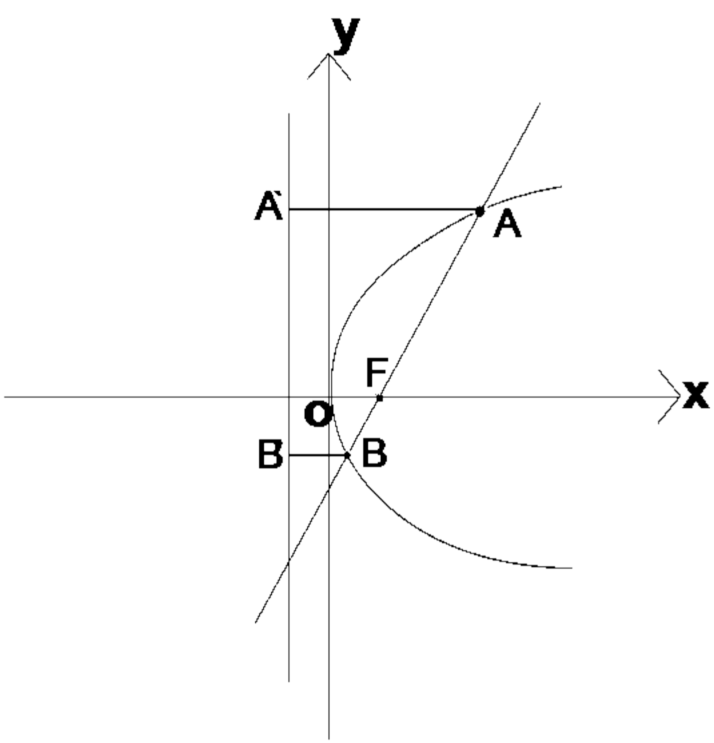
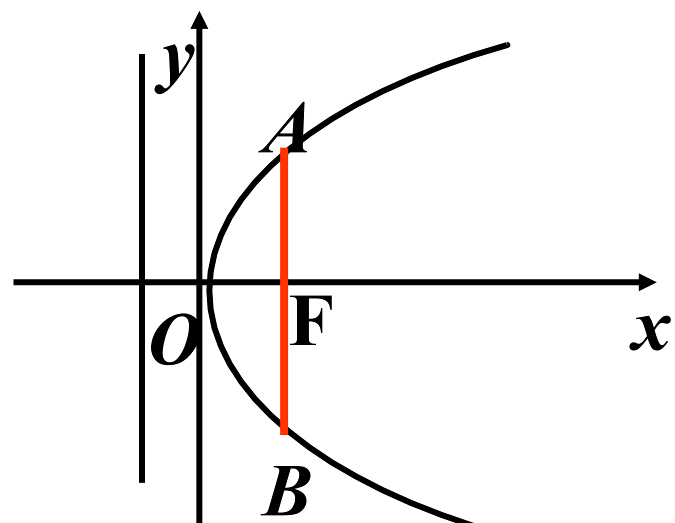
关于抛物线的焦点弦性质

过抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点的一条直线和抛物线相交,两交点为$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,则

(1)$|AB|=x_1+x_2+p$　　(2)通径长为$2p$





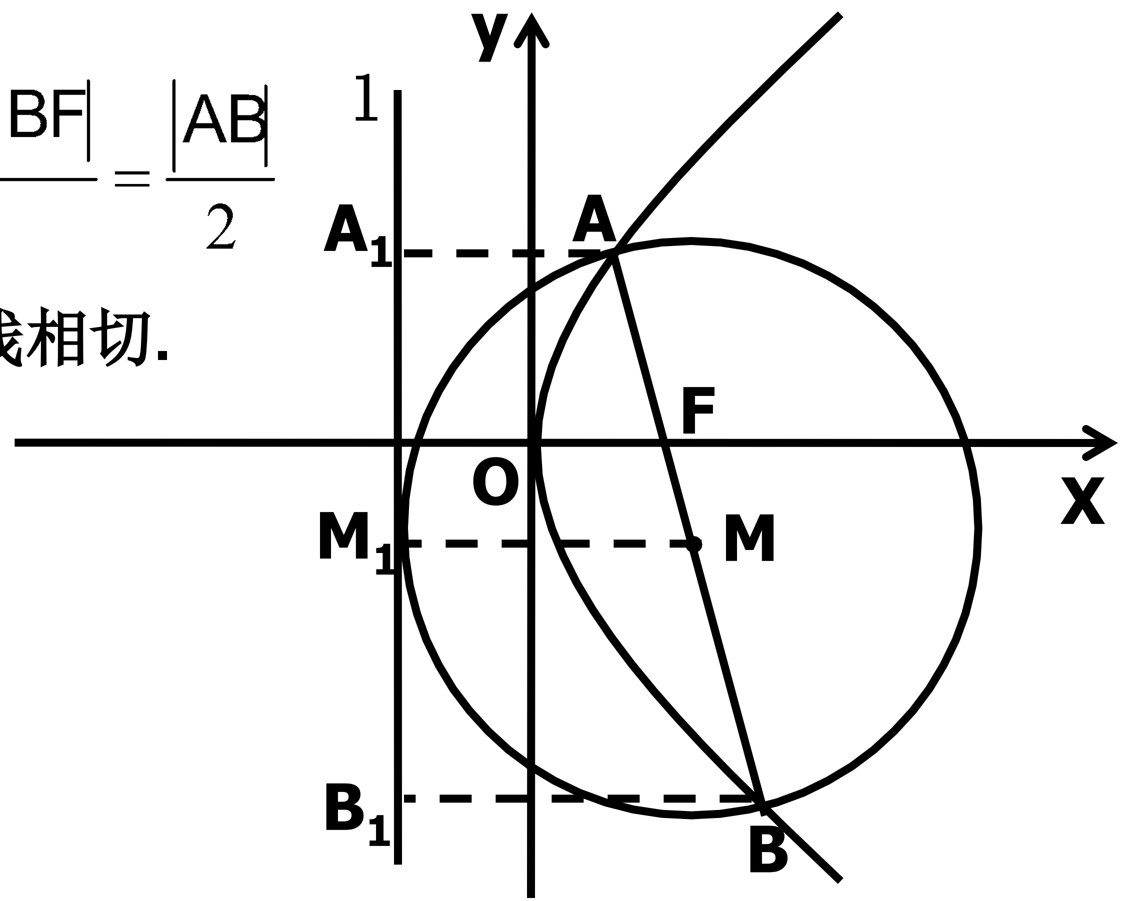
过抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点的一条直线和抛物线相交,两交点为$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,则

(5)以AB为直径的圆与准线相切.

证明：如图，

$$|MM_1| = \frac{|AA_1|+|BB_1|}{2} = \frac{|AF|+|BF|}{2} = \frac{|AB|}{2}$$

故以AB为直径的圆与准线相切.



过抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点的一条直线和抛物线相交,两交点为$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,则

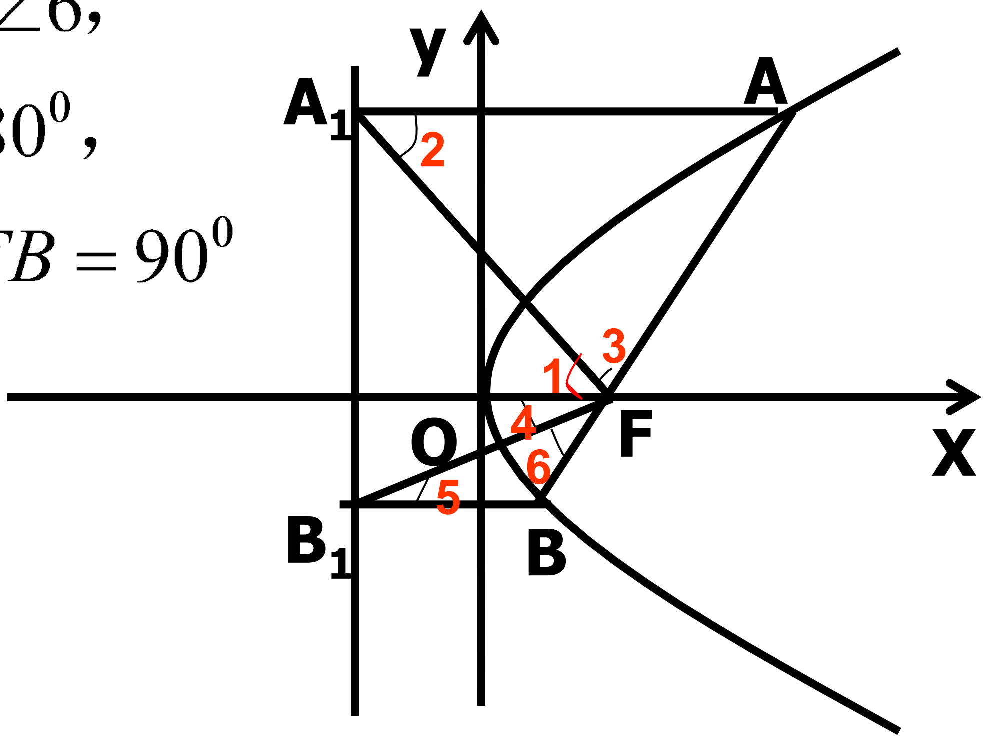
(6)焦点F对A、B在准线上射影的张角为90^o。

证明：如图，

$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，$\angle 4=\angle 5=\angle 6$，

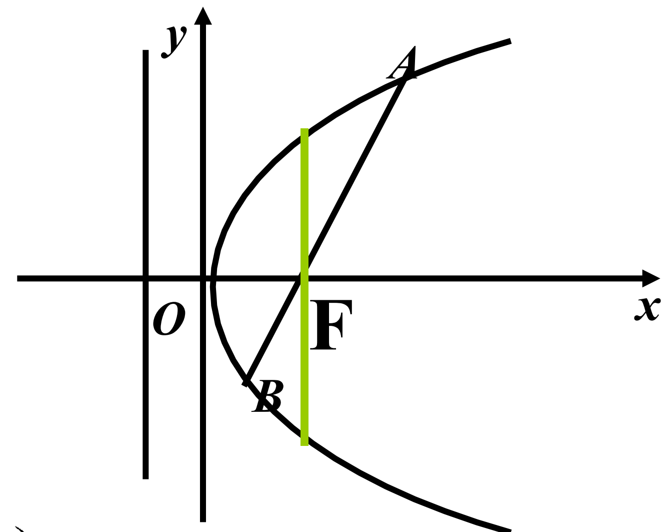
又$\angle 1+\angle 3+\angle 4+\angle 5=180^0$，

$\therefore \angle 1+\angle 4=90^0$，即$\angle AFB=90^0$



过抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点的一条直线和抛物线相交,两交点为$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,则

(3)$x_1x_2=p^2/4$;　　　$y_1y_2=-p^2$;



证明：思路分析：韦达定理

1^0当$AB\perp x$轴时，

易得A（$\frac{p}{2}$，p），B（$\frac{p}{2}$，$-p$），

$\therefore y_1y_2=-p^2$，$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$;

2^0 AB斜率存在时设为k，（$k\neq0$）

则直线AB方程为y=k（x-$\frac{p}{2}$）代入抛物线方程$y^2=2px$

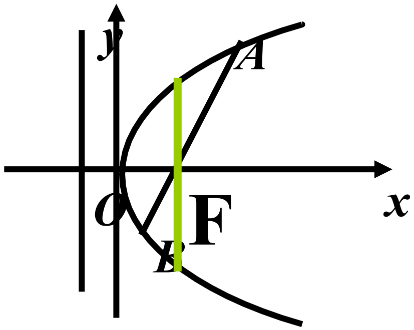
消元得$y^2=2p(\frac{y}{k}+\frac{p}{2})$ 即$y^2-\frac{2py}{k}-p^2=0$

$\therefore y_1y_2=-p^2$; $x_1x_2=\frac{y^2{}_1}{2p}\bullet\frac{y^2{}_1}{2p}=\frac{p^2}{4}$

法二： 由题知AB不与x轴平行

设AB方程为$x=my+\frac{p}{2}$，（$m\in R$）

$$\begin{cases} y^2=2px \\ x=my+\frac{p}{2} \end{cases} \Rightarrow y^2=2p(my+\frac{p}{2})$$



即：$y^2-2pmy-p^2=0$

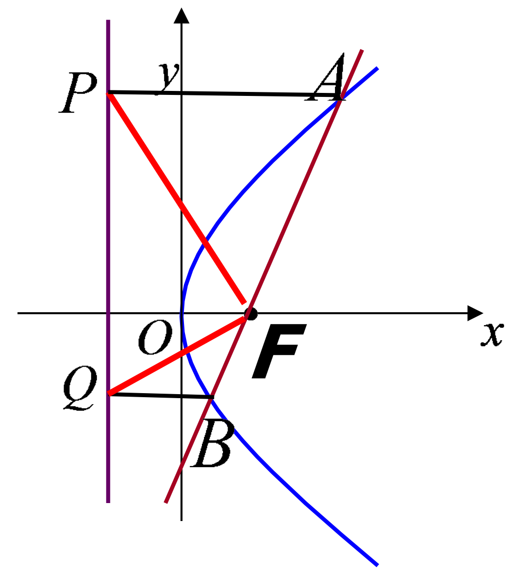
$\therefore y_1y_2=-p^2$ （定值）

$\therefore x_1x_2=\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}=\frac{p^4}{4p^2}=\frac{p^2}{4}$（定值）

过抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点的一条直线和抛物线相交,两交点为$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,则(3)$x_1x_2=p^2/4$;　　$y_1y_2=-p^2$;

法3：利用性质焦点F对A、B在准线上射影的张角为90°。

解：过A，B点作准线的垂线，垂足为P,Q



$$\therefore P(-\frac{p}{2},y_1),Q(-\frac{p}{2},y_2),F(\frac{p}{2},0)$$

Q $\overrightarrow{PF} \perp \overrightarrow{QF}$

$\therefore \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{QF} = 0$　即$(p,-y_1)\cdot(p,-y_2)=0$

$\therefore p^2 + y_1y_2 = 0$

即$y_1y_2 = -p^2$

易得：$x_1x_2 = \dfrac{p^2}{4}$

练习 (1).若直线过定点M(s,0)(s>0)与抛物线$y^2=2px(p>0)$交于$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,求证:$x_1x_2=s^2$;$y_1y_2=-2ps$

证明：设AB 的方程为 $x=my+s$ （$m\in R$）

代入抛物线得$y^2-2pmy-2ps=0$，

$$\therefore\ y_1\bullet y_2=-2ps\quad \therefore x_1x_2=\frac{y_1^2}{2p}\bullet\frac{y_2^2}{2p}=\frac{(-2ps)^2}{4p^2}=s^2$$

(2). 若直线与抛物线$y^2=2px(p>0)$交于$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,且有$x_1x_2=s^2$;$y_1y_2=-2ps$.求证：直线过定点 (s,0)(s>0)

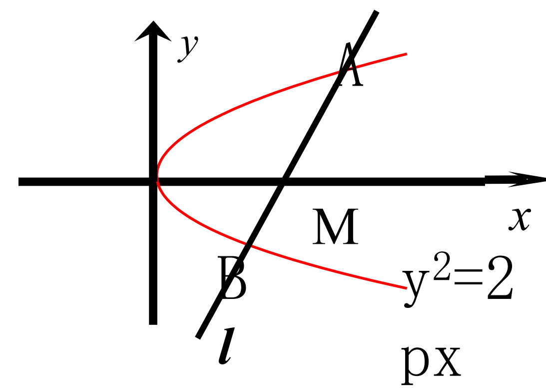
证明：$\begin{cases}y^2{}_1=2px_1\\y^2{}_2=2px_2\end{cases}$ 相减得$k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}$

$$\therefore 直线AB方程为y-y_1=\frac{2p}{y_1+y_2}(x-x_1)$$

令$y=0$得$-y^2{}_1-y_1y_2=2px-2px_1$

因为$y^2{}_1=2px_1$，$y_1y_2=-2ps$代入上式得

$x=s\ \therefore$ 直线AB必过点（s,0）

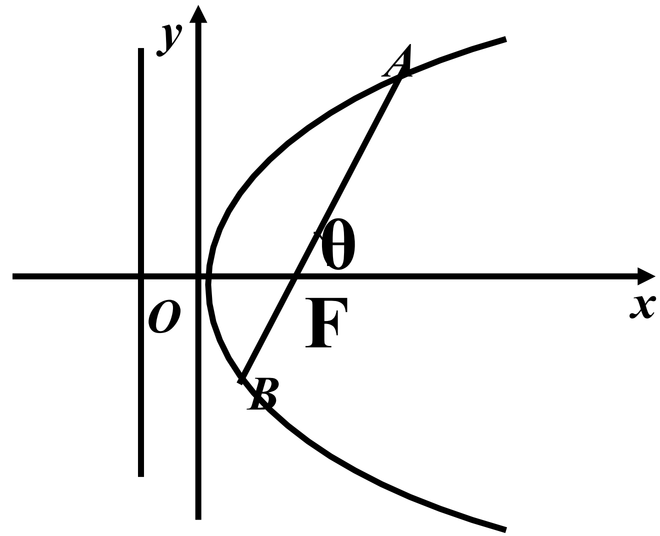


过抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点的一条直线和抛物线相交,两交点为$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,则

(4)若直线AB的倾斜角为θ,则$|AB|=2p/\sin^2\theta$

证明: 思路分析

$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p$



(1) $\theta=90^0$时，k不存在，

易得A $\left(\frac{p}{2},\ p\right)$，B $\left(\frac{p}{2},\ -p\right)$，

$$|AB|=2P=\frac{2p}{\sin^2 90^0}$$

(2) $\theta\neq 90^0$时，斜率$k=\tan\theta$，直线方程为$y=\tan\theta\left(x-\frac{p}{2}\right)$

然后联立方程组用韦达定理得$|AB|=p+x_1+x_2=\frac{2p}{\sin^2\theta}$

思考：焦点弦何时最短？

过焦点的所有弦中，通径最短

过抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点的一条直线和抛物线相交,两交点为$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,则 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}$

7) $|AF|=X_1+\frac{p}{2} \quad |BF|=X_2+\frac{p}{2}$

$$\therefore \frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{1}{X_1+\frac{p}{2}}+\frac{1}{X_2+\frac{p}{2}}=\frac{\left(X_1+\frac{p}{2}\right)+\left(X_2+\frac{p}{2}\right)}{\left(X_1+\frac{p}{2}\right)\left(X_2+\frac{p}{2}\right)}$$

$$=\frac{x_1+x_2+p}{x_1x_2+\frac{p}{2}(x_1+x_2)+\frac{p^2}{4}}=\frac{x_1+x_2+p}{\frac{p^2}{4}+\frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}(x_1+x_2)}$$

$$=\frac{x_1+x_2+p}{\frac{p}{2}(x_1+x_2+p)}=\frac{2}{p}$$