确的，应选答案 **B**。

点睛：本题将古典型概率公式、几何型概率公式与命题的真假（含或、且、非等连接词）的命题构成的复合命题的真假的判定有机地整合在一起，旨在考查命题真假的判定及古典概型的特征与计算公式的运用、几何概型的特征与计算公式的运用等知识与方法的综合运用，以及分析问题 解决问题的能力。

6、**A**

【解析】

画出“$-1\le x+y\le 1,-1\le x-y\le 1,x^2+y^2\le 1$,所表示的平面区域,即可进行判断.

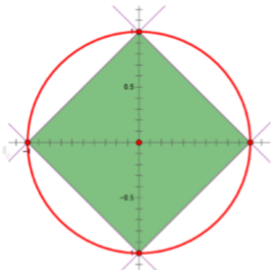
【详解】

如图，“$-1\le x+y\le 1$且$-1\le x-y\le 1$”表示的区域是如图所示的正方形，

记为集合 **P**，“$x^2+y^2\le 1$”表示的区域是单位圆及其内部，记为集合 **Q**，

显然P是Q的真子集,所以答案是充分非必要条件，

故选:A.



【点睛】

本题考查了不等式表示的平面区域问题,考查命题的充分条件和必要条件的判断,难度较易.

7、**B**

【解析】

由$\begin{cases}a_{n+1}=a_n+10b_n\\b_{n+1}=a_n+b_n\end{cases}$得$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=1+\dfrac{9}{\dfrac{a_n}{b_n}+1}$，即$c_{n+1}=1+\dfrac{9}{c_n+1}$，所以得$c_3+c_4=c_3+1+\dfrac{9}{c_3+1}$，利用基本不等式求出最小值，得到$c_3=2$，再由递推公式求出$c_5$.

【详解】

由$\begin{cases}a_{n+1}=a_n+10b_n\\b_{n+1}=a_n+b_n\end{cases}$得$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\dfrac{a_n+10b_n}{a_n+b_n}=\dfrac{\dfrac{a_n}{b_n}+10}{\dfrac{a_n}{b_n}+1}=1+\dfrac{9}{\dfrac{a_n}{b_n}+1}$,

即$c_{n+1}=1+\dfrac{9}{c_n+1}$,

$\therefore c_3+c_4=c_3+1+\dfrac{9}{c_3+1}\geq 6$，当且仅当$c_3=2$时取得最小值，

此时$c_4=1+\dfrac{9}{c_3+1}=4$，$c_5=1+\dfrac{9}{c_4+1}=\dfrac{14}{5}$.

故选：**B**

【点睛】

本题主要考查了数列中的最值问题，递推公式的应用，基本不等式求最值，考查了学生的运算求解能力.

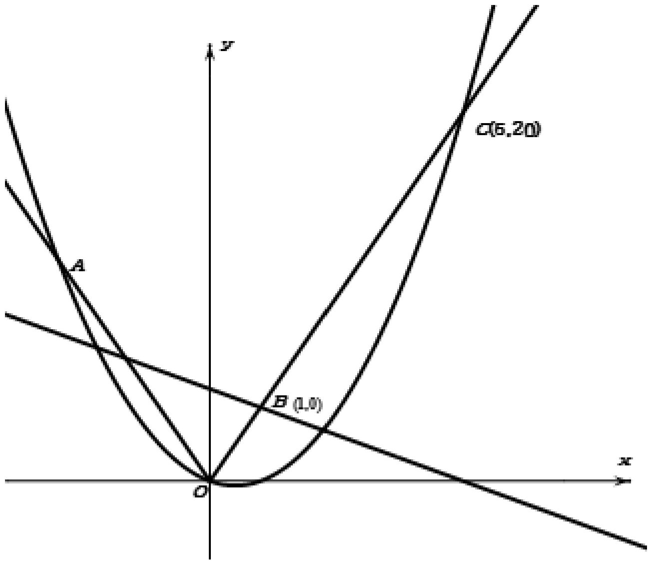
8、**A**

【解析】

分段求解函数零点，数形结合，分类讨论即可求得结果.

【详解】

作出$y=x^2-x$和$y=5-x$，$y=4|x|$的图像如下所示：



函数$g(x)=f(x)-4|x|$有三个零点，

等价于$y=f\left(x\right)$与$y=4|x|$有三个交点，

又因为$a>0$，且由图可知，

当$x\leq 0$时$y=f\left(x\right)$与$y=4|x|$有两个交点A,O，

故只需当$x>0$时，$y=f\left(x\right)$与$y=4|x|$有一个交点即可.

若当$x>0$时，

$a\in\left(0,1\right)$时，显然$y=f(x)$与$y=4|x|$有一个交点B，故满足题意；

$a=1$时，显然$y=f(x)$与$y=4|x|$没有交点，故不满足题意；

$a\in\left(1,5\right)$时，显然$y=f(x)$与$y=4|x|$也没有交点，故不满足题意；

$a\in\left[5,+\infty\right)$时，显然$y=f\left(x\right)$与$y=4|x|$有一个交点$C$，故满足题意.

综上所述，要满足题意，只需$a\in(0,1)\cup[5,+\infty)$.

故选：A.

【点睛】

本题考查由函数零点的个数求参数范围，属中档题.

9、B

【解析】

由抛物线的定义转化，列出方程求出 p，即可得到抛物线方程.

【详解】

由抛物线 $y^2=2px$（p＞0）上的点 M 到其焦点 F 的距离比点 M 到 y 轴的距离大$\frac{1}{2}$，根据抛物线的定义可得$\frac{p}{2}=\frac{1}{2}$，