南洋模范2024学年第一学期高三年级数学周测

2024.09

一、填空题（本大题共有12题,满分54分,第1-6题每题4分,第7-12题每题5分）

1.定义集合运算: A e $B=\{x\mid x=a+b,a\in A,b\in B\}$.已知集合$A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3\}$,则集合A e B有__________个真子集.

2.函数$y=\sqrt{2^{2x-x^2}-1}$的定义域为__________.

3.已知实数a,b满足$4a+b-ab=0$,且$ab>0$,若关于t的不等式$a+b\geq t^2+5t+3$恒成立,则实数t的取值范围是__________.

4.数$f(x)$在R上可导,若$f'(2)=3$,则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+3\Delta x)-f(2-\Delta x)}{\Delta x}=$__________.

5.已知$f'(x)$是定义域为$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$的函数$f(x)$的导函数，且$f'(x)sinx+f(x)cosx<0$，则不等式$f(x)sinx>\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$的解集为__________.

6.若曲线$y=ln(x+1)+x$在原点处的切线也是曲线$y=e^x-2+a$的切线，则$a=$__________.

7.已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+3,x\leq 2\\ 6+\log_a x,x>2\end{cases}$（$a>0$且$a\neq 1$),若函数$f(x)$的值域是$(-\infty,4]$,则实数$a$的取值范围是__________.

8.已知函数$f(x)=lnx-\dfrac{1}{2}x^2+ax$,若函数$f(x)$在区间$(1,2)$上存在极值,则实数$a$的取值范围为__________.

9.已知函数$f(x)=mx^3+2nx^2-12x$的单调减区间是$(-2,2)$，过点$A(1,t)$存在与曲线$y=f(x)$相切的3条切线，则实数t的取值范围为__________.

10.若函数 $f\left(x\right)=x^2-2x+\left|x-a\right|(a>0)$ 在 $\left[0,2\right]$ 上的最小值为 1，则正实数 a 的值为______.

11.若对任意 $x\in\left[1,+\infty\right)$ ，不等式 $alnx+e^x-ex\geq 0$ 恒成立，则 a 的取值范围为__________.

12.已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}4sin\pi x,0\leq x\leq 1\\ \frac{1}{2}f\left(x-1\right),x>1\end{cases}$ ，若函数 $y=f^2\left(x\right)+2af\left(x\right)+4-a$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 有 6 个不同的零点，则实数 a 的取值范围是__________.

二、选择题(本大题共有 4 题,满分 20 分,每题 5 分)

13.已知 $a<b<0$ ，那么下列不等式成立的是（　　）.

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $ab<b^2$　　C. $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$　　D. $\frac{a+b}{b}>1$

14.命题 p ："函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-ax$ 在区间 $\left[-1,1\right]$ 上单调递增"是命题 q ："$a\leq 1$"的（　　）.

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件　　C．充要条件　　D.既不充分也不必要条件

15.已知定义在 R 上的函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(x\right)+f\left(-x\right)=x^2,\forall x_1,x_2\in\left[0,+\infty\right)$ 均有 $\frac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}>\frac{x_1+x_2}{2}\left(x_1\neq x_2\right)$,则不等式 $f\left(x\right)-f\left(1-x\right)>x-\frac{1}{2}$ 的解集为（　　）.

A. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　C. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

16.已知函数 $f\left(x\right)=a\cdot\frac{e^{2x}}{x}-2x+lnx\left(a\in R\right)$ ，若对于定义域内的任意实数 s ，总存在实数 t 使得 $f\left(t\right)<f\left(s\right)$ ，则实数 a 的取值范围为（　　）.

A. $\left(-\infty,\frac{1}{2e}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2e},+\infty\right)$　　C. $\left[0,+\infty\right)$　　D. $\left(-\infty,0\right]$

三、解答题(共 5 道大题，共 76 分)

17.（本题满分 14 分.本题共 2 小题,第（1）小题 7 分,第（2）小题 7 分.)

已知集合 $A=\left\{x \mid a^{2}-1 \leq x \leq 2a^{2}+3\right\}, B=\left\{x \mid -1 \leq x \leq 4\right\}$ ，全集 $U=R$.

(1)当 $a=1$ 时，求 $\left(\complement_{U} A\right) \cap B$；

(2)若" $x \in B$ "是" $x \in A$ "的必要条件，求实数 a 的取值范围。

18.(本题满分 14 分.本题共 2 小题，第（1）小题 8 分,第（2）小题 6 分.)

已知函数 $f\left(x\right)=lnx+\frac{m}{x^{2}}-\frac{1}{2}(m>0)$.

(1)当 $m=1$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

(2)若 $f\left(x\right) \geq \frac{1}{2}$ 恒成立,求实数 m 的取值范围。

19.(本题满分 14 分.本题共 2 小题,第（1）小题 6 分,第（2）小题 8 分.)

良好的用眼习惯能够从多方面保护眼睛的健康，降低近视发生的可能性，对于保护青少年的视力具有不可替代的重要作用。某班班主任为了让本班学生能够掌握良好的用眼习惯，开展了"爱眼护眼"有奖知识竞赛活动，班主任将竞赛题目分为 A,B 两组，规定每名学生从

A,B 两组题目中各随机抽取 2 道题作答。已知该班学生甲答对 A 组题的概率均为 $\frac{2}{3}$ ，答对 B 组题的概率均为 $\frac{1}{2}$ 。假设学生甲每道题是否答对相互独立。

(1)求学生甲恰好答对 3 道题的概率；

(2)设学生甲共答对了 X 道题,求 X 的分布列及数学期望.

20.（本题满分 16 分.本题共 3 小题,第(1)小题 4 分,第（2）小题 6 分.第(3)小题 6 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 左焦点为 F ，离心率为 $\frac{1}{2}$ ，以坐标原点 O 为圆心，$|OF|$ 为半径作圆使之与直线 $x-y+\sqrt{2}=0$ 相切。

(1)求 C 的方程;

(2)设点 $P(4,0), A, B$ 是椭圆上关于 x 轴对称的两点, PB 交 C 于另一点 E ,

①证明：直线 AE 经过定点；②求 ΔAEF 的内切圆半径的范围.

21.（本题满分 18 分.本题共 3 个小题,第（1）小题 4 分,第（2）小题 6 分,第(3)小题 8 分)已知函数 $f\left(x\right)=e^{x}-aln\left(x+1\right),g\left(x\right)=sinx-x$,其中 $a\in R$.

(1)证明:当 $x\in\left[0,+\infty\right)$ 时, $g\left(x\right)\le 0$;

(2)若 $x>0$ 时, $f\left(x\right)$ 有极小值,求实数 a 的取值范围;

(3)对任意的 $x\in\left[0,\pi\right],2f\left(x\right)\ge g'\left(x\right)+2$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

南洋模范 2024 学年第一学期高三年级数学周测

2024.09

一、填空题(本大题共有 12 题,满分 54 分,第 1-6 题每题 4 分,第 7-12 题每题 5 分)

1.定义集合运算: $A \mathrm{e}\ B=\{x \mid x=a+b, a \in A, b \in B\}$.已知集合 $A=\{1,2\}, B=\{1,2,3\}$,则集合 $A \mathrm{e}\ B$ 有__________个真子集.

【答案】15

【解析】因为 $1+1=2,1+2=3,1+3=4,2+1=3,2+2=4,2+3=5$,

所以 $A \mathrm{e}\ B=\{2,3,4,5\}$,则集合 $A \mathrm{e}\ B$ 有 $2^{4}-1=15$ 个真子集.故答案为:15

2.函数 $y=\sqrt{2^{2x-x^{2}}-1}$ 的定义域为__________.

【答案】$[0,2]$

【解析】令 $2^{2x-x^{2}}-1 \geq 0 \Rightarrow 2^{2x-x^{2}} \geq 1 \Rightarrow 2x-x^{2} \geq 0$,解得 $0 \leq x \leq 2$,故定义域为 $[0,2]$.

3.已知实数 a, b 满足 $4a+b-ab=0$,且 $ab>0$,若关于 t 的不等式 $a+b \geq t^{2}+5t+3$ 恒成立,则实数 t 的取值范围是__________.

【答案】$-6 \leq t \leq 1$

【解析】$ab>0$,则 a, b 同号,又 $4a+b-ab=0$,则 a, b 只能同正.

$4a+b-ab=0$,变形得到 $\frac{4}{b}+\frac{1}{a}=1$.则 $a+b=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)=\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+5 \geq 2\sqrt{\frac{4a}{b} \times \frac{b}{a}}+5=9$.

当且仅当 $\frac{4a}{b}=\frac{b}{a}$,且 $\frac{4}{b}+\frac{1}{a}=1$,则 $a=3, b=6$ 取等号.

由于$a+b\ge t^2+5t+3$恒成立，则$9\ge t^2+5t+3$，解得$-6\le t\le 1$.

4.数$f(x)$在R上可导,若$f'(2)=3$,则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+3\Delta x)-f(2-\Delta x)}{\Delta x}=$__________.

【答案】12

【解析】根据导数定义可$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+3\Delta x)-f(2-\Delta x)}{\Delta x}=4\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+3\Delta x)-f(2-\Delta x)}{2+3\Delta x-(2-\Delta x)}$

$=4\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+3\Delta x)-f(2-\Delta x)}{4\Delta x}=4f'(2)=12$

5.已知$f'(x)$是定义域为$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$的函数$f(x)$的导函数，且$f'(x)sinx+f(x)cosx<0$，则不等式$f(x)sinx>\frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right)$的解集为__________.

【答案】$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$

【解析】设$g(x)=f(x)sinx,x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),g'(x)=f'(x)sinx+f(x)cosx<0$,

所以函数$g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，$f(x)sinx>\frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow f(x)sinx>f\left(\frac{\pi}{6}\right)sin\frac{\pi}{6}$，

即$g(x)>g\left(\frac{\pi}{6}\right)$,得$\begin{cases}x<\frac{\pi}{6}\\0<x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，所以$0<x<\frac{\pi}{6}$,所以不等式的解集为$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$.

6.若曲线$y=ln(x+1)+x$在原点处的切线也是曲线$y=e^x-2+a$的切线，则

$a=$__________.

【答案】$2ln2$

【解析】由$y=ln(x+1)+x$得$y'=\frac{1}{x+1}+1,y'|_{x=0}=2$，

所以曲线$y=ln(x+1)+x$在原点处的切线为$y=2x$。由$y=e^x-2+a$得$y'=e^x$，

设切线与曲线$y=e^x-2+a$相切的切点为$(x_0,e^{x_0}-2+a)$。

由两曲线有公切线得$e^{x_0}=2$，解得$x_0=ln2$,则切点为$(ln2,a)$.

因为切点在切线 $y=2x$ 上,所以 $a=2ln2$.

7.已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+3,x\le 2\\ 6+\log_a x,x>2\end{cases}$ （ $a>0$ 且 $a\ne 1$),若函数 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty,4]$,则实数 a 的取值范围是__________.

【答案】 $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$

【解析】当 $x\le 2$ 时, $f(x)=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$,函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增,在 $(1,2]$ 上单调递减,所以 $f(x)\le f(1)=4$,即 $f(x)\in(-\infty,4]$;若函数 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty,4]$,则 $x>2$ 时, $6+log_a x\le 4$.当 $a>1$ 时, $f(x)=6+log_a x$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增,

此时 $f(x)>f(2)=6+log_a 2>6$,不合题意;当 $0<a<1$ 时, $f(x)=6+log_a x$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减,此时 $f(x)<f(2)=6+log_a 2\le 4$,即 $log_a 2\le -2$,则 $log_a 2\le log_a a^{-2}$,所以 $a^{-2}\le 2$,

显然 $a>0$,解得 $a\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,又 $0<a<1$,所以 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le a<1$.综上所述,实数 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

8.已知函数 $f(x)=lnx-\dfrac{1}{2}x^2+ax$,若函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上存在极值,则实数 a 的取值范围为__________.

【答案】 $0<a<\dfrac{3}{2}$

【解析】由题意得： $f'(x)=\dfrac{1}{x}-x+a=\dfrac{-x^2+ax+1}{x}$,

若函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上存在极值,则 $g(x)=-x^2+ax+1$ 在 $(1,2)$ 上有变号零点,

$\therefore \begin{cases} \Delta = a^2+4>0 \\ g(1)\cdot g(2)=a(2a-3)<0 \end{cases}$ 或 $\therefore \begin{cases} \Delta = a^2+4>0 \\ 1<-\dfrac{a}{-2}<2 \\ g(1)=a<0 \\ g(2)=2a-3<0 \end{cases}$,解得: $0<a<\dfrac{3}{2}$,

9.已知函数 $f(x)=mx^3+2nx^2-12x$ 的单调减区间是 $(-2,2)$，过点 $A(1,t)$ 存在与曲线 $y=f(x)$ 相切的 3 条切线，则实数 t 的取值范围为__________.

【答案】$-12<t<-11$

【解析】设函数 $f(x)=mx^3+2nx^2-12x$ ，可得 $f'(x)=3mx^2+4nx-12$ ，

根据题意，可得 $f'(x)=3mx^2+4nx-12<0$ 的解集为 $(-2,2)$ ，

可得 $-2+2=-\dfrac{4n}{3m}$ 且 $-2\times 2=\dfrac{-12}{3m}$ ，解得 $m=1,n=0$ ，即 $f(x)=x^3-12x$

设点 $P(x_0,f(x_0))$ 是过点 A 的直线与曲线 $f(x)=x^3-12x$ 的切点，

则点 P 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ ，即 $y=3(x_0^2-4)x-2x_0^3$ ，

因为切线过点 $A(1,t)$,可得 $t=3(x_0^2-4)-2x_0^3=-2x_0^3+3x_0^2-12$,又因为存在三条切线,

所以方程 $t=-2x_0^3+3x_0^2-12$ 有三个实根，设 $g(x)=2x^3-3x^2+t+12$ ，

只需函数 $y=g(x)$ 有 3 个零点，又由 $g'(x)=6x^2-6x$ ，令 $g'(x)=0$ ，解得 $x=0$ 或 $x=1$ ，

当 $x<0$ 时， $g'(x)>0,g(x)$ 单调递增；当 $0<x<1$ 时， $g'(x)<0,g(x)$ 单调递减；

当 $x>1$ 时， $g'(x)>0,g(x)$ 单调递增，所以当 $x=0$ 时，函数 $g(x)$ 取得极大值 $g(0)=t+12$ ，

当 $x=1$ 时，函数 $g(x)$ 取得极小值 $g(1)=t+11$ ，