预测 14　二次函数与特殊三角形和特殊四边形的综合

中考预测

概率预测	☆ ☆ ☆ ☆ ☆
题型预测	解答题☆ ☆ ☆ ☆ ☆
考向预测	①与直角三角形有关的二次函数。 ②与平行四边形有关的二次函数。

应试必备

二次函数是全国中考的热点，也是每年必考的！全国各地的中考数学试题都把二次函数作为压轴题。

1．从考点频率看，直角三角形和平行四边形与二次函数的综合是高频考点。

2．从题型角度看，以解答题形式考查，分值约 11 分。

一 知识必备

几何分析法 ：特别是构造“平行四边形”、“梯形”、“相似三角形”、“直角三角形”、“等腰三角形”等图形时，利用几何分析法能给解题带来方便。

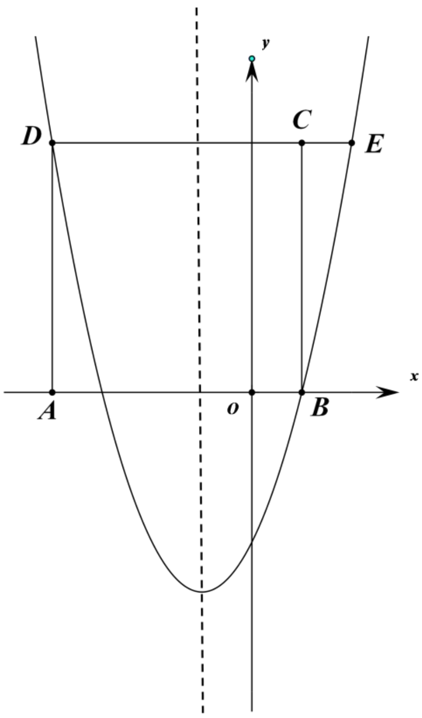
几何要求	几何分析	涉及公式	应用图形
跟平行有的图形	平移	$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$、$k = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$	平行四边形 矩形 梯形
跟直角有关的图形	勾股定理逆定理 利用相似、全等、平行、对顶角、互余、互补等	$AB = \sqrt{(y_A - y_B)^2 + (x_A - x_B)^2}$	直角三角形 直角梯形 矩形
跟线段有关的图形	利用几何中的全等、中垂线的性质等。	$AB = \sqrt{(y_A - y_B)^2 + (x_A - x_B)^2}$	等腰三角形 全等 等腰梯形
跟角有关的图形	利用相似、全等、平行、对顶角、互余、互补等		

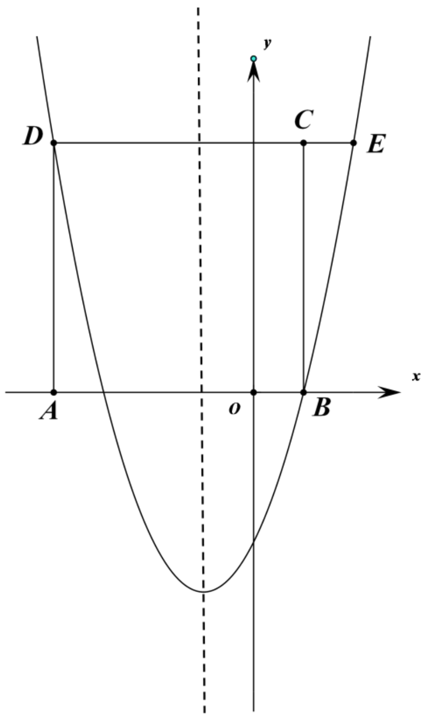
技法必备

特殊图形的存在性问题：已知两点，判断与二次函数有关的特殊三角形的第三个顶点位置时，则可以通过做已知线段的垂线、垂直平分线，结合画辅助线来确定。若判定与二次函数有关的平行四边形问题，可以依据平行四边形的性质，考虑已知顶点坐标的平移，轴对称或中心对称等知识求未知点的坐标。

真题回顾

1.（2021·湖北恩施土家族苗族自治州·中考真题）如图，在平面直角坐标系中，四边形$ABCD$为正方形，点A，B在x轴上，抛物线$y=x^2+bx+c$经过点B，$D\left(-4,5\right)$两点，且与直线DC交于另一点E．





备用图

（1）求抛物线的解析式；

（2）F为抛物线对称轴上一点，Q为平面直角坐标系中的一点，是否存在以点Q，F，E，B为顶点的四边形是以BE为边的菱形．若存在，请求出点F的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）P为y轴上一点，过点P作抛物线对称轴的垂线，垂足为M，连接ME，BP．探究$EM+MP+PB$是否存在最小值．若存在，请求出这个最小值及点M的坐标；若不存在，请说明理由．

【答案】(1) $y=x^2+2x-3$；(2) 存在以点Q，F，E，B为顶点的四边形是以BE为边的菱形，点F的坐标为$\left(-1,\sqrt{22}\right)$或$\left(-1,-\sqrt{22}\right)$或$\left(-1,5-\sqrt{17}\right)$或$\left(-1,5+\sqrt{17}\right)$；(3) $EM+MP+PB$存在最小值，最小值为$\sqrt{41}+1$，此时点M的坐标为$\left(-1,\frac{5}{4}\right)$.

【分析】(1) 由题意易得$AD=AB=5$，进而可得$A(-4,0)$，则有$B(1,0)$，然后把点B、D代入求解即可；

(2) 设点$F(-1,a)$，当以点Q，F，E，B为顶点的四边形是以BE为边的菱形时，则根据菱形的性质可分①当$BF=BE$时，②当$EF=BE$时，然后根据两点距离公式可进行分类求解即可；

(3) 由题意可得如图所示的图象，连接OM、DM，由题意易得$DM=EM$，四边形$BOMP$是平行四边形，进而可得$OM=BP$，则有$EM+MP+PB=DM+MO+1$，若使$EM+MP+PB$的值为最小，即$DM+MO+1$为最小，则有当点D、M、O三点共线时，$DM+MO+1$的值为最小，然后问题可求解.

【详解】解：(1) ∵四边形$ABCD$为正方形，$D(-4,5)$，

∴$AD=AB=5$，$A(-4,0)$，∴$AO=4$，∴$OB=1$，∴$B(1,0)$，

把点B、D坐标代入得：$\begin{cases}16-4b+c=5\\1+b+c=0\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}b=2\\c=-3\end{cases}$，∴抛物线的解析式为$y=x^2+2x-3$；

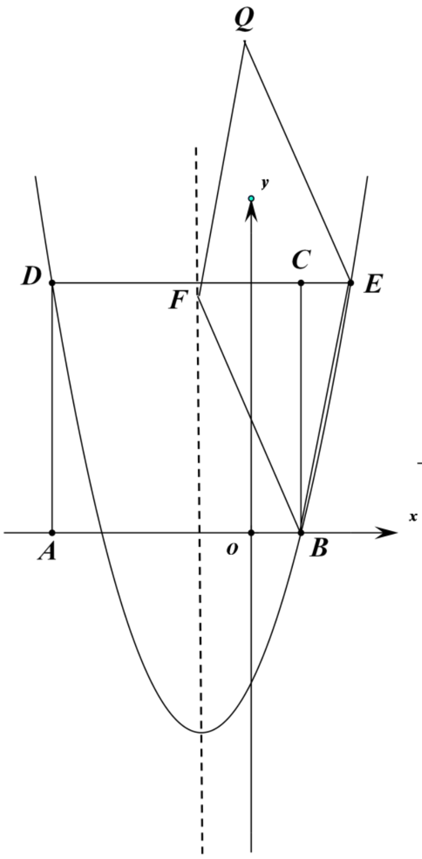
(2) 由(1)可得$B(1,0)$，抛物线解析式为$y=x^2+2x-3$，则有抛物线的对称轴为直线$x=-1$，

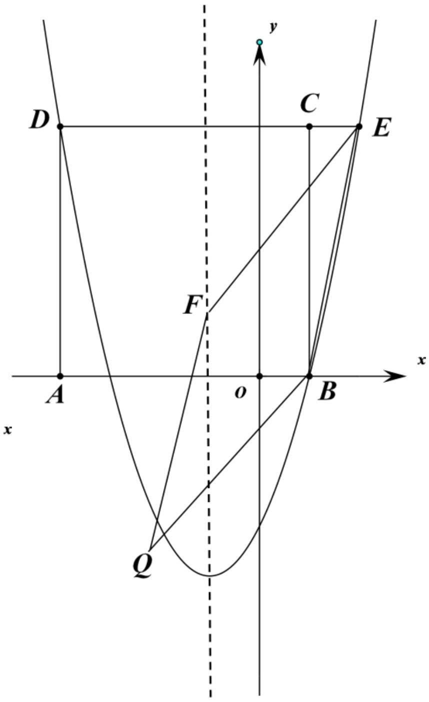
∵点D与点E关于抛物线的对称轴对称，∴$E(2,5)$，

∴由两点距离公式可得$BE^2=(1-2)^2+(0-5)^2=26$，

设点$F(-1,a)$，当以点Q，F，E，B为顶点的四边形是以BE为边的菱形时，则根据菱形的性质可分：

① 当$BF=BE$时，如图所示：





∴由两点距离公式可得 $BF^2 = BE^2$，即 $(1+1)^2 + (0-a)^2 = 26$，解得：$a = \pm\sqrt{22}$，

∴点 F 的坐标为 $(-1, \sqrt{22})$ 或 $(-1, -\sqrt{22})$；

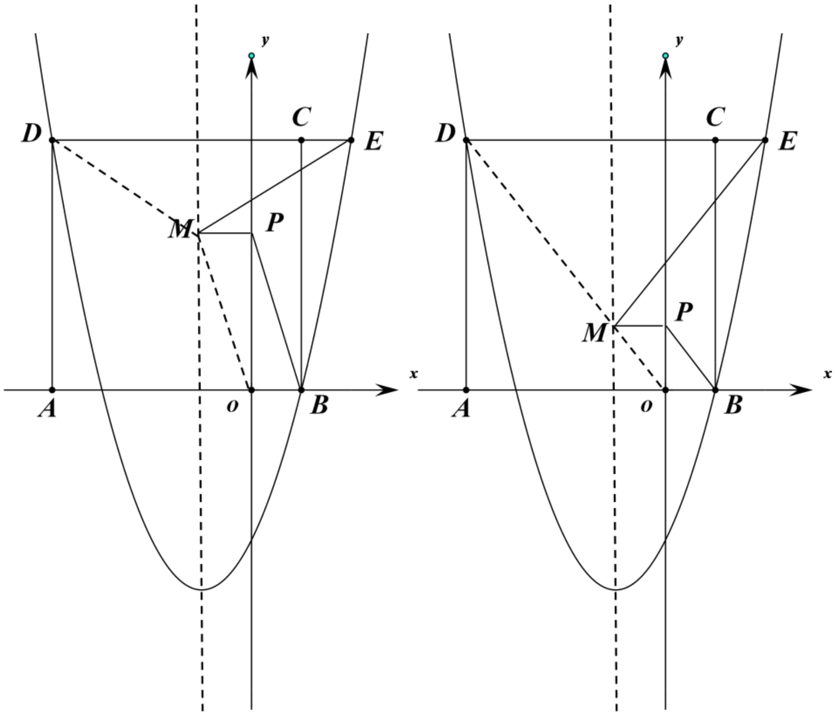
②当 $EF = BE$ 时，如图所示：

∴由两点距离公式可得 $EF^2 = BE^2$，即 $(2+1)^2 + (5-a)^2 = 26$，解得：$a = 5 \pm \sqrt{17}$，

∴点 F 的坐标为 $(-1, 5-\sqrt{17})$ 或 $(-1, 5+\sqrt{17})$；

综上所述：当以点 Q，F，E，B 为顶点的四边形是以 BE 为边的菱形，点 F 的坐标为 $(-1, \sqrt{22})$ 或 $(-1, -\sqrt{22})$ 或 $(-1, 5-\sqrt{17})$ 或 $(-1, 5+\sqrt{17})$；

（3）由题意可得如图所示：



连接 OM、DM，由（2）可知点 D 与点 E 关于抛物线的对称轴对称，$B(1,0)$，$\therefore OB=1$，$DM=EM$，

$\because$ 过点 P 作抛物线对称轴的垂线，垂足为 M，$\therefore PM=OB=1, PM//OB$，

$\therefore$ 四边形 $BOMP$ 是平行四边形，$\therefore OM=BP$，$\therefore EM+MP+PB=DM+MO+1$，

若使 $EM+MP+PB$ 的值为最小，即 $DM+MO+1$ 为最小，$\therefore$ 当点 D、M、O 三点共线时，

$DM+MO+1$ 的值为最小，此时 OD 与抛物线对称轴的交点为 M，如图所示：

$\because D(-4,5)$，$\therefore OD=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$，

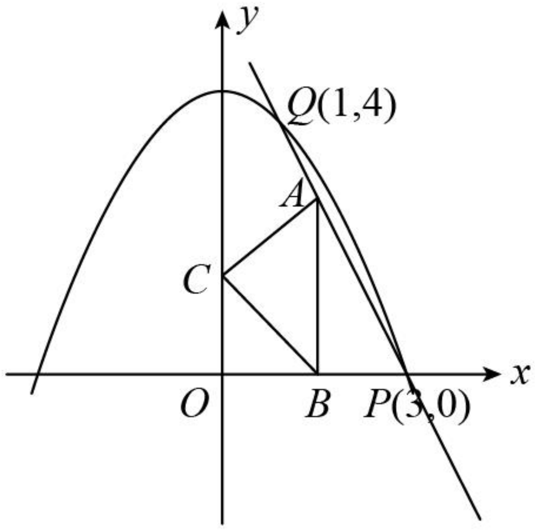
$\therefore DM+MO+1$ 的最小值为 $\sqrt{41}+1$，即 $EM+MP+PB$ 的最小值为 $\sqrt{41}+1$，

设线段 OD 的解析式为 $y=kx$，代入点 D 的坐标得：$k=-\dfrac{5}{4}$，

$\therefore$ 线段 OD 的解析式为 $y=-\dfrac{5}{4}x$，$\therefore M\left(-1,\dfrac{5}{4}\right)$.

【点睛】本题主要考查二次函数的综合、菱形的性质及轴对称的性质，熟练掌握二次函数的综合、菱形的性质及轴对称的性质是解题的关键.

2.（2021·上海中考真题）已知抛物线 $y=ax^2+c(a\neq 0)$ 过点 $P(3,0),Q(1,4)$．



（1）求抛物线的解析式；（2）点 A 在直线 PQ 上且在第一象限内，过 A 作 $AB\perp x$ 轴于 B，以 AB 为斜边在其左侧作等腰直角 ABC．①若 A 与 Q 重合，求 C 到抛物线对称轴的距离；②若 C 落在抛物线上，求 C 的坐标．

【答案】（1） $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}$；（2）①1；②点 C 的坐标是 $\left(-2,\frac{5}{2}\right)$

【分析】(1)将 $P(3,0)$、$Q(1,4)$ 两点分别代入 $y=ax^2+c$，得 $\begin{cases}9a+c=0,\\ a+c=4,\end{cases}$，解方程组即可；

（2）①根据 AB=4，斜边上的高为 2，Q 的横坐标为 1，计算点 C 的横坐标为-1，即到 y 轴的距离为 1；②根据直线 PQ 的解析式，设点 A（m，-2m+6），三角形 ABC 是等腰直角三角形，用含有 m 的代数式表示点 C 的坐标，代入抛物线解析式求解即可．

【详解】解：（1）将 $P(3,0)$、$Q(1,4)$ 两点分别代入 $y=ax^2+c$，得 $\begin{cases}9a+c=0,\\ a+c=4,\end{cases}$

解得 $a=-\frac{1}{2},c=\frac{9}{2}$．所以抛物线的解析式是 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}$．

（2）①如图 2，抛物线的对称轴是 y 轴，当点 A 与点 $Q(1,4)$ 重合时，$AB=4$，作 $CH\perp AB$ 于 H．

∵ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，∴ $\triangle CBH$ 和 $\triangle CAH$ 也是等腰直角三角形，

∴ $CH=AH=BH=2$，∴点 C 到抛物线的对称轴的距离等于 1．

的关键.

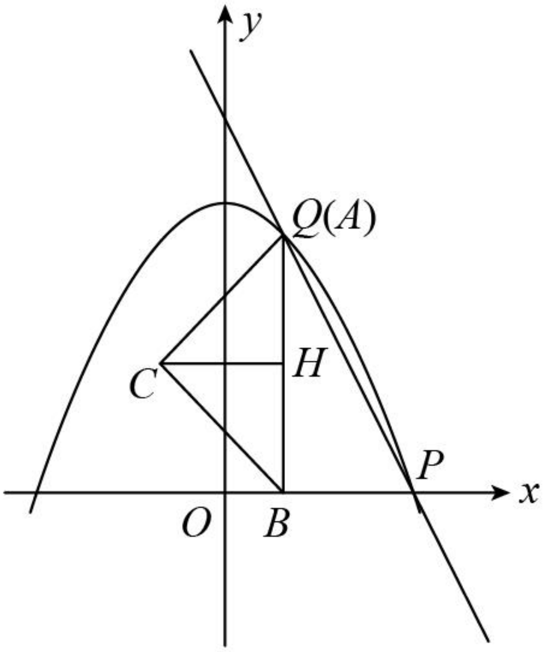


图2

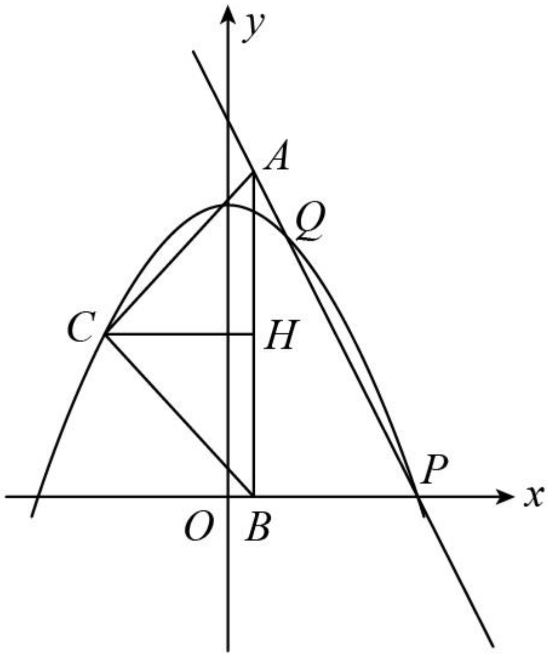


图3

②如图 3，设直线 PQ 的解析式为 $y=kx+b$，由 $P(3,0)$、$Q(1,4)$，得 $\begin{cases}3k+b=0,\\ k+b=4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-2,\\ b=6,\end{cases}$ ∴直线 PQ 的解析式为 $y=-2x+6$，

设 $A(m,-2m+6)$，∴ $AB=-2m+6$，所以 $CH=BH=AH=-m+3$.

所以 $y_C=-m+3,x_C=-(-m+3-m)=2m-3$. 将点 $C(2m-3,-m+3)$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{2}$，

得 $-m+3=-\frac{1}{2}(2m-3)^2+\frac{9}{2}$. 整理，得 $2m^2-7m+3=0$. 因式分解，得 $(2m-1)(m-3)=0$.

解得 $m=\frac{1}{2}$，或 $m=3$（与点 P 重合，舍去）.

当 $m=\frac{1}{2}$ 时，$2m-3=1-3=-2,-m+3=-\frac{1}{2}+3=\frac{5}{2}$. 所以点 C 的坐标是 $\left(-2,\frac{5}{2}\right)$.

【点评】本题考查了抛物线解析式的确定，一次函数解析式的确定，等腰直角三角形的性质，一元二次方程的解法，熟练掌握待定系数法，灵活用解析式表示点的坐标，熟练解一元二次方程是解题的关键.

3.（2021·内蒙古呼伦贝尔市·中考真题）如图，直线 $y=x+2$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+6(a\neq0)$ 相

交于点 $A\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$ 和点 $B(4,m)$，抛物线与 x 轴的交点分别为 H，K（点 H 在点 K 的左侧）．点 F 在线段 AB 上运动（不与点 A、B 重合），过点 F 作直线 $FC\perp x$ 轴于点 P，交抛物线于点 C.

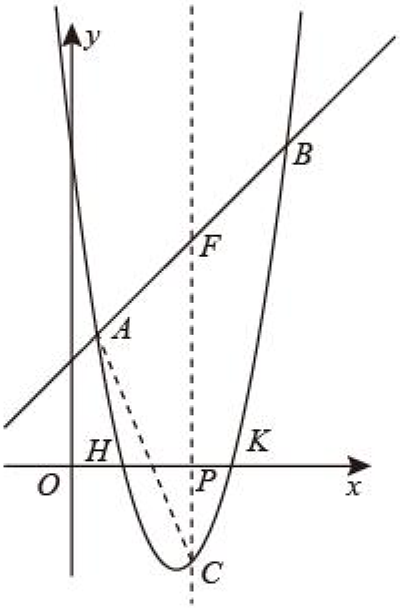


图1

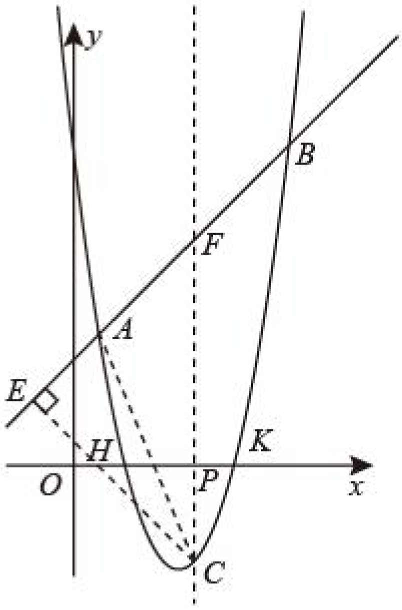


图2

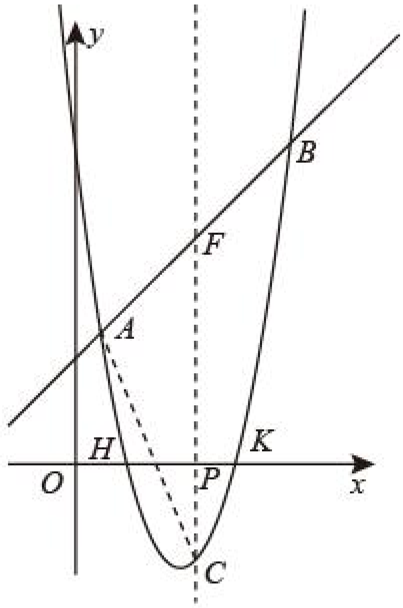


图3

（1）求抛物线的解析式；（2）如图 1，连接 AC，是否存在点 F，使 $\triangle FAC$ 是直角三角形？若存在，求出点 F 的坐标；若不存在，说明理由；（3）如图 2，过点 C 作 $CE\perp AB$ 于点 E，当 $\triangle CEF$ 的周长最大时，过点 F 作任意直线 l，把 $\triangle CEF$ 沿直线 l 翻折 $180°$，翻折后点 C 的对应点记为点 Q，求出当 $\triangle CEF$ 的周长最大时，点 F 的坐标，并直接写出翻折过程中线段 KQ 的最大值和最小值．

【答案】（1）$y=2x^2-8x+6$；（2）存在 $F(3,5)$ 或 $F(\frac{7}{2},\frac{11}{2})$，理由见解析；（3）$F(\frac{9}{4},\frac{17}{4})$

KQ 最大值为 $\frac{49}{8}+\frac{\sqrt{298}}{4}$，最小值为 $\frac{49}{8}-\frac{\sqrt{298}}{4}$

【分析】（1）根据题意，将 $B(4,m)$ 代入直线解析式求得 B 点的坐标，将 A，B 坐标代入二次函数解析式，待定系数法求解析式即可；（2）先证明 $\triangle AFC$ 为等腰直角三角形，分情况讨论①当 FC 为斜边时，设 $F(m,m+2)$，则 $C(m,2m^2-8m+6)$，根据 $FC=\sqrt{2}AF$ 求得 F 点的坐标；②FA 为斜边时：$AC\perp CF$，根据 $AC//x$ 轴求得 F 点的坐标；（3）$\triangle EFC$ 是等腰直角三角形，当 FC 最大时，$\triangle EFC$ 的周长最大，求得 F 点的坐标；过点 F 作任意直线 l，把 $\triangle CEF$ 沿直线 l 翻折 $180°$，翻折后点 C 的对应点记为点 Q

根据题意点 Q 在以 F 为圆心，FC 为半径的圆上，根据 $QK_{\max}=FC+FK$ $QK_{\min}=FC-FK$ 求得

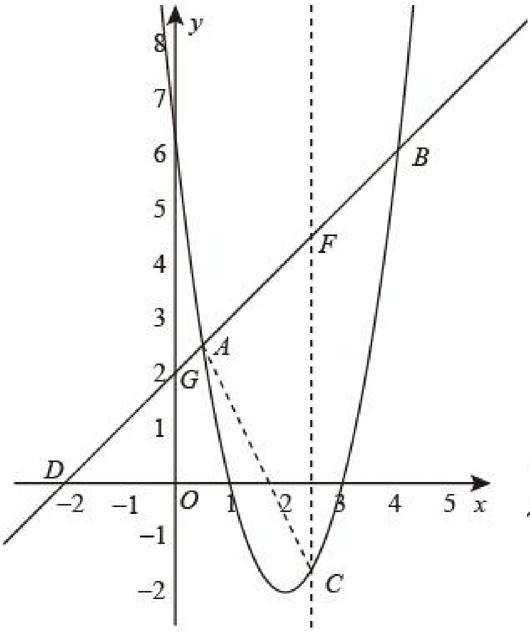
最值

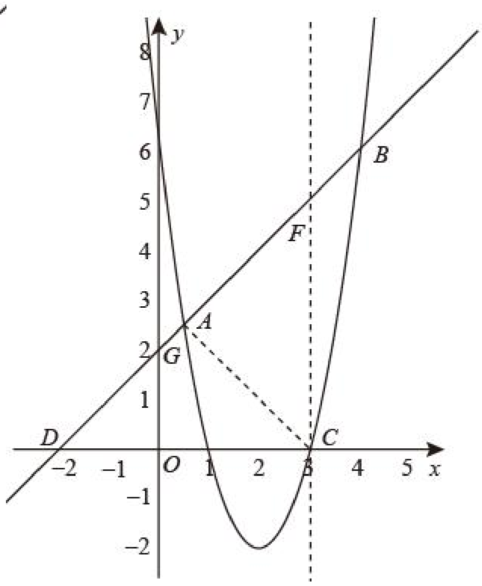
【详解】（1）$\because$ 由题意 $y=x+2$ 过点 $B\left(4,m\right)$ 则：$m=4+2=6\ \therefore B(4,6)$

将 $A\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$，$B(4,6)$ 代入 $y=ax^2+bx+6$，得：$\begin{cases}6=16a+4b+6\\ \frac{5}{2}=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+6\end{cases}$

解得：$\begin{cases}a=2\\ b=-8\end{cases}\ \therefore\ y=2x^2-8x+6$

（2）存在，理由如下





设直线 AB 与 x 轴交于点 D，与 y 轴交于点 G

$\because\ y=x+2$ 过点 D，G　令 $y=0,x=-2$，令 $x=0,y=2$

$\therefore D(-2,0)$，$G(0,2)$ $\therefore\triangle ODG$ 是等腰直角三角形 $\therefore\angle GDO=45°$

$\because\ \triangle FAC$ 是直角三角形设 $F(m,m+2)$，则 $C(m,2m^2-8m+6)$

$\because FC\perp x$ 轴 $\therefore FC//$y 轴　$\angle AFC=45°\ \therefore AC$ 不可能为斜边 $\therefore\ \triangle AFC$ 是等腰直角三角形

①当 FC 为斜边时：$AC\perp AB\ \ \therefore\ FC=\sqrt{2}AF\ \therefore FC^2=2AF^2$

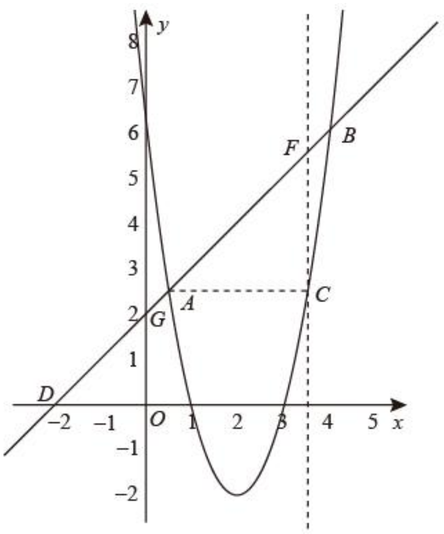
$\because\ A\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)\therefore$ FC $=m+2-2m^2+8m-6=-2m^2+9m-4$

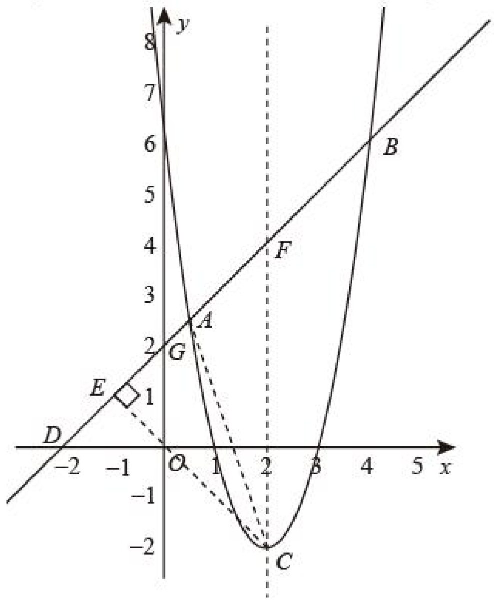
$AF^2=(m-\frac{1}{2})^2+(m+2-\frac{5}{2})^2=2m^2-2m+\frac{1}{2}$ 即 $(-2m^2+9m-4)^2=4m^2-4m+1$，

解得：$m_1=3, m_2=\frac{1}{2}$（与点 A 重合）$\therefore F(3,5)$

②当 FA 为斜边时：$AC\perp CF$　$\because FC\perp x$ 轴 $\therefore AC//x$ 轴 $\therefore 2m^2-8m+6=\frac{5}{2}$

解得：$m_1=\frac{7}{2}, m_2=\frac{1}{2}$（与点 A 重合）$\therefore F(\frac{7}{2},\frac{11}{2})$





（3）如图：由（2）可知 $\angle EFC=45°$　$\because CE\perp AB$ $\triangle EFC$ 是等腰直角三角形

$\therefore EF=EC=\sin 45°\times FC=\frac{\sqrt{2}}{2}FC$ $\therefore$ $\triangle EFC$ 的周长等于 $EF+EC+FC=(1+\sqrt{2})FC$

当 FC 最大时，$\triangle EFC$ 的周长最大　设 $F(n,n+2)$（$\frac{1}{2}<n<6$），则 $C(n,2n^2-8n+6)$，则

$FC=n+2-2n^2+8n-6=-2n^2+9n-4=-2(n-\frac{9}{4})^2+\frac{49}{8}$

当 $n=\frac{9}{4}$ 时，FC 取得最大值 $\frac{49}{8}$　$\therefore F(\frac{9}{4},\frac{17}{4})$

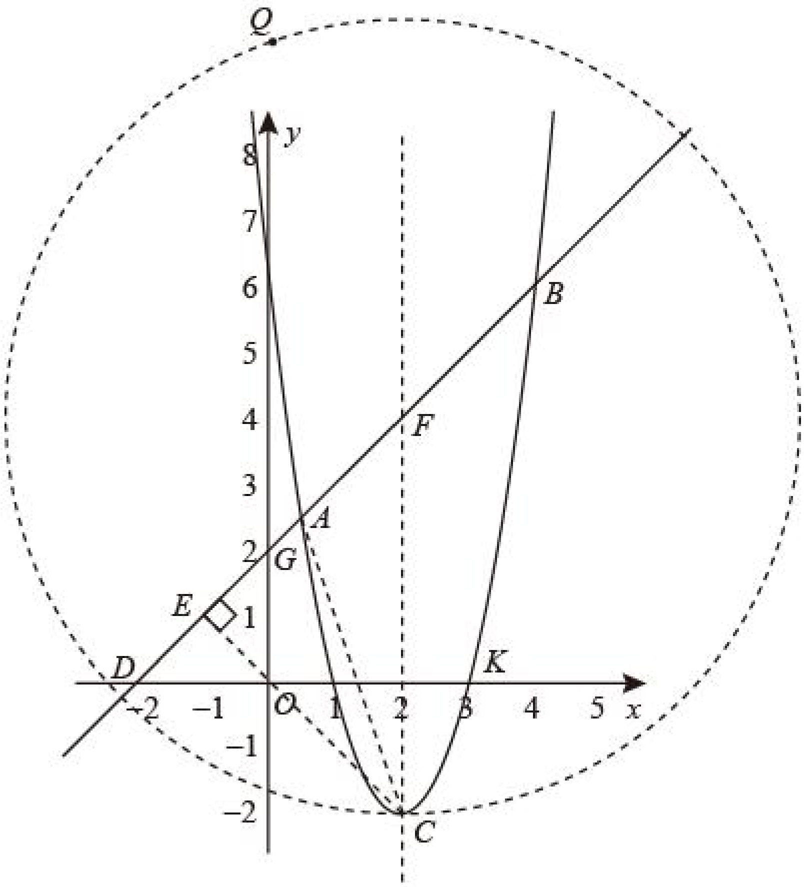
过点 F 作任意直线 l，把 $\triangle CEF$ 沿直线 l 翻折 $180°$　翻折后点 C 的对应点记为点 Q

根据题意点 Q 在以 F 为圆心，FC 为半径的圆上　$y=2x^2-8x+6$，令 $y=0$

$2x^2-8x+6=0$ 解得：$x_1=1, x_2=3$ 根据题意，点 H 在点 K 的左侧，$\therefore K(3,0)$

$\because F(\frac{9}{4},\frac{17}{4})$　$FK=\sqrt{(\frac{9}{4}-3)^2+(\frac{17}{4})^2}=\frac{\sqrt{298}}{4}$　$QK_{\max}=FC+FK=\frac{49}{8}+\frac{\sqrt{298}}{4}$

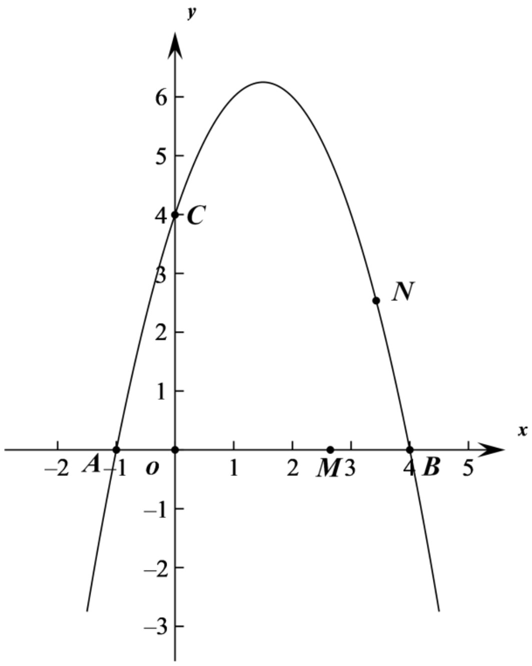
$QK_{\min}=FC-FK=\frac{49}{8}-\frac{\sqrt{298}}{4}$

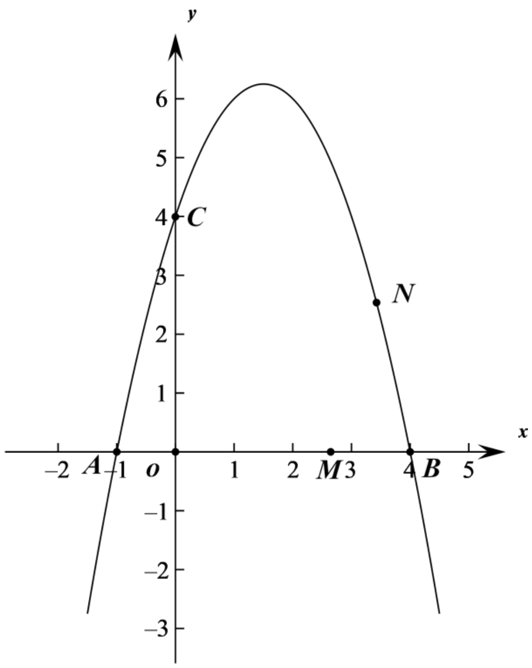


【点睛】本题考查了待定系数法求二次函数解析式，一次函数与二次函数综合，勾股定理，图形的旋转，锐角三角函数，等腰三角形性质，圆的性质，二次函数最值问题，综合运用以上知识是解题的关键.

4.（2021 •湖南湘西土家族苗族自治州 •中考真题）如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+4$ 经过 $A(-1,0)$，$B(4,0)$ 两点，交 y 轴于点 C.（1）求抛物线的解析式；（2）连接 BC，求直线 BC 的解析式；（3）请在抛物线的对称轴上找一点 P，使 $AP+PC$ 的值最小，求点 P 的坐标，并求出此时 $AP+PC$ 的最小值；

（4）点 M 为 x 轴上一动点，在抛物线上是否存在一点 N，使得以 A、C、M、N 四点为顶点的四边形是平行四边形？若存在，求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由.





备用图

【答案】(1) $y=-x^2+3x+4$；(2) 直线 BC 的解析式为 $y=-x+4$；(3) $P\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$，此时 $AP+PC$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$；(4) 存在，$N(3,4)$ 或 $\left(\frac{3\pm\sqrt{41}}{2},-4\right)$.

【分析】(1) 把点 A、B 的坐标代入求解即可；(2) 设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$，然后把点 B、C 的坐标代入求解即可；(3) 由题意易得点 A、B 关于抛物线的对称轴对称，根据轴对称的性质可得 $AP+PC=BP+PC$，要使 $AP+PC$ 的值为最小，则需满足点 B、P、C 三点共线时，即为 BC 的长，然后问题可求解；(4) 由题意可设点 $M(m,0),N(n,-n^2+3n+4)$，然后可分①当 AC 为对角线时，②当 AM 为对角线时，③当 AN 为对角线时，进而根据平行四边形的性质及中点坐标公式可进行求解.

【详解】解：(1) ∵抛物线 $y=ax^2+bx+4$ 经过 $A(-1,0)$，$B(4,0)$ 两点，

∴$\begin{cases} a-b+4=0 \\ 16a+4b+4=0 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \end{cases}$，∴抛物线的解析式为 $y=-x^2+3x+4$；

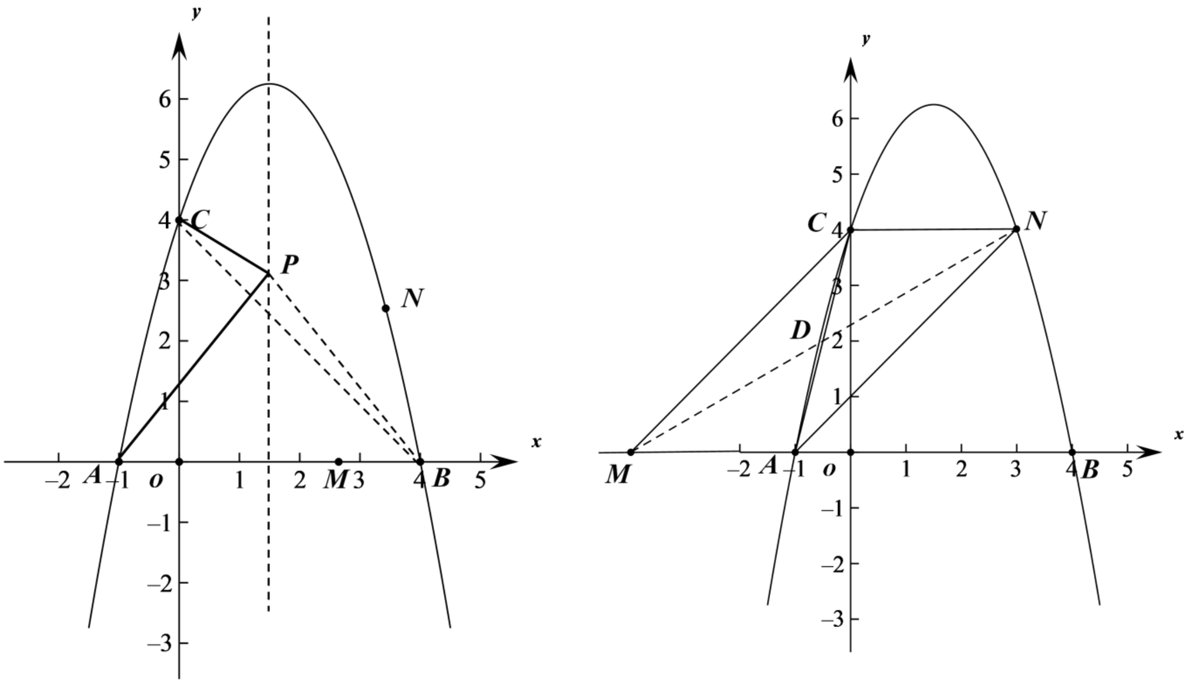
(2) 由 (1) 可得抛物线的解析式为 $y=-x^2+3x+4$，

∵抛物线与 y 轴的交点为 C，∴$C(0,4)$，

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+b$，把点 B、C 的坐标代入得：

$\begin{cases} 4k+b=0 \\ b=4 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} k=-1 \\ b=4 \end{cases}$，∴直线 BC 的解析式为 $y=-x+4$；

（3）由抛物线 $y=-x^2+3x+4$ 可得对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}$，由题意可得如图所示：



连接 BP、BC，∵点 A、B 关于抛物线的对称轴对称，∴ $AP=BP$，∴ $AP+PC=BP+PC$，

要使 $AP+PC$ 的值为最小，则需满足点 B、P、C 三点共线时，即为 BC 的长，此时 BC 与对称轴的交点即为所求的 P 点，∵ $OC=OB=4$，∴ $BC=4\sqrt{2}$，∴ $AP+PC$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$，

∵点 P 在直线 BC 上，∴把 $x=\frac{3}{2}$ 代入得：$y=-\frac{3}{2}+4=\frac{5}{2}$，∴ $P\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$；

（4）存在，理由如下：由题意可设点 $M(m,0),N(n,-n^2+3n+4)$，$A(-1,0),C(0,4)$，当以 A、C、M、N 四点为顶点的四边形是平行四边形，则可分：

①当 AC 为对角线时，如图所示：连接 MN，交 AC 于点 D，

∵四边形 $ANCM$ 是平行四边形，∴点 D 为 AC、MN 的中点，

∴根据中点坐标公式可得：$\begin{cases} x_A+x_C=x_M+x_N \\ y_A+y_C=y_M+y_N \end{cases}$，即 $\begin{cases} -1+0=m+n \\ 0+4=0-n^2+3n+4 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} m=-4 \\ n=3 \end{cases}$，∴ $N(3,4)$；

②当 AM 为对角线时，同理可得：

$\begin{cases} x_A+x_M=x_C+x_N \\ y_A+y_M=y_C+y_N \end{cases}$，即 $\begin{cases} -1+m=0+n \\ 0+0=4-n^2+3n+4 \end{cases}$，解得：$n=\frac{3\pm\sqrt{41}}{2}$，∴ $N\left(\frac{3\pm\sqrt{41}}{2},-4\right)$；

③当 AN 为对角线时，同理可得：$\begin{cases} x_A+x_N=x_M+x_C \\ y_A+y_N=y_M+y_C \end{cases}$，即 $\begin{cases} -1+n=m+0 \\ 0-n^2+3n+4=4+0 \end{cases}$，

解得：$n=3$，$\therefore N(3,4)$；

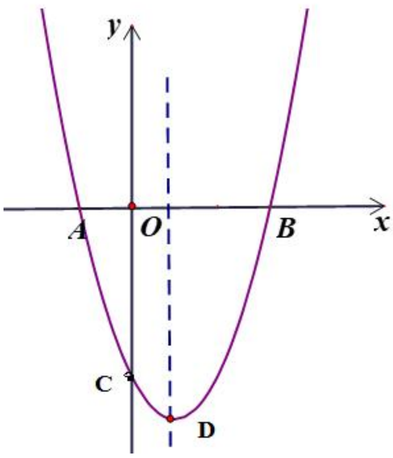
$\therefore$ 综上所述：当以 A、C、M、N 四点为顶点的四边形是平行四边形，点 N 的坐标为 $(3,4)$ 或 $\left(\frac{3\pm\sqrt{41}}{2},-4\right)$.

【点睛】本题主要考查二次函数的综合，熟练掌握二次函数的性质与图象是解题的关键.

5.（2021·贵州黔东南苗族侗族自治州·中考真题）如图，抛物线 $y=ax^2-2x+c\left(a\neq 0\right)$ 与 x 轴交于 A、B（3，0）两点，与 y 轴交于点 C（0，－3），抛物线的顶点为 D.

（1）求抛物线的解析式；（2）点 P 在抛物线的对称轴上，点 Q 在 x 轴上，若以点 P、Q、B、C 为顶点，BC 为边的四边形为平行四边形，请直接写出点 P、Q 的坐标；

（3）已知点 M 是 x 轴上的动点，过点 M 作 x 的垂线交抛物线于点 G，是否存在这样的点 M，使得以点 A、M、G 为顶点的三角形与△BCD 相似，若存在，请求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.



【答案】（1）$y=x^2-2x-3$；（2）点 $P(1,-3)$ 或 $P(1,3)$、点 $Q(4,0)$ 或点 $Q(-2,0)$；（3）存在，M（0，0）或 M（$\frac{8}{3}$，0）或 M（6，0）或 M（$\frac{10}{3}$，0）

【分析】（1）根据二次函数表达式和已知坐标点代入计算即可，（2）以点 P、Q、B、C 为顶点，BC 为边的四边形为平行四边形，分为两种情况：$P_1Q_1//BC$ 或 $P_2Q_2//BC$，根据平行四边形对边相等且平行求解即可，

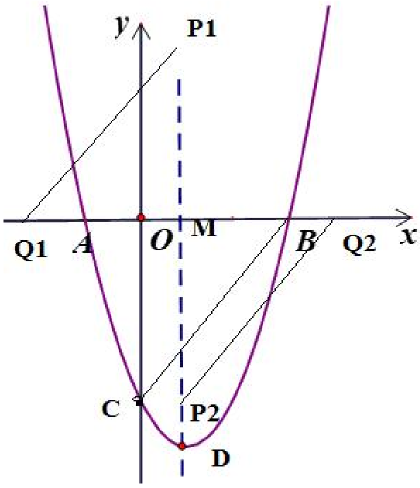
（3）先根据题意求出 A 点坐标和顶点坐标，根据 B，C，D 坐标点得知△BDC 是直角三角形，且∠BCD

$=90^o$，设点 M 得坐标（m,0），则点 G 得坐标为 $\left(m,m^2-2m-3\right)$，根据相似的性质分情况求解即可.

【详解】解：（1）将点 B（3，0），C（0，－3）分别代入 $y=ax^2-2x+c$ 中，

得：$\begin{cases}9a-2\times3+c=0\\ c=-3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\ c=-3\end{cases}$，∴抛物线得函数关系为 $y=x^2-2x-3$

（2）点 $P(1,-3)$ 或 $P(1,3)$、点 $Q(4,0)$ 或点 $Q(-2,0)$．如图：



∵以点 P、Q、B、C 为顶点，BC 为边的四边形为平行四边形，∴ $P_1Q_1//BC$ 或 $P_2Q_2//BC$，

∵点 B（3，0），C（0，－3），

当 $P_1Q_1//BC$ 时，则 $P_1Q_1=BC$，设对称轴与 x 轴交于点 M，

∴ $\mathrm{P_1M}=OC=3$，$\mathrm{MQ_1}=OB=3$，∴ $P_1(1,3),Q_1(-2,0)$；同理 $P_2Q_2//BC$ 时，$P_2(1,-3),Q_2(4,0)$；

故答案为：$P_1(1,3),Q_1(-2,0)$；$P_2(1,-3),Q_2(4,0)$.

（3）当 $y=0$ 时，$x^2-2x-3=0$，解得：$x_1=-1$，$x_2=3$，∴A（－1，0）

又 $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$，∴抛物线得顶点 D 得坐标为（1，－4）

∵C（0，－3）、B（3，0）、D（1，－4）∴ $BD^2+2^2+4^2=20$，$CD^2=1^2+1^2$，$BC^2=3^2+3^2$，

∴ $BD^2=CD^2+BC^2$ ∴△BDC 是直角三角形，且∠$BCD=90^o$

设点 M 得坐标（m,0），则点 G 得坐标为 $\left(m,m^2-2m-3\right)$，根据题意知：∠AMG=∠$BCD=90^o$

∴要使以 A、M、G 为顶点得三角形与△BCD 相似，需要满足条件：$\frac{AM}{MG}=\frac{BC}{CD}$或$\frac{AM}{MG}=\frac{CD}{BC}$

①当$m<-1$时，此时有：$\frac{-1-m}{m^2-2m-3}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$或$\frac{-1-m}{m^2-2m-3}=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$

解得：$m_1=\frac{8}{3}$，$m_2=-1$或$m_1=0$，$m_2=-1$，都不符合$m<-1$，所以$m<-1$时无解.

②当$-1<m\leq 3$时，此时有：$\frac{m+1}{-\left(m^2-2m-3\right)}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$或$\frac{m+1}{-\left(m^2-2m-3\right)}=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$

解得：$m_1=\frac{8}{3}$，$m_2=-1$（不符合要求，舍去）或$m_1=0$，$m_2=-1$（不符合要求，舍去），所以 M（$\frac{8}{3}$,0）或 M（0，0）

③当 $m>3$ 时，此时有：$\frac{m+1}{m^2-2m-3}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$或$\frac{m+1}{m^2-2m-3}=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$

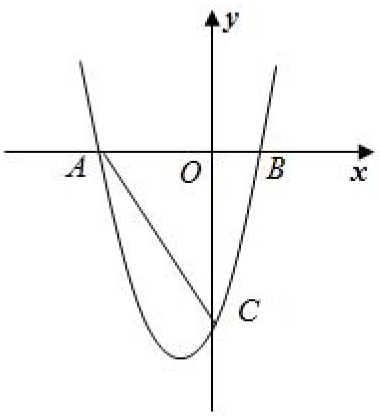
解得：$m_1=\frac{10}{3}$，$m_2=-1$（不符合要求，舍去）或$m_1=6$，$m_2=-1$（不符要求，舍去）

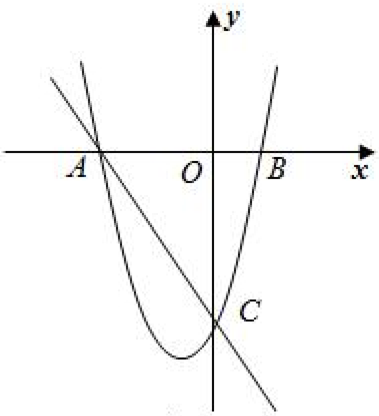
所以点 M（6，0）或 M（$\frac{10}{3}$，0）

答：存在点 M，使得 A、M、G 为顶点得三角形与△BCD 相似，点 M 得坐标为：M（0，0）或 M（$\frac{8}{3}$，0）或 M（6，0）或 M（$\frac{10}{3}$，0）.

【点睛】此题考查二次函数相关知识，综合性较强，涵盖平行四边形性质和三角形相似及勾股定理，有一定难度.

6.（2021·内蒙古鄂尔多斯市·中考真题）如图，抛物线$y=x^2+2x-8$与 x 轴交于 A，B 两点（点 A 在点 B 左侧），与 y 轴交于点 C.





备用图

（1）求 A，B，C 三点的坐标；（2）连接 AC，直线 $x=m\left(-4<m<0\right)$ 与该抛物线交于点 E，与 AC 交于点 D，连接 OD．当 $OD\perp AC$ 时，求线段 DE 的长；

（3）点 M 在 y 轴上，点 N 在直线 AC 上，点 P 为抛物线对称轴上一点，是否存在点 M，使得以 C、M、N、P 为顶点的四边形是菱形？若存在，请直接写出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由．

【答案】(1) A（-4, 0），B（2, 0），C（0，-8）；（2）$DE=\dfrac{64}{25}$；（3）存在，M$(0,-8+\sqrt{5})$、$(0,-8-\sqrt{5})$、$(0,-12)$

【分析】(1) 分别令 x=0、y=0 即可求出 A，B，C 三点的坐标；

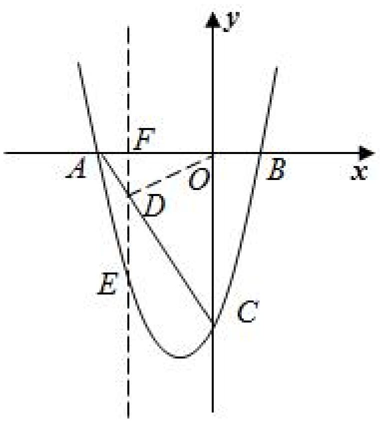
（2）先求出 AC 解析式，用 m 表示出 DE 坐标，最后根据 $OD\perp AC$ 求出 m 的值即可；

（3）考虑到 CM 都在 y 轴上，根据 CM 为菱形的边和 CM 为菱形的对角线分两种情况讨论即可．

【详解】(1) 令 x=0 得 $y=-8$，∴C 点坐标（0，-8）

令 y=0 得：$x^2+2x-8=0$ 解得：$x_1=-4,x_2=2$ ∴A（-4, 0），B（2, 0）

（2）设 DE 交 x 轴于 F，



设 AC 解析式为 $y=kx+b$，代入 AC 坐标得：

$\begin{cases}0=-4k+b\\-8=b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=-2\\b=-8\end{cases}$ ∴AC 解析式为 $y=-2x-8$

∵直线 $x=m\left(-4<m<0\right)$ 与该抛物线交于点 E，与 AC 交于点 D

∴ $D(m,-2m-8),E(m,m^2+2m-8),F(m,0)$ ∴ $OF=-m,DF=2m+8,DE=-m^2-4m$

∵ $OD\perp AC$ ∴ $\angle AOF=\angle ACO$ ∴ $\triangle FOD\sim\triangle OCA$ ∴ $\dfrac{OF}{DF}=\dfrac{OC}{OA}$ ∴ $\dfrac{-m}{2m+8}=\dfrac{8}{4}$

解得 $m=-\dfrac{16}{5}$ ∴ $DE=-m^2-4m=\dfrac{64}{25}$

（3）抛物线 $y=x^2+2x-8$ 对称轴为 $x=-1$

∵点 M 在 y 轴上，点 N 在直线 AC 上，点 P 为抛物线对称轴上一点

∴设 $P(-1,p),N(n,-2n-8),M(0,t)$

当 CM 菱形的边时，则 $CM//PN$，$CM=CN$ ∴N 在对称轴上，即 $n=-1$ ∴ $N(-1,-6)$,

∴ $CN=\sqrt{(-1)^2+(-8+6)^2}=CM=|-8-t|$ 解得 $t=-8\pm\sqrt{5}$

此时 M 点坐标为 $(0,-8+\sqrt{5})$、$(0,-8-\sqrt{5})$

当 CM 为菱形的对角线时，此时 NP 关于 CM 对称，即 NP 关于 y 轴对称

∴ $n=1$ ∴ $N(1,-10),P(-1,-10)$

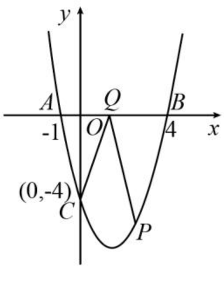
∵菱形对角线互相垂直平分∴NP 中点与 CM 中点是同一个点

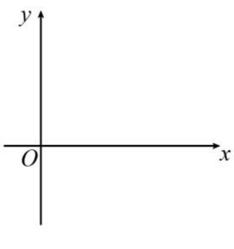
∴ $\dfrac{t+(-8)}{2}=-10$ 解得 $t=-12$ 此时 M 点坐标为 $(0,-12)$

综上所述，存在 $M(0,-8+\sqrt{5})$、$(0,-8-\sqrt{5})$、$(0,-12)$ 使得以 C、M、N、P 为顶点的四边形是菱形.

【点睛】本题考查了二次函数的综合题：熟练掌握二次函数图象上点的坐标特征、二次函数的性质和菱形的性质；会利用相似三角形处理垂直.

7.（2021·山东菏泽市·中考真题）如图，在平面直角坐标系中，已知抛物线 $y=ax^2+bx-4$ 交 x 轴于 $A(-1,0)$，$B(4,0)$ 两点，交 y 轴于点 C.





（1）求该抛物线的表达式；（2）点 P 为第四象限内抛物线上一点，连接 PB，过点 C 作 $CQ//BP$ 交 x 轴于点 Q，连接 PQ，求△PBQ 面积的最大值及此时点 P 的坐标；（3）在（2）的条件下，将抛物线 $y=ax^2+bx-4$ 向右平移经过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 时，得到新抛物线 $y=a_1x^2+b_1x+c_1$，点 E 在新抛物线的对称轴上，在坐标平面内是否存在一点 F，使得以 A、P、E、F 为顶点的四边形为矩形，

若存在，请直接写出点 F 的坐标；若不存在，请说明理由．

参考：若点 $P_1\left(x_1,y_1\right)$、$P_2\left(x_2,y_2\right)$，则线段 P_1P_2 的中点 P_0 的坐标为 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

【答案】（1）该抛物线的表达式为：$y=x^2-3x-4$；（2）$\triangle PBQ$ 面积最大值为 8，此时 P 点的坐标为：P（2，-6）；（3）$F\left(-2,-3+\sqrt{5}\right)$ 或 $F\left(-2,-3-\sqrt{5}\right)$ 或 $F\left(6,-4\right)$ 或 $F\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

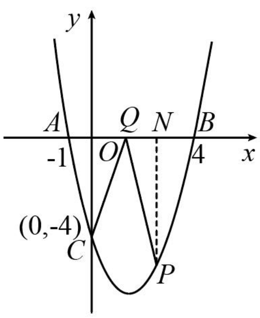
【分析】（1）将两个点分别代入抛物线可得关于 a，b 的二元一次方程组，可解得 a，b；

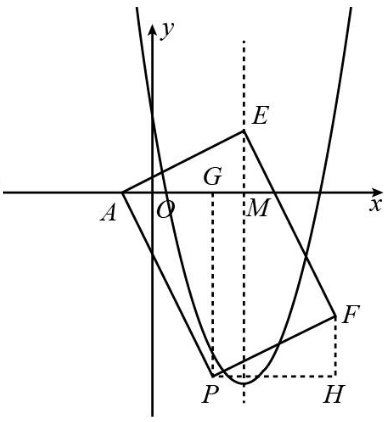
（2）设出 P、Q 两点坐标，应用三角形相似，及三角形面积公式，代入化简可得一个二次函数，求其最大值即可；（3）抛物线的平移可确定抛物线解析式及对称轴，设出点 E、F，应用中点坐标公式及矩形特点分成的三角形为直角三角形，可得出答案．

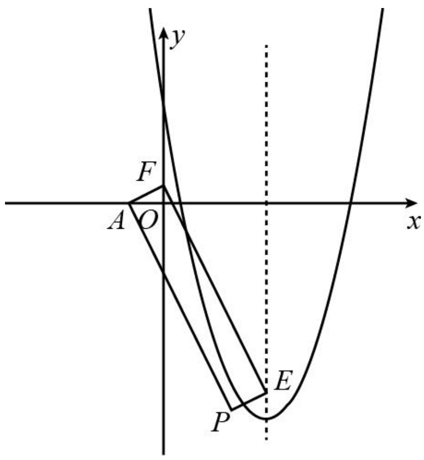
【详解】解：（1）将 A（-1，0），B（4，0）代入抛物线 $y=ax^2+bx-4$ 可得：

$\begin{cases} a-b-4=0 \\ 16a+4b-4=0 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$，∴该抛物线的表达式为：$y=x^2-3x-4$；

（2）过点 P 作 $PN\perp x$ 轴于点 N，如图所示：







设 $P\left(x_1,y_1\right)$ 且 $(0<x_1<4,y_1<0)$，$Q\left(x_2,0\right)$，∴ $OQ=x_2$，$BN=4-x_1,PN=-y_1$，$OC=4$，

∵ $CQ//BP$，∴ $\triangle COQ\backsim\triangle PNB$，∴ $\dfrac{OQ}{BN}=\dfrac{OC}{PN}$，即 $\dfrac{x_2}{4-x_1}=\dfrac{4}{-y_1}$，

∴ $x_2=\dfrac{4x_1-16}{y_1}$，∴ $BQ=4-\dfrac{4x_1-16}{y_1}$，∴ $S_{\triangle BPQ}=\dfrac{1}{2}BQ\cdot\left|P_y\right|=\dfrac{1}{2}\times\left(4-\dfrac{4x_1-16}{y_1}\right)\times\left(-y_1\right)$，

∵点 $P\left(x_1,y_1\right)$ 在抛物线上，∴ $y_1=x_1^2-3x_1-4$，∴ $S_{\triangle BPQ}=-2x_1^2+8x_1$，$\left(0<x_1<4\right)$，

根据抛物线的基本性质：对称轴为$x_1=-\frac{b}{2a}=-\frac{8}{2\times(-2)}=2$在$0<x_1<4$内，

∴$S_{\triangle BPQ}$在$x_1=2$取得最大值，代入得：$S_{\triangle BPQ}=8$，

当$x_1=2$时，$y_1=2^2-3\times2-4=-6$，∴$\triangle PBQ$面积的最大值为8，此时点P的坐标为：$P(2,-6)$.

（3）在（2）的条件下，原抛物线解析式为$y=x^2-3x-4$，将抛物线向右平移经过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$，可知抛物线向右平移了$\frac{3}{2}$个单位长度，∴可得：$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-3\left(x-\frac{3}{2}\right)-4$，

化简得平移后的抛物线：$y=x^2-6x+\frac{11}{4}$，对称轴为：$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times1}=3$，

由（2）得：A（-1，0），$P(2,-6)$，点E在对称轴上，∴设E（3，e），点F（m，n），矩形$AEPF$，

当以AP为矩形的对角线时，则AP的中点坐标为：$\left(\frac{-1+2}{2},\frac{0-6}{2}\right)$，$EF$的中点坐标为：$\left(\frac{3+m}{2},\frac{e+n}{2}\right)$，

根据矩形的性质可得，两个中点坐标相同，可得：$\begin{cases}\frac{-1+2}{2}=\frac{3+m}{2}\\ \frac{0-6}{2}=\frac{e+n}{2}\end{cases}$解得：$\begin{cases}m=-2 & ①\\ e+n=-6 & ②\end{cases}$

∵矩形$AEPF$，∴$\triangle AEF$为直角三角形，∴$AE^2+AF^2=EF^2$，③

$AE^2=(-1-3)^2+(0-e)^2$，$AF^2=(m-(-1))^2+(n-0)^2$，$EF^2=(m-3)^2+(n-e)^2$，

代入③化简可得：$en=4$，④ ∴将②代入④可得：$(-6-n)n=4$，化简得：$n^2+6n+4=0$，

根据判别式得：$b^2-4ac=6^2-4\times1\times4>0$，∴$n_1=-3+\sqrt{5}$，$n_2=-3-\sqrt{5}$

∴$F\left(-2,-3+\sqrt{5}\right)$或$F\left(-2,-3-\sqrt{5}\right)$；当以$AP$为矩形的边时，如图所示：

过点P分别作$PG\perp x$轴于点G，$PH\parallel x$轴，过点F作PH的垂线，垂足为H，设抛物线的对称轴与x轴的交点为M，如图，∴$AG=3,PG=6$，$\angle AGP=\angle EMA=\angle FHP=90°$，$AM$=4，

∴$\tan\angle GAP=\frac{GP}{AG}=2$，∵四边形$APFE$是矩形，∴$\angle EAP=\angle APF=90°$，$AE$=$PF$，

$\therefore \angle GAP+\angle APG=\angle GAP+\angle EAM=\angle APG+\angle GPF=\angle FPH+\angle GPF=90^\circ$，

$\therefore \angle EAM=\angle APG=\angle FPH$，$\therefore \triangle AME\cong\triangle PHF(AAS)$，$\therefore AM=PH=4, EM=FH$，

$\because \angle EAM+\angle AEM=90^\circ$，$\therefore \angle AEM=\angle GAP$，$\therefore \tan\angle AEM=\tan\angle GAP=2$，

$\therefore EM=\dfrac{AM}{\tan\angle AEM}=2$，$\therefore FH=2$，$\because$点$P(2,-6)$，$\therefore F(6,-4)$，

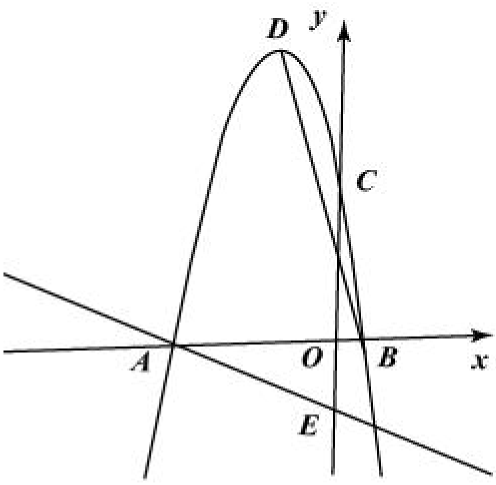
当以 AP 为矩形的边时，如图所示：

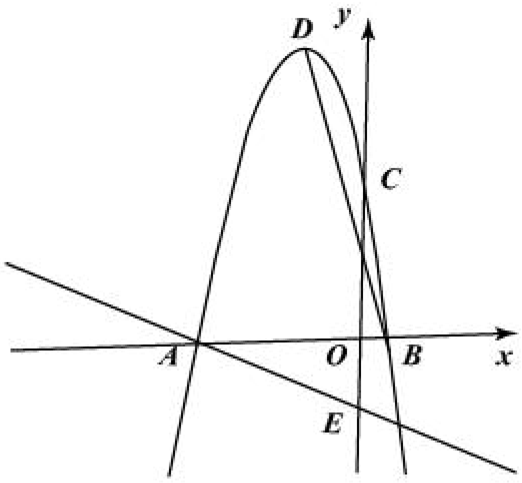
同理可得 $F\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$；综上所述：以 A 、$P$ 、E 、F 为顶点的四边形为矩形，$F\left(-2,-3+\sqrt{5}\right)$或

$F\left(-2,-3-\sqrt{5}\right)$或$F(6,-4)$或$F\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

【点睛】题目考查确定二次函数解析式及其基本性质、矩形的性质、勾股定理等，难点主要是依据图像确定各点、线段间的关系，得出答案．

8.（2021 •黑龙江绥化市 •中考真题）如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+5(a\neq 0)$ 与 x 轴交于点 $A(-5,0)$，点 $B(1,0)$，（点 A 在点 B 的左边），与 y 轴交于点 C，点 D 为抛物线的顶点，连接 BD．直线 $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}$ 经过点 A，且与 y 轴交于点 E．





备用题

（1）求抛物线的解析式；（2）点 N 是抛物线上的一点，当$\triangle BDN$ 是以 DN 为腰的等腰三角形时，求点 N 的坐标；（3）点 F 为线段 AE 上的一点，点 G 为线段 OA 上的一点，连接 FG，并延长 FG 与

线段 BD 交于点 H（点 H 在第一象限）．当 $\angle EFG=3\angle BAE$ 且 $HG=2FG$ 时，求出点 F 的坐标．

【答案】（1）$y=-x^2-4x+5$；（2）$N_1(-5,0)$；

$N_2\left(\dfrac{-13-\sqrt{181}}{6},\dfrac{71-\sqrt{181}}{18}\right)$, $N_3\left(\dfrac{-13+\sqrt{181}}{6},\dfrac{71+\sqrt{181}}{18}\right)$；（3）$F\left(-\dfrac{151}{59},-\dfrac{72}{59}\right)$

【分析】（1）直接利用待定系数法求出 a、b 的值即可得出抛物线解析式；

（2）当 $DB=DN$ 时，根据抛物线对称性可求得 N 的坐标；当 $DN=BN$ 时，N 在 BD 的垂直平分线上，与抛物线产生两个交点，将两点坐标求出即可；

（3）在 AE 上取一点 F，作 AF 的垂直平分线交 x 轴于点 M，连接 MF，则 $AM=MF$，在 AO 上 M 点的右侧作 $FG=MF$，移动 F 点，当 $HG=2FG$ 时，点 F 为所求，过点 F 作 FP 垂直于 x 轴于点 P，过点 H 作 HR 垂直于 x 轴于点 R，则 $\triangle FPG\backsim\triangle HRG$，设 $F(m,-\frac{1}{2}m-\frac{5}{2})$，根据相似三角形性质列比例求解，解出点 F 的坐标即可．

【详解】（1）将 $(-5,0),(1,0)$ 代入 $y=ax^2+bx+5(a\neq 0)$ 得：

$\begin{cases}25a-5b+5=0\\ a+b+5=0\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}a=-1\\ b=-4\end{cases}$ ∴抛物线的解析式 $y=-x^2-4x+5$

（2）顶点 $D(-2,9)$ ①当 $DB=DN$ 时，根据抛物线对称性，A 与 N 重合 $\therefore N_1(-5,0)$

②方法一：如图一 当 $DN=BN$ 时，N 在 BD 的垂直平分线上

如图 BD 的垂直平分线交 BD 于 I，交 x 轴于 Q 点，BD 与 y 轴交点为 K

$\because \angle KBO+\angle OKB=90°$，$\angle KBO+\angle IQB=90°$ $\therefore \angle IQB=\angle OKB$，

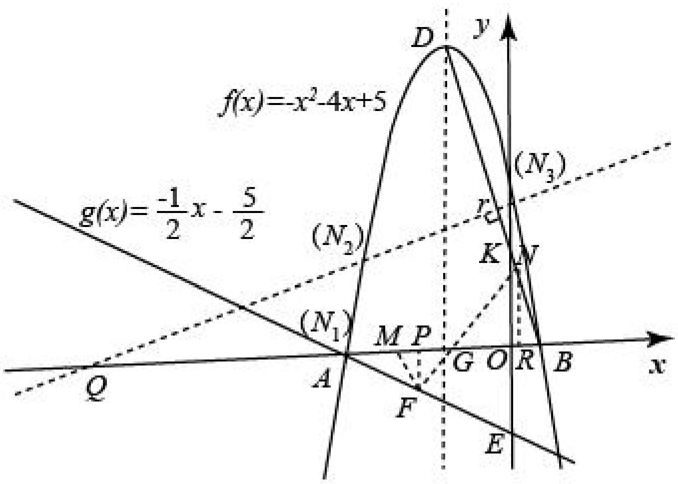
在 $Rt\triangle OKB$ 中，$\sin\angle OKB=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，$\therefore \sin\angle IQB=\dfrac{BI}{BQ}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

$\because I$ 是 BD 的中点，$BD=3\sqrt{10}$，$\therefore BI=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$，$\therefore BQ=15$，$\therefore Q(-14,0)$，$I\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{9}{2}\right)$，

设 $y_{QI}=kx+b$，代入得 $\begin{cases}-14k+b=0\\ -\dfrac{1}{2}k+b=\dfrac{9}{2}\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=\dfrac{1}{3}\\ b=\dfrac{14}{3}\end{cases}$，$\therefore y_{QI}=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{14}{3}$，

联立得，$\begin{cases} y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{14}{3} \\ y=-x^2-4x+5 \end{cases}$，解得 $x=\dfrac{-13\pm\sqrt{181}}{6}$，$\dfrac{1}{3}x+\dfrac{14}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{-13\pm\sqrt{181}}{6}\right)+\dfrac{14}{3}=\dfrac{71\pm\sqrt{181}}{18}$，

$\therefore N_2\left(\dfrac{-13-\sqrt{181}}{6},\dfrac{71-\sqrt{181}}{18}\right)N_3\left(\dfrac{-13+\sqrt{181}}{6},\dfrac{71+\sqrt{181}}{18}\right)$，



图一

方法二：如图二，过 N 作 x 轴垂线交 x 轴于 T，

过 D 作 $DS\perp NT$ 交 NT 于S，设 $N\left(a,-a^2-4a+5\right)D(-2,9)$，

$\because DN=DB$，$\therefore DS^2+SN^2=NT^2+TB^2$，

$(-2-a)^2+(9+a^2+4a-5)^2=(-a^2-4a+5)^2+(1-a)^2$，

$(2+a)^2-(1-a)^2-(2+4a-5)^2-(9+a^2+4a-5)^2$，

$(2+a+1-a)(2+a-1+a)=(a^2+4a-5+a^2+4a+4)(a^2+4a-5-a^2-4a-4)$，

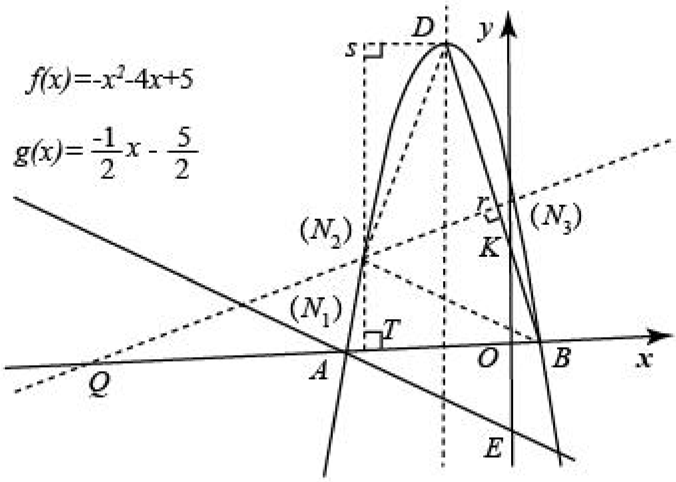
解得：$a=\dfrac{-13\pm\sqrt{181}}{6}$，

把 $a=\dfrac{-13\pm\sqrt{181}}{6}$ 代入，$-a^2-4a+5=-\left(\dfrac{-13\pm\sqrt{181}}{6}\right)^2-4\left(\dfrac{-13\pm\sqrt{181}}{6}\right)+5=\dfrac{71\pm\sqrt{181}}{18}$，

$\therefore N_2\left(\dfrac{-13-\sqrt{181}}{6},\dfrac{71-\sqrt{181}}{18}\right)N_3\left(\dfrac{-13+\sqrt{181}}{6},\dfrac{71+\sqrt{181}}{18}\right)$，

综上 $N_1(-5,0), N_2\left(\dfrac{-13-\sqrt{181}}{6},\dfrac{71-\sqrt{181}}{18}\right)$，

$N_3\left(\dfrac{-13+\sqrt{181}}{6},\dfrac{71+\sqrt{181}}{18}\right)$，



图二

（3）如图一，在 AE 上取一点 F，作 AF 的垂直平分线交 x 轴于点 M，连接 MF，则 $AM=MF$，

在 AO 上 M 点的右侧作 $FG=MF$，$\therefore \angle FGM=\angle FMG$，

$\therefore \angle EFG=\angle BAE+\angle FGM=\angle BAE+\angle FMG=\angle BAE+2\angle BAE=3\angle BAE$，

移动 F 点，当 $HG=2FG$ 时，点 F 为所求.

过点 F 作 FP 垂直于 x 轴于点 P，过点 H 作 HR 垂直于 x 轴于点 R，

$\therefore \triangle FPG\backsim\triangle HRG$，$\therefore \dfrac{PF}{HR}=\dfrac{PG}{RG}=\dfrac{FG}{GH}=\dfrac{1}{2}$，$GR=2PG$，$HR=2PF$，

设 $F(m,-\dfrac{1}{2}m-\dfrac{5}{2})$，$OP=-m$ $PF=\dfrac{1}{2}m+\dfrac{5}{2}$，$HR=2PF=m+5$，

$\because AP=m+5$，$\therefore AP=2PF$，$\because AM=AP-MP=2PF-MP$，$MF=AM$，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle PMF$ 中，$PM^2+PF^2=MF^2$，$PM^2+PF^{2-}(2PF-MP)^2$，

$\therefore PM=\dfrac{3}{4}PF=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{m+5}{2}=\dfrac{3}{8}m+\dfrac{15}{8}$，$\therefore GP=\dfrac{3}{8}m+\dfrac{15}{8}$，$\therefore GR=2PG=\dfrac{3}{4}m+\dfrac{15}{4}$，

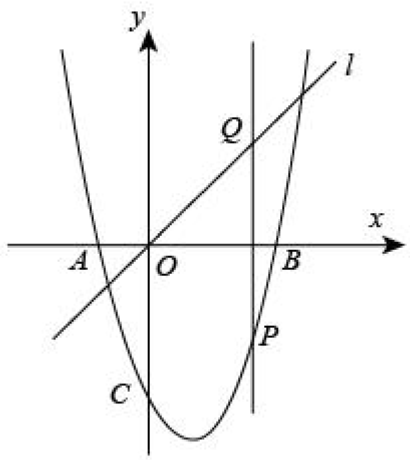
$\therefore PR=3PG=3PM$，$\therefore AR=AP+PR=AP+3PM=2PF+3\times\dfrac{3}{4}PF=\dfrac{17}{4}PF=\dfrac{17}{8}m+\dfrac{85}{8}$，

$\therefore OR=\frac{17}{8}m+\frac{85}{8}-5=\frac{17}{8}m+\frac{45}{8}$，$\therefore H(\frac{17}{8}m+\frac{45}{8},m+5)$，代入 $y_{BD}=-3x+3$，

解得 $m=-\frac{151}{59}$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$ 得，$\therefore y=-\frac{72}{59}$，$\therefore F\left(-\frac{151}{59},-\frac{72}{59}\right)$.

【点睛】本题主要考查待定系数法求二次函数解析式，二次函数与几何图形综合，二次函数与一次函数综合，解直角三角形，相似三角形等知识点，题型难度大，属于中考压轴题.

9.（2021•湖南娄底市•中考真题）如图，在直角坐标系中，二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴相交于点 $A(-1,0)$ 和点 $B(3,0)$，与 y 轴交于点 C.



（1）求 b、c 的值；

（2）点 $P(m,n)$ 为抛物线上的动点，过 P 作 x 轴的垂线交直线 $l:y=x$ 于点 Q.

①当 $0<m<3$ 时，求当 P 点到直线 $l:y=x$ 的距离最大时 m 的值；

②是否存在 m，使得以点 O、C、P、Q 为顶点的四边形是菱形，若不存在，请说明理由；若存在，请求出 m 的值.

【答案】（1）$b=-2$，$c=-3$；（2）①$m=\frac{3}{2}$；②不存在，理由见解析

【分析】（1）将 A（-1，0），B（3，0）代入 $y=x^2+bx+c$，可求出答案；

（2）①设点 P（m，m^2-2m-3），则点 Q（m，m），再利用二次函数的性质即可求解；

②分情况讨论，利用菱形的性质即可得出结论.

【详解】解：（1）∵抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A（-1，0），B（3，0），

$\therefore\begin{cases}1-b+c=0\\9+3b+c=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}b=-2\\c=-3\end{cases}$，$\therefore b=-2$，$c=-3$；

（2）①由（1）得，抛物线的函数表达式为：$y=x^2-2x-3$，

设点 P（m，m^2-2m-3），则点 Q（m，m），

∵$0<m<3$，∴$PQ=m-(m^2-2m-3)=-m^2+3m+3=-\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{21}{4}$，

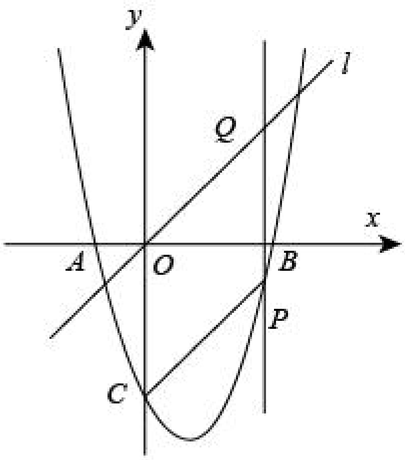
∵$-1<0$，∴当 $m=\frac{3}{2}$ 时，PQ 有最大值，最大值为 $\frac{21}{4}$；

②∵抛物线的函数表达式为：$y=x^2-2x-3$，∴C（0，−3），∴$OB=OC=3$，

由题意，点 P（m，m^2-2m-3），则点 Q（m，m），

∵$PQ // OC$，当 OC 为菱形的边，则 $PQ=OC=3$，

当点 Q 在点 P 上方时，

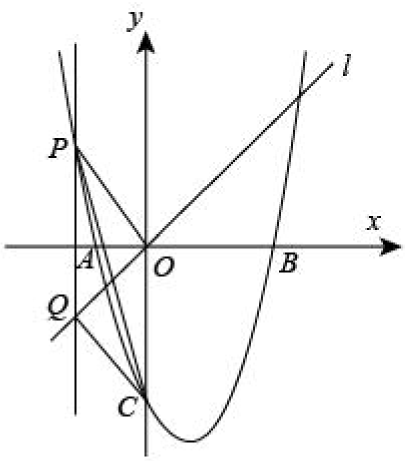


∴$PQ=-m^2+3m+3=3$，即 $-m^2+3m=0$，∴$m(m-3)=0$，解得 $m=0$ 或 $m=3$，

当 $m=0$ 时，点 P 与点 O 重合，菱形不存在，

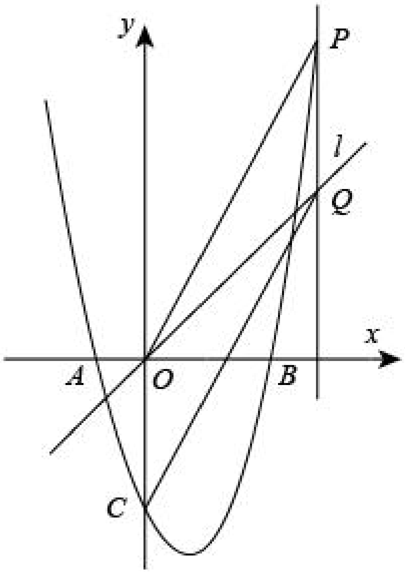
当 $m=3$ 时，点 P 与点 B 重合，此时 $BC=\sqrt{2}OC=3\sqrt{2}\neq OC$，菱形也不存在；

当点 Q 在点 P 下方时，若点 Q 在第三象限，如图，



∵∠COQ=45°，根据菱形的性质∠COQ=∠POQ=45°，则点 P 与点 A 重合，

此时 $OA=1\neq OC=3$，菱形不存在，若点 Q 在第一象限，如图，



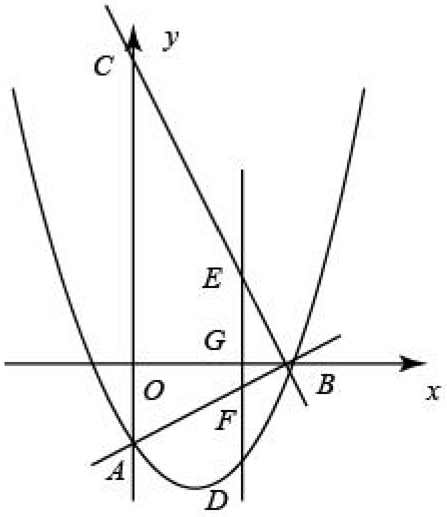
同理，菱形不存在，综上，不存在以点 O、C、P、Q 为顶点的四边形是菱形．

【点睛】本题是二次函数综合题，考查的是二次函数的性质，菱形的判定和性质等知识，其中，熟练掌握方程的思想方法和分类讨论的思想方法是解题的关键．

10.（2021·甘肃中考真题）如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与坐标轴交于

$A(0,-2),B(4,0)$ 两点，直线 $BC:y=-2x+8$ 交 y 轴于点 C．点 D 为直线 AB 下方抛物线上一动点，

过点 D 作 x 轴的垂线，垂足为 G,DG 分别交直线 BC,AB 于点 E,F．



（1）求抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 的表达式；

（2）当$GF=\frac{1}{2}$，连接BD，求$\triangle BDF$的面积；

（3）①H是y轴上一点，当四边形$BEHF$是矩形时，求点H的坐标；

②在①的条件下，第一象限有一动点P，满足$PH=PC+2$，求$\triangle PHB$周长的最小值．

【答案】（1） $y=\frac{1}{2}x^{2}-\frac{3}{2}x-2$；（2） $\frac{3}{4}$；（3）①$H\left(0,3\right)$；②$4\sqrt{5}+7$

【分析】

（1）直接利用待定系数法即可求出答案.

（2）由题意可求出$OB=4$，$OA=2$．利用三角函数可知在$Rt\triangle BOA$和$Rt\triangle BGF$中，

$\tan\angle ABO=\frac{OA}{OB}=\frac{GF}{GB}$，由此即可求出$GB=1$，从而可求出$OG=3$．即可求出$D$点坐标，继而求出$GD=2$．再根据$GF=\frac{1}{2}$，即可求出$FD$的长，最后利用三角形面积公式即可求出最后答案．

（3）①连接BH，交EF于点N．根据矩形的性质可知$BN=NH=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}EF$，$HF\parallel BC$．由

$EF\parallel AC$，可推出$\frac{BG}{OG}=\frac{BE}{CE}=\frac{BF}{AF}=1$．由$HF\parallel BC$，可推出$\frac{CH}{AH}=\frac{BF}{AF}=1$．再根据直线$BC$的解析式可求出$C$点坐标，即可得出$OC$的长，由此可求出$AC$的长，即可求出$CH$的长，最后即得出$OH$的长，即可得出$H$点坐标．

②在$Rt\triangle OBH$中，利用勾股定理可求出HB的长，再根据$C_{\triangle PHB}=PH+PB+HB$结合$PH=PC+2$可

推出$C_{\triangle PHB}=PC+PB+7$，即要使$C_{\triangle PHB}$最小，就要$PC+PB$最小，由题意可知当点$P$在$BC$上时，

$PC+PB=BC$为最小. 即求出BC长即可. 在$Rt\triangle OBC$中，利用勾股定理求出BC的长，即得出$\triangle PHB$周长的最小值为$BC+7$.

【详解】

解：（1）∵抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 过 $A(0,-2)$，$B(4,0)$ 两点，

$\therefore \begin{cases} c=-2 \\ 8+4b+c=0 \end{cases}$，

解得，$\begin{cases} b=-\frac{3}{2} \\ c=-2 \end{cases}$，

$\therefore y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$.

（2）$\because B(4,0)$,

$\therefore OB=4$.

同理，$OA=2$．

又$\because GF\perp x$轴，$OA\perp x$轴，

$\therefore$在$Rt\triangle BOA$和$Rt\triangle BGF$中，$\tan\angle ABO=\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{GF}{GB}$，即$\dfrac{2}{4}=\dfrac{\frac{1}{2}}{GB}$，

$\therefore GB=1$,

$\therefore OG=OB-GB=4-1=3$.

当$x=3$时，$y_D=\frac{1}{2}\times 3^2-\frac{3}{2}\times 3-2=-2$，

$\therefore D(3,-2)$，即 $GD=2$．

$\therefore FD=GD-GF=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

$\therefore S_{\triangle BDF}=\frac{1}{2}FD\cdot BG=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 1=\frac{3}{4}$．

（3）①如图，连接BH，交EF于点N．

∵四边形$BEHF$是矩形，

$\therefore EF=BH$，$BN=NH=\frac{1}{2}BH$．

又$\because EF // AC$，,

$\therefore \frac{BN}{NH}=\frac{BF}{AF}=1$，

$\therefore \frac{BG}{OG}=\frac{BE}{CE}=\frac{BF}{AF}=1$．

∵四边形 $BEHF$ 是矩形，

$\therefore HF \parallel BC$.

$\therefore \frac{CH}{AH}=\frac{BF}{AF}=1$,

∵当 x=0 时，$y_C=8$，

∴ $OC=8$，

∵ $AC=OC+AO=8+2=10$，