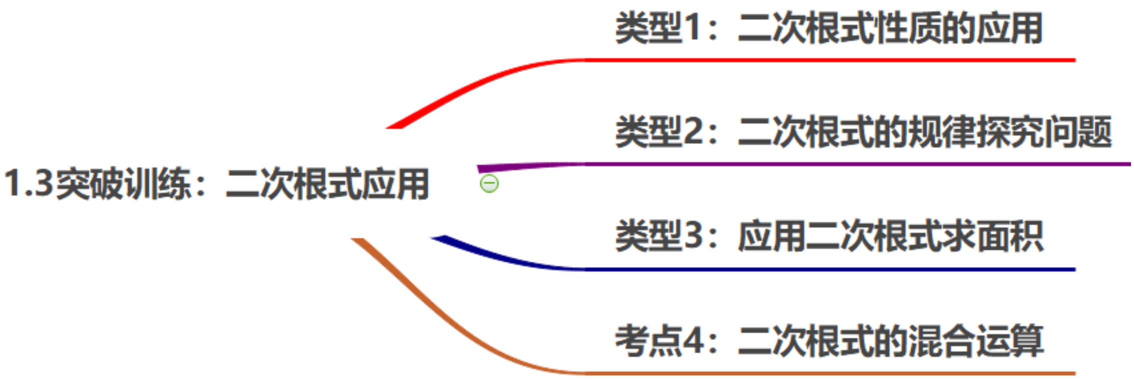
1.3 突破训练：二次根式应用

类型体系



类型 1：二次根式性质的应用

典例：（2022·四川省蒲江县蒲江中学八年级期中）若直角三角形的边长分别是 3，m，5．

(1)求 m；

(2)求 $\sqrt{9-6m+m^2}-\sqrt{m^2-14m+49}$ 的值．

解：（1）当边长为 m 的边是直角边时，则 $m=\sqrt{5^2-3^2}=4$；

当边长为 m 的边是斜边时，则 $m=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$；

$\therefore m$ 的值为 4 或 $\sqrt{34}$；

（2）解：$\sqrt{9-6m+m^2}-\sqrt{m^2-14m+49}$

$=\sqrt{(m-3)^2}-\sqrt{(m-7)^2}$

$=|m-3|-|m-7|$

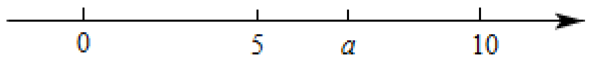
当 $m=4$ 时，原式 $=m-3+m-7=2m-10=-2$；

当 $m=\sqrt{34}$ 时，原式 $=m-3+m-7=2m-10=2\sqrt{34}-10$；

综上所述，$\sqrt{9-6m+m^2}-\sqrt{m^2-14m+49}$ 的值为 -2 或 $2\sqrt{34}-10$．

巩固练习

1．(2022·重庆·西南大学附中八年级期中）实数 a 在数轴上的位置如图所示，则化简 $\sqrt{a^2-8a+16}+\sqrt{(a-11)^2}$ 结果为（　　）．



A. 7　　B. -7　　C. $2a-15$　　D. 无法确定

【答案】A

【分析】先根据点a在数轴上的位置判断出$a-4$及$a-11$的符号，再把原式进行化简即可．

【详解】解：∵由图可知：$4<a<10$，

∴$a-4>0$，$a-11<0$，

∴原式$=\sqrt{(a-4)^2}+\sqrt{(a-11)^2}=a-4+11-a=7$，

故选：A．

【点睛】本题考查的是二次根式的性质与化简，先根据题意得出a的取值范围是解答此题的关键．

2．（2022·上海外国语大学附属大境初级中学八年级期中）已知$a<0$，则二次根式$\sqrt{-a^2b}$化简后的结果为（　）．

A. $a\sqrt{b}$　　B. $a\sqrt{-b}$　　C. $-a\sqrt{b}$　　D. $-a\sqrt{-b}$

【答案】D

【分析】由题意可得$b<0$，再根据二次根式的性质化简即可．

【详解】解：由题意可得：$b<0$

∴$\sqrt{-a^2b}=|a|\sqrt{-b}$

∵$a<0$

∴$|a|=-a$

∴$\sqrt{-a^2b}=|a|\sqrt{-b}=-a\sqrt{-b}$

故选：D

【点睛】此题考查了二次根式的化简，解题的关键是熟练掌握二次根式的性质．

3．（2022·上海市淞谊中学八年级期中）当$x<0$时，化简$\sqrt{x^2y}=$__________．

【答案】$-x\sqrt{y}$

【分析】根据二次根式的性质以及题目给出的x与y的关系进行化简即可．

【详解】解：∵$x<0$，

∴$x^2>0$，

$\because x^2y\geq 0$，

$\therefore y\geq 0$，

$\therefore \sqrt{x^2y}=-x\sqrt{y}$，

故答案为：$-x\sqrt{y}$．

【点睛】本题考查的是二次根式的化简，掌握二次根式的性质$\sqrt{a^2}=|a|$是解题的关键．

4．（2022·北京市顺义区第五中学八年级期中）化简：$\sqrt{18}=$______，$\sqrt{50a^2b}\left(a<0\right)=$______．

【答案】 $3\sqrt{2}$ $-5a\sqrt{2b}$

【分析】根据二次根式的性质化简求解即可．

【详解】解：$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$，

$\sqrt{50a^2b}\left(a<0\right)$

$=\sqrt{5^2\times 2\times\left(-a\right)^2b}$

$=-5a\sqrt{2b}$，

故答案为：$3\sqrt{2}$；$-5a\sqrt{2b}$．

【点睛】本题考查二次根式的性质，会利用二次根式的性质正确化简是解答的关键．

5．（2022·山东枣庄·八年级期中）当$x=3,\ y=5$时，化简$x\sqrt{\frac{y}{x}}$的结果是______．

【答案】$\sqrt{15}$

【分析】根据二次根式的运算法则即可进行解答．

【详解】解：$x\sqrt{\frac{y}{x}}=\sqrt{x^2\cdot\frac{y}{x}}=\sqrt{xy}$，

$\because x=3,\ y=5$，

$\therefore$原式$=\sqrt{3\times 5}=\sqrt{15}$．

【点睛】本题主要考查了二次根式的运算法则，解题的关键是熟练掌握二次根式的定义，性质和运算法则．

6．（2022·山东枣庄·八年级期中）如果$b=\sqrt{a-3}+\sqrt{3-a}+6$，则$\sqrt{ab}=$________．

【答案】$3\sqrt{2}$

【分析】根据二次根式有意义的条件可得$a-3\geq 0, 3-a\geq 0$，从而得到$a=3$，$b=6$，再代入，然后根据二次根式的性质化简，即可求解.

【详解】解：$\because b=\sqrt{a-3}+\sqrt{3-a}+6$，

$\therefore a-3\geq 0, 3-a\geq 0$，

$\therefore a=3$，

$\therefore b=6$，

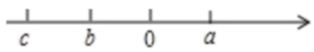
$\therefore \sqrt{ab}=\sqrt{3\times 6}=3\sqrt{2}$.

故答案为：$3\sqrt{2}$

【点睛】本题主要考查了二次根式有意义的条件，二次根式的性质，熟练掌握二次根式有意义的条件，二次根式的性质是解题的关键.

7.（2022·四川省蒲江县蒲江中学八年级期中）实数a，b，c在数轴上的位置如图，化简

$\sqrt{b^2}+\sqrt{(a+c)^2}+\sqrt{a^2-2ab+b^2}=$______.



【答案】$-2b-c$##$-c-2b$

【分析】根据数轴上的点的位置，求得$b<0$，$a+c<0$，$a-b>0$，进而化简二次根式即可求解.

【详解】解：根据数轴可得$b<0$，$a+c<0$，$a-b>0$，

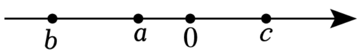
$\therefore \sqrt{b^2}+\sqrt{\left(a+c\right)^2}+\sqrt{a^2-2ab+b^2}=|b|+|a+c|+|a-b|=-b-a-c+a-b=-2b-c$，

故答案为：$-2b-c$.

【点睛】本题考查了根据数轴判断式子的符号，二次根式的性质，数形结合是解题的关键.

8.（2022·重庆市珊瑚初级中学校八年级期中）已知a，b，c在数轴上的位置如图所示，化简代数式：

$\sqrt{a^2}-|a+b|+\sqrt{(c-a)^2}$的值为 ______.



【答案】$b+c-a$

【分析】根据点在数轴上的位置，得出$b<a<0<c$，再根据二次根式的性质进行化简，最后根据整式加减运算法则计算即可.

【详解】解：由图可知，$b<a<0<c$，

$\therefore c-a>0$，

$\therefore \sqrt{a^2}=-a$，$\sqrt{(c-a)^2}=|c-a|=c-a$，

$\therefore \sqrt{a^2}-|a+b|+\sqrt{(c-a)^2}$

$=-a+(a+b)+(c-a)$

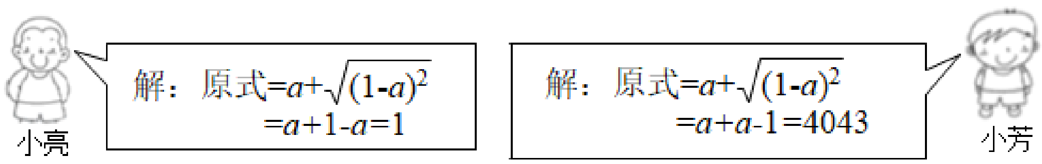
$=-a+a+b+c-a$

$=b+c-a$．

故答案为：$b+c-a$．

【点睛】本题主要考查了二次根式的性质，根据点在数轴上的位置比较大小，整式的加减运算，解题的关键是根据点在数轴上的位置得出$\sqrt{a^2}=-a$，$\sqrt{(c-a)^2}=c-a$．

9．（2022·河南·郑州市第四十七初级中学八年级期中）当$a=2022$时，求$a+\sqrt{a^2-2a+1}$的值．如图是小亮和小芳的解答过程：



(1)___________的解法是错误的；

(2)错误的原因在于未能正确地运用二次根式的性质：___________；

(3)当$a>3$时，求$\sqrt{a^2-6a+9}-|1-a|$的值．

【答案】(1)小亮

(2)$\sqrt{a^2}=|a|$

(3)-2

【分析】（1）根据二次根式的性质化简即可求出答案．

（2）根据二次根式的性质化简即可求出答案．

（3）根据a的范围判断$a-3$与$1-a$的符号，然后根据二次根式的性质以及绝对值的性质进行化简即可求出答案．

【详解】（1）原式$=a+\sqrt{(1-a)^2}$，

$=a+|1-a|$，

$\because a=2022$，

$\therefore 1-a<0$，

$\therefore$原式$=a+a-1=2a-1=2\times 2022-1=4043$，

故小亮的解法错误，

故答案为：小亮.

（2）$\sqrt{a^2}=|a|$，

故答案为：$\sqrt{a^2}=|a|$.

（3）$\because a>3$，

$\therefore a-3>0$，$1-a<0$，

$\therefore$原式$=\sqrt{(a-3)^2}-|1-a|$，

$=|a-3|-|1-a|$

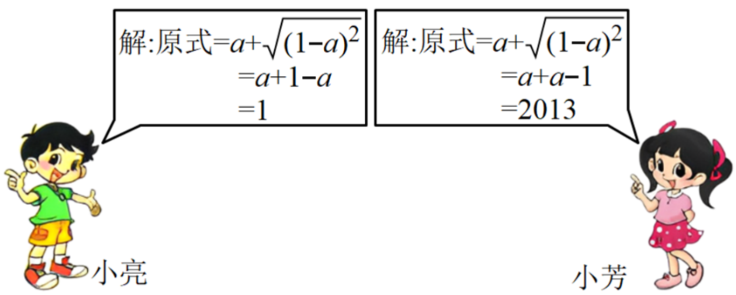
$=a-3+(1-a)$

$=a-3+1-a$

$=-2$.

【点睛】本题考查二次根式的化简求值，解题的关键是熟练运用二次根式的性质，本题属于基础题型.

10.（2022·福建漳州·九年级期中）求代数式$a+\sqrt{(1-a)^2}$，$a=1007$，如图是小亮和小芳的解答过程：



(1)______的解法是正确的；

(2)化简代数式$a+\sqrt{a^2-6a+9}$，（其中$a<0$）；

(3)若$\sqrt{(a-5)^2}+\sqrt{(a+8)^2}=13$，直接写出$a$的取值范围.

【答案】(1)小芳

(2)3

(3) $-8 \le a \le 5$

【分析】（1）由 $a=1007$ 知 $1-a<0$，据此可得 $\sqrt{(1-a)^2}=|1-a|=a-1$，从而作出判断；

（2）利用二次根式的性质化简、代入求值即可得；

（3）分三种情况，化简等号左边，再求出相应 a 值，合并即可．

【详解】（1）解：$\because a=1007$，

$\therefore 1-a<0$，

则 $\sqrt{(1-a)^2}=|1-a|=a-1$，

所以小芳的解法是正确的，

故答案为：小芳；

（2）$\because a<0$，

$a+\sqrt{a^2-6a+9}$

$=a+\sqrt{(a-3)^2}$

$=a+|a-3|$

$=a-a+3$

$=3$；

（3）$\sqrt{(a-5)^2}+\sqrt{(a+8)^2}$

$=|a-5|+|a+8|$

当 $a\le -8$ 时，$|a-5|+|a+8|=5-a-a-8=-2a-3=13$，

解得：$a=-8$；

当 $-8<a<5$ 时，$|a-5|+|a+8|=5-a+a+8=13$；

当 $a\ge 5$ 时，$|a-5|+|a+8|=a-5+a+8=2a+3=13$，

解得：$a=5$，

综上，a 的取值范围是：$-8\le a\le 5$．

【点睛】本题主要考查二次根式的化简求值，解题的关键是掌握二次根式的性质．

11．（2021·山东·德州市第五中学八年级期中）阅读下面的解题过程体会如何发现隐含条件并回答下面的问题

化简:$\left(\sqrt{1-3x}\right)^2-|1-x|$

解:隐含条件$1-3x\geq0$，解得：$x\leq\frac{1}{3}$

$\therefore 1-x>0$

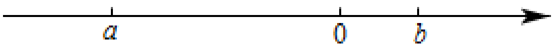
$\therefore$原式$=(1-3x)-(1-x)=1-3x-1+x=-2x$

【启发应用】

（1）按照上面的解法，试化简$\sqrt{(x-3)^2}-(\sqrt{2-x})^2$

【类比迁移】

（2）实数 a，b 在数轴上的位置如图所示，化简：$\sqrt{a^2}+\sqrt{(a+b)^2}-|b-a|$．



（3）已知 a，b，c 为 ABC 的三边长．化简：$\sqrt{(a+b+c)^2}+\sqrt{(a-b-c)^2}+\sqrt{(b-a-c)^2}+\sqrt{(c-b-a)^2}$

【答案】（1）1；（2）$-a-2b$；（3）$2a+2b+2c$．

【分析】（1）根据二次根式有意义的条件判断出 x 的范围，再根据二次根式的性质化简可得；

（2）由 a，b 在数轴上的位置判断出$a+b<0$、$a+b<0$，再利用二次根式的性质化简即可得；

（3）由三角形的三边关系得出$a-b-c<0$，$b-a-c<0$，$c-b-a<0$，再利用二次根式的性质化简可得．

【详解】解：（1）隐含条件$2-x\geq0$ ，解得： $x\leq2$

$\therefore x-3<0$

$\therefore$原式$=(3-x)-(2-x)=3-x-2+x=1$；

（2）观察数轴得隐含条件：$a<0$，$b>0$，$|a|>|b|$

$\therefore a+b<0$，$b-a>0$

$\therefore$原式$=-a-a-b-b+a=-a-2b$；

（3）由三角形的三边关系可得隐含条件：

$a+b+c>0$，$a-b<c$，$b-a<c$，$c-b<a$

$\therefore a-b-c<0$，$b-a-c<0$，$c-b-a<0$

$\therefore$原式$=(a+b+c)+(-a+b+c)+(-b+a+c)+(-c+b+a)$

$=a+b+c-a+b+c-b+a+c-c+b+a$

$=2a+2b+2c$.

【点睛】本题主要考查二次根式的性质与化简，解题的关键是熟练掌握二次根式的性质$\sqrt{a^2}=|a|$ 及三角形的三边关系等知识点.

类型 2：二次根式的规律探究问题

典例：（2022·河南平顶山·八年级期中）观察以下等式：观察下列等式：

第 1 个等式：$\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$，

第 2 个等式：$\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，

第 3 个等式：$\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

…

按照以上规律，解决下列问题：

(1)写出第 6 个等式：____；

(2)写出你猜想的第n个等式：____用含n的式子表示，并证明这个结论？

解：（1）写出第 6 个等式：$\sqrt{\frac{1}{7}-\frac{1}{7^2}}=\frac{\sqrt{6}}{7}$；

故答案为：$\frac{\sqrt{6}}{7}$；

（2）写出你猜想的第n个等式：$\sqrt{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{\sqrt{n}}{n+1}$，

证明：左边$=\sqrt{\frac{n+1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2}}$

$=\sqrt{\frac{n+1-1}{(n+1)^2}}$

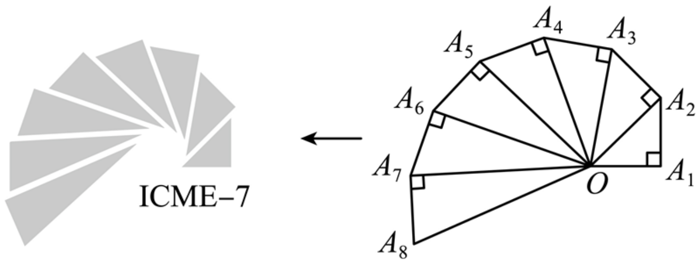
$=\frac{\sqrt{n}}{n+1}=$右边，

$\therefore\sqrt{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

故答案为：$\sqrt{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}}=\frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

巩固练习

1．（2022·安徽宿州·七年级期中）图是第七届国际数学教育大会（*ICME*-7）的会徽图案，它是由一串有公共顶点 *O* 的直角三角形演化而成的．若图中的$OA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=\ldots=1$，按此规律继续演化，则线段$OA_{12}$的长为___________



【答案】$2\sqrt{3}$

【分析】利用勾股定理依次求出OA_2，OA_3，OA_4，可总结出$OA_n=\sqrt{n}$，由此可解．

【详解】解：$\because OA_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=\ldots=1$，

$\therefore$由勾股定理可得：$OA_2=\sqrt{OA_1{}^2+A_1A_2{}^2}=\sqrt{2}$，

$OA_3=\sqrt{OA_2{}^2+A_2A_3{}^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$，

$OA_4=\sqrt{OA_3{}^2+A_3A_4{}^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}$，

……

可知$OA_n=\sqrt{n}$，

$\therefore OA_{12}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，

故答案为：$2\sqrt{3}$．

【点睛】本题主要考查勾股定理、二次根式的性质，通过计算推导出$OA_n=\sqrt{n}$是解题的关键．

2．（2022·北京市育英中学八年级期中）小桃桃根据学习"数与式"积累的经验，想通过"由特殊到一般"的方法探究下面二次根式的运算规律．

以下为小桃桃的探究过程，请补充完整：

具体运算，发现规律，

特例 1：$\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{3+1}{3}}=\sqrt{4\times\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$

特例 2：$\sqrt{2+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{8+1}{4}}=\sqrt{9\times\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$

特例 3：$\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$

（1）如果 n 为正整数，用含 n 的式子表示上述的运算规律为：__________；

（2）应用运算规律化简：$\sqrt{2022+\frac{1}{2024}}\times\sqrt{4048}=$__________.

【答案】 $\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$ $2023\sqrt{2}$

【分析】（1）分析所给的等式的形式进行总结即可；

（2）利用（1）中的规律进行求解即可．

【详解】解：（1）∵特例1：$\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{3+1}{3}}=\sqrt{4\times\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$

特例2：$\sqrt{2+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{8+1}{4}}=\sqrt{9\times\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$

特例3：$\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$

…

∴用含 n 的式子表示为：$\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$，

故答案为：$\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}$；

（2）$\sqrt{2022+\frac{1}{2024}}\times\sqrt{4048}$

$=2023\sqrt{\frac{1}{2024}}\times\sqrt{2\times2024}$

$=2023\sqrt{2}$．

故答案为：$2023\sqrt{2}$．

【点睛】本题主要考查二次根式混合运算，数字的变化规律，解答的关键是由所给的式子总结出规律．

3．（2022·山西临汾·九年级期中）阅读与思考

阅读下列材料，并完成相应的任务：

法国数学家爱德华•卢卡斯以研究斐波那契数列而著名，他曾给出了求斐波那契数列第 n 项的表达式，创造出了检验素数的方法，还发明了汉诺塔问题．“卢卡斯数列”是以卢卡斯命名的一个整数数列，在股市中有广泛的应用．卢卡斯数列中的第 n 个数 $F(n)$ 可以表示为 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$，其中 $n\geq1$．（说明：按照一定顺序排列着的一列数称为数列）

任务：

(1)卢卡斯数列中的第 1 个数 $F(1)=$____________，第 2 个数 $F(2)=$____________；

(2)卢卡斯数列有一个重要特征：当 $n\geq 3$ 时，满足 $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$．请根据这一规律写出卢卡斯数列中的第 6 个数 $F(6)$．

【答案】(1)2，1

(2)11

【分析】（1）根据定义代入数据进行计算即可求解；

（2）根据题意，当 $n\geq 3$ 时，满足 $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$，分别求得 $F(3),F(4),F(5),F(6)$，即可求解．

【详解】（1）解：依题意得，$F(1)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0=1+1=2$，

$F(2)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1$，

故答案为：2，1；

（2）$\because$ 当 $n\geq 3$ 时，满足 $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$，

$\therefore F(3)=F(2)+F(1)=1+2=3$，

$F(4)=F(3)+F(2)=3+1=4$，

$F(5)=F(4)+F(3)=4+3=7$，

$F(6)=F(5)+F(4)=7+4=11$．

【点睛】本题考查了零次幂，二次根式的加减，新定义运算，理解题意，正确的计算是解题的关键．

4．（2022·福建莆田·八年级期中）阅读下列解题过程：

$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1$；

$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$；

$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{(\sqrt{4}+\sqrt{3})(\sqrt{4}-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$；

……

解答下列各题：

(1) $\frac{1}{\sqrt{16}+\sqrt{15}}=$______；

(2)观察上面的解题过程，请计算 $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$.

(3)利用这一规律计算：

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2021}}\right)\left(\sqrt{2022}+1\right).$$

【答案】(1) $4-\sqrt{15}$

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$

(3)2021

【分析】（1）分子分母同时乘以有理化因式 $\left(\sqrt{16}-\sqrt{15}\right)$ 即可求解；

（2）分子分母同时乘以有理化因式 $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$ 即可求解；

（3）根据（2）的规律进行计算即可求解．

【详解】（1）解： $\frac{1}{\sqrt{16}+\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{16}-\sqrt{15}}{\left(\sqrt{16}+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{16}-\sqrt{15}\right)}=\frac{\sqrt{16}-\sqrt{15}}{16-15}=\sqrt{16}-\sqrt{15}=4-\sqrt{15}$；

故答案为： $4-\sqrt{15}$；

（2）解： $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$

$=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}$

$=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$；

（3）解： $\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2021}}\right)\left(\sqrt{2022}+1\right)$

$=\left(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{2022}-\sqrt{2021}\right)\left(\sqrt{2022}+1\right)$

$=\left(\sqrt{2022}-1\right)\left(\sqrt{2022}+1\right)$

$=2022-1$

$=2021$.

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算，分母有理化，平方差公式，正确的计算是解题的关键.

5.（2022·四川·射洪中学九年级期中）阅读材料：像$\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)=1, \sqrt{a}\times\sqrt{a}=a\left(a\geq 0\right)$,这种两个含二次根式的代数式相乘，积不含二次根式，我们称这两个代数式互为有理化因式．在进行二次根式运算时，利用有理化因式可以化去分母中的根号.

解答下列问题：

(1) $\sqrt{7}$ 的有理化因式是____________；

(2)观察下面的变形规律，请你猜想：$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$，$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}$，······，$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$____________

(3)利用上面的方法，请化简：$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2021}}$

【答案】(1) $\sqrt{7}$

(2) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

(3) $\sqrt{2022}-1$

【分析】（1）根据题意及二次根式的乘法即可得出结果；

（2）根据题干中的例子，直接猜想求解即可；

（3）根据（2）中结论将式子化简变形求解即可.

【详解】（1）解：根据题意，$\sqrt{7}\times\sqrt{7}=7$，

$\therefore \sqrt{7}$ 的有理化因式是 $\sqrt{7}$，

故答案为：$\sqrt{7}$；

（2）$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$，

$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，

$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}$，

······，

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，

故答案为：$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

（3）$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2021}}$

$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{2022}-\sqrt{2021}$

$=\sqrt{2022}-1$.

【点睛】题目主要考查二次根式的混合运算及二次根式的化简，分母有理化，熟练掌握二次根式的化简是解题关键．

6．（2022·山东济南·八年级期中）观察下列等式，解答后面的问题：

第 1 个等式：$\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=1$；

第 2 个等式：$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=1$；

第 3 个等式：$\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{31}\right)=1$；

第 4 个等式：$\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)=1$；

……

(1)根据以上的规律，写出第 10 个等式________；

(2)利用上面的规律比较大小：$\sqrt{18}$ - $\sqrt{17}$ ________ $\sqrt{19}$ - $\sqrt{18}$（填＞、＜或＝）；

(3)计算：$\frac{3}{\sqrt{2}+1}+\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{3}{2+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{3}{\sqrt{99}+\sqrt{98}}$.

【答案】(1)$\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{10}\right)=1$

(2)＞

(3)$-3+9\sqrt{11}$

【分析】（1）根据题意给出的规律即可求出答案．

（2）根据题意给出规律即可求出答案．

（3）根据题意给出的规律进行化简后即可求出答案．

【详解】（1）解：（1）根据题意可知：$\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{10}\right)$＝1．

故答案为：$\left(\sqrt{11}+\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{10}\right)$＝1．

（2）$\because\left(\sqrt{18}+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{18}-\sqrt{17}\right)$）$=\left(\sqrt{19}+\sqrt{18}\right)\left(\sqrt{19}-\sqrt{18}\right)$，

$\therefore\dfrac{\sqrt{18}-\sqrt{17}}{\sqrt{19}-\sqrt{18}}=\dfrac{\sqrt{19}+\sqrt{18}}{\sqrt{18}+\sqrt{17}}>1$

$\therefore\sqrt{18}-\sqrt{17}>\sqrt{19}-\sqrt{18}$，

故答案为：＞．

（3）解：$\because\dfrac{3}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=3\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$，

原式$=\left[\left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+......+\left(\sqrt{99}-\sqrt{98}\right)\right]$

$=3\left(-1+\sqrt{99}\right)$

$=-3+9\sqrt{11}$．

【点睛】本题考查二次根式的混合运算，解题的关键是正确理解题意给出的运算规律，本题属于基础题型．

7.（2022·广东·肇庆市颂德学校八年级期中）先观察下列等式，再回答下列问题：

①$\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}=1+\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{1+1}=1\dfrac{1}{2}$；

②$\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}=1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2+1}=1\dfrac{1}{6}$；

③$\sqrt{1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}}=1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3+1}=1\dfrac{1}{12}$．

(1)请你根据上面三个等式提供的信息，猜想$\sqrt{1+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5^2}}$的结果，并验证；

(2)请你按照上面各等式反映的规律，试写出一个用 n（n 为正整数）表示的等式；

(3)请利用上述规律来计算$\sqrt{\dfrac{50}{49}+\dfrac{1}{64}}$（仿照上式写出过程）．

【答案】(1)$1\dfrac{1}{20}$，理由见解析

(2)$\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}}=1+\dfrac{1}{n(n+1)}$

(3)$1\dfrac{1}{56}$

【分析】（1）根据已知算式得出规律，再根据求出的规律进行计算即可；

（2）根据已知算式得出规律即可；

（3）先变形为原式$=\sqrt{1+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}}$，再根据得出的规律进行计算即可.

【详解】（1）∵①$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}=1\frac{1}{2}$，

②$\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}=1\frac{1}{6}$，

③$\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3+1}=1\frac{1}{12}$，

∴$\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4+1}=1\frac{1}{20}$，

理由：$\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{441}{16\times25}}=\frac{21}{4\times5}=1\frac{1}{20}$；

（2）由（1）可知，$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n(n+1)}$；

（3）$\sqrt{\frac{50}{49}+\frac{1}{64}}$

$=\sqrt{1+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}}$

$=\sqrt{1+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}}$

$=1+\frac{1}{7}-\frac{1}{7+1}$

$=1\frac{1}{56}$

【点睛】本题考查了二次根式的性质与化简，数字的变化类等知识点，能根据已知算式得出规律是解此题的关键.

8.（2022·湖南永州·八年级期末）观察下列各式及其化简过程：

$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\times\sqrt{1}+(\sqrt{1})^2}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2}+1$，

$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3-2\sqrt{6}+2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

(1)按照上述两个根式的化简过程的基本思路，将$\sqrt{31-10\sqrt{6}}$化简；

(2)化简$\sqrt{35-8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$；

(3)针对上述各式反映的规律，请你写出$\sqrt{m\pm2\sqrt{n}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\,(a>b)$中，$m$，$n$与$a$，$b$之间的关系.

【答案】(1)$5-\sqrt{6}$；

(2)$4-\sqrt{3}$；

(3) $m=a+b$， $n=ab$．

【分析】（1）将 31 分解成$25+6$，再利用完全平方公式即可求出答案；

（2）先将 7 分解成$4+3$，计算第二层根式，再将 35 分解成$16+3$，利用完全平方公式即可求出答案；

（3）将等式两边同时平方即可求出答案．

【详解】（1） $\sqrt{31-10\sqrt{6}}$

$=\sqrt{25-10\sqrt{6}+6}$

$=\sqrt{(5-\sqrt{6})^2}$

$=5-\sqrt{6}$

（2） $\sqrt{35-8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$

$=\sqrt{35-8\sqrt{4+4\sqrt{3}+3}}$

$=\sqrt{35-8\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}}$

$=\sqrt{35-8\times(2+\sqrt{3})}$

$=\sqrt{35-16-6\sqrt{3}}$

$=\sqrt{19-6\sqrt{3}}$

$=\sqrt{16-6\sqrt{3}+3}$

$=\sqrt{(4-\sqrt{3})^2}$

$=4-\sqrt{3}$

（3） $\sqrt{m\pm2\sqrt{n}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\left(a>b\right)$

两边平方可得： $m\pm2\sqrt{n}=a+b\pm2\sqrt{ab}$

$\therefore m=a+b$， $n=ab$

【点睛】本题考查了二次根式的化简与性质及配方法的应用，读懂题中的配方法并明确二次根式的化简方法是解题关键．

9．（2022·北京通州·八年级期中）根据学习“数与式”的经验，通过由“特殊到一般”的方法探究下面二次根式

的运算规律．以下是探究过程，请补充完整．

(1)具体运算，发现规律．

特例 1．$\sqrt{1+3}=2$．特例 2．$\sqrt{1+\frac{5}{4}}=\frac{3}{2}$，特例 3．$\sqrt{1+\frac{7}{9}}=\frac{4}{3}$，特例 4．$\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\frac{5}{4}$，

特例 5．____________．

(2)观察、归纳，得出猜想．

如果 n 为正整数，用含 n 的式子表示上述的运算规律为：___________．

(3)证明你的猜想．

【答案】(1) $\sqrt{1+\frac{11}{25}}=\frac{6}{5}$

(2) $\sqrt{1+\frac{2n+1}{n^2}}=\frac{n+1}{n}$

(3)见解析

【分析】（1）利用前面的 4 个特例得到等式左边的的被开方数由 1 和分数组成，其中分数的分母为序号数的平方，分子为序号数的 2 倍加 1，等式右侧的分数的分母为序号数，分子为序号数加 1，写出第 5 个特例即可求解；

（2）利用（1）中的规律用序号数 n 表示等式的左右两边即可；

（3）先把被开方的式子通分，再把分子写成完全平方的形式，然后根据二次根式的性质化简即可．

【详解】（1）解：特例 5．$\sqrt{1+\frac{11}{25}}=\frac{6}{5}$；

故答案为：$\sqrt{1+\frac{11}{25}}=\frac{6}{5}$；

（2）如果 n 为正整数，用含 n 的式子表示上述的运算规律为：$\sqrt{1+\frac{2n+1}{n^2}}=\frac{n+1}{n}$，

故答案为：$\sqrt{1+\frac{2n+1}{n^2}}=\frac{n+1}{n}$；

（3）证明：$\sqrt{1+\frac{2n+1}{n^2}}$

$=\sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n^2}}$

$=\sqrt{\frac{(n+1)^2}{n^2}}$

$=\frac{n+1}{n}$．

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算：熟练掌握二次根式的性质、二次根式的乘法法则、除法法则是

解决问题的关键．也考查了数字规律型问题的解决方法．

10．（2022·福建省漳州第一中学八年级期中）观察下列各式及其验证过程：

$\frac{1}{2}\sqrt{3^2-1}=\sqrt{1+\frac{2}{2}}$，验证：$\frac{1}{2}\sqrt{3^2-1}=\sqrt{\frac{3^2-1}{2^2}}=\sqrt{1+\frac{2}{2}}$；

$\frac{1}{3}\sqrt{4^2-1}=\sqrt{1+\frac{2}{3}}$，验证：$\frac{1}{3}\sqrt{4^2-1}=\sqrt{\frac{4^2-1}{3^2}}=\sqrt{1+\frac{2}{3}}$；

$\frac{1}{4}\sqrt{5^2-1}=\sqrt{1+\frac{2}{4}}$，验证：$\frac{1}{4}\sqrt{5^2-1}=\sqrt{\frac{5^2-1}{4^2}}=\sqrt{1+\frac{2}{4}}$

(1)仿照上述三个等式的变形，对下列式子进行变形：

$\frac{1}{5}\sqrt{6^2-1}=$____________，$\frac{1}{6}\sqrt{7^2-1}=$____________．

(2)根据上述规律，写出用 n（n 为正整数且 $n\geq 2$）表示的等式，并加以验证．

【答案】(1) $\sqrt{1+\frac{2}{5}}$，$\sqrt{1+\frac{2}{6}}$

(2) $\frac{1}{n}\sqrt{(n+1)^2-1}=\sqrt{1+\frac{2}{n}}$，理由见解析

【分析】（1）观察题目所给等式，找出题中规律直接写出结果即可；

（2）归纳总结出规律即可．

【详解】（1）解：$\frac{1}{5}\sqrt{6^2-1}=\sqrt{1+\frac{2}{5}}$；验证：$\frac{1}{5}\sqrt{6^2-1}=\sqrt{\frac{6^2-1}{5^2}}=\sqrt{1+\frac{2}{5}}$，

$\frac{1}{6}\sqrt{7^2-1}=\sqrt{1+\frac{2}{6}}$；验证：$\frac{1}{6}\sqrt{7^2-1}=\sqrt{\frac{7^2-1}{6^2}}=\sqrt{1+\frac{2}{6}}$，

故答案为：$\sqrt{1+\frac{2}{5}}$，$\sqrt{1+\frac{2}{6}}$．

$\sqrt{1+\frac{2}{6}}$

（2）解：$\frac{1}{n}\sqrt{(n+1)^2-1}=\sqrt{1+\frac{2}{n}}$

证明：左式$=\sqrt{\frac{(n+1)^2-1}{n^2}}=\sqrt{\frac{n^2+2n+1-1}{n^2}}=\sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2}}=\sqrt{1+\frac{2}{n}}=$右式．

【点睛】本题主要考查了实数运算，解题的关键是熟练掌握实数的运算法则以及根据题意找出一般性规律．

11．（2022·北京昌平·八年级期中）小石根据学习“数与式”积累的经验，想通过“由特殊到一般”的方法探究下面二次根式的运算规律．下面是小石的探究过程，请补充完整：

(1)具体运算，发现规律．

特例 1：$\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2-1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$，

特例 2：$\sqrt{2-\frac{2}{5}}=\sqrt{\frac{2\times5-2}{5}}=\sqrt{\frac{2\times(5-1)}{5}}=2\sqrt{\frac{2}{5}}$，

特例 3：$\sqrt{3-\frac{3}{10}}=\sqrt{\frac{3\times10-3}{10}}=\sqrt{\frac{3\times(10-1)}{10}}=3\sqrt{\frac{3}{10}}$，

特例 4：$\sqrt{4-\frac{4}{17}}=4\sqrt{\frac{4}{17}}$，

特例 5：$\sqrt{5-\frac{5}{26}}=$____________（填写运算结果）；

(2)观察、归纳，得出猜想．

如果 n 为正整数，用含 n 的式子表示上述的运算规律为：____________；

(3)证明你的猜想．

(4)应用运算规律：

①化简：$\sqrt{9-\frac{9}{82}}\times\sqrt{\frac{164}{3}}=$____________；

②若 $\sqrt{a-\frac{a}{65}}=8\sqrt{\frac{8}{b}}$（$a$，$b$ 均为正整数），则 $a-b$ 的值为____________．

【答案】(1) $5\sqrt{\frac{5}{26}}$

(2) $\sqrt{n-\frac{n}{n^2+1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$

(3)见解析

(4)① $9\sqrt{6}$；② -57

【分析】（1）根据题目中的例子可以写出例 5；

（2）根据（1）中特例，可以写出相应的猜想；

（3）根据（2）中的猜想，对等号左边的式子化简，即可得到等号右边的式子，从而可以解答本题；

（4）①②根据（2）中的规律即可求解．

【详解】（1）解：$\sqrt{5-\frac{5}{26}}=\sqrt{\frac{5\times26-5}{26}}=\sqrt{\frac{5\times(26-1)}{26}}=5\sqrt{\frac{5}{26}}$，

故答案是：$5\sqrt{\frac{5}{26}}$；

（2）$\sqrt{n-\frac{n}{n^2+1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$，

故答案是：$\sqrt{n-\frac{n}{n^2+1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}$；