4.3.2 等比数列的前n项和公式(2)

《选择性必修》（第二册）$P_{38} \sim P_{40}$

复习引入

1. 等比数列的通项公式：$a_n = a_1 q^{n-1}$.

推广：$a_n = a_m \cdot q^{n-m}$

2. 等比数列的性质：在等比数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) $m,n,s,t \in N^*$ 若 $m+n=s+t$，则 $a_m \cdot a_n = a_s \cdot a_t$

(2) 若 $m,n,s \in N^*$，$m+n=2s$，则 $a_m \cdot a_n = a_s^2$

3. 等比数列的前 n 项和公式：

(1) 当 $q \neq 1$ 时，$S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 或 $S_n = \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q}$

(2) 当 $q = 1$ 时，$S_n = na_1$

推导等比数列的前 n 项和公式的方法，叫做 错位相减法

5. 等比数列的前 n 项和性质:在等比数列$\{a_n\}$中,

为S_n, 仍构成 S_{2n} 数列,且公比 $-S_n, S_{3n}-S_{2n}, \cdots$ 等比

q^n

探究1：等比数列前n项和公式的函数特征

思考 1：等差数列的前 n 项和

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$$

$d \neq 0$ 时 S_n 是关于 n 的常数项为 0 的二次函数

那么，等比数列的前 n 项和 S_n 是关于 n 什么函数呢?

当$q\neq1$时，

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_n=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q} \Rightarrow S_n=-\frac{a_1}{1-q}q^n+\frac{a_1}{1-q}$$

设 $A=-\frac{a_1}{1-q}$，则 $S_n=Aq^n-A$. 即S_n是n的指数型函数.

结构特点：q^n的系数与常数项互为相反数.

当$q=1$时，$S_n=na_1$，即S_n是n的正比例函数.

练习

等比数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=3^n+k$，则实数 为(　　)

A. -1　B. 0　C. 1　D. 2

A

解 1:∵等比数列的前 n 项和为 $S_n=-A\cdot q^n+A$ 的形式，∴$1+k=0$.解得 $k=-1$.

解 2：依题意得，数列$\{a_n\}$是等比数列，

$a_1=3+k$，$a_2=S_2-S_1=6$，$a_3=S_3-S_2=18$，

则 $6^2=18(3+k)$，由此解得 $k=-1$，选 A.

探究2：等比数列的偶数项和与奇数项和

思考2： 若$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，$S_{偶}$, $S_{奇}$分别是数列的偶数项和与奇数项和，则$S_{偶}$, $S_{奇}$之间有什么关系？

(1)若等比数列$\{a_n\}$的项数有$2n$项，则

$$S_{偶}=a_2+a_4+\dots+a_{2n}$$
$$=a_1q+a_3q+\dots+a_{2n-1}q \Rightarrow S_{偶}=qS_{奇} \Leftrightarrow \frac{S_{偶}}{S_{奇}}=q$$
$$S_{奇}=a_1+a_3+\dots+a_{2n-1}$$

(2)若等比数列$\{a_n\}$的项数有$2n+1$项，则

$$S_{偶}=a_2+a_4+\dots+a_{2n}$$
$$S_{奇}=a_1+a_3+a_5+\dots+a_{2n-1}+a_{2n+1} \Rightarrow S_{奇}=a_1+qS_{偶}$$
$$=a_1+(a_3+a_5+\dots a_{2n-1}+a_{2n+1}) \Leftrightarrow \frac{S_{奇}-a_1}{S_{偶}}=q$$
$$=a_1+q(a_2+a_4+\dots+a_{2n})$$
$$=a_1+qS_{偶}$$

练习

已知等比数列$\{a_n\}$共有$2n$项，其和为-240，且

$(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})-(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})=80$，

求公比q.

解：由题意，得$\begin{cases} S_{奇}+S_{偶}=-240, \\ S_{奇}-S_{偶}=80, \end{cases}$

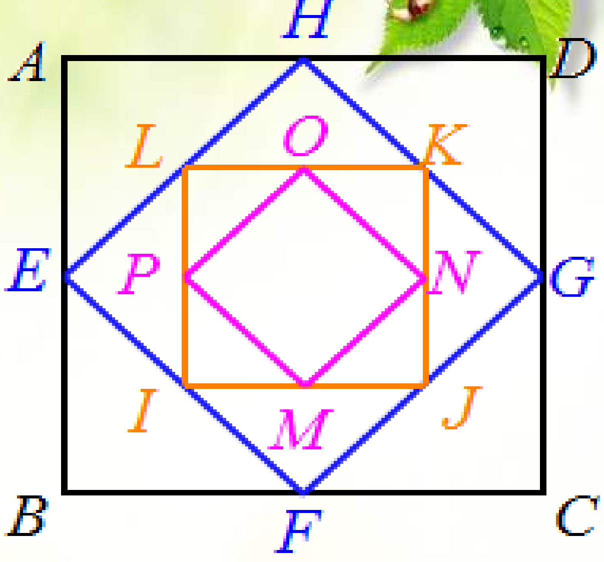
解得$\begin{cases} S_{奇}=-80, \\ S_{偶}=-160. \end{cases}$

$\therefore q=\dfrac{S_{偶}}{S_{奇}}=\dfrac{-160}{-80}=2.$

例题

课本P38

例1： 如图，正方形$ABCD$的边长为5cm，取正方形$ABCD$各边的中点E, F, G, H，作第2个正方形$EFGH$，然后再取正方形$EFGH$各边的中点I, J, K, L，作第3个正方形$IJKL$，依此方法一直继续下去.



(1) 求从正方形$ABCD$开始，连续10个正方形的面积之和;

(2) 如果这个作图过程可以一直继续下去，那么所有这些正方形的面积之和将趋近于多少?

解:(1) 设正方形$ABCD$的面积为a_1，后继各正方形的面积依次为$a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$，则 $a_1 = 25$.

由于第$k+1$个正方形的顶点分别是第k个正方形各边的中点，所以$a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k$.

因此，$\{a_n\}$是以25为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.

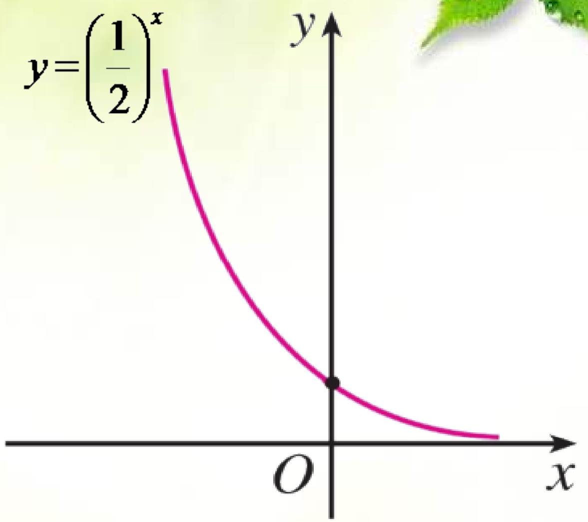
设$\{a_n\}$的前n项和为S_n.

（1）$S_{10} = \dfrac{25 \times [1 - (\frac{1}{2})^2]}{1 - \frac{1}{2}} = 50 \times (\frac{1}{2^{10}} - 1) = \dfrac{25575}{512}$.

∴前10个正方形的面积之和为$\dfrac{25575}{512}$ cm^2.

(2)当n无限增大时，S_n无限趋近于所有正方形的面积

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$.



$$\text{而}S_n=\frac{25\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=50\left[1-\left(\frac{1}{2^n}\right)\right].$$

随着n的无限增大，$\left(\frac{1}{2}\right)^n$将趋近于0，$S_n$将趋近于50.

∴所有这些正方形的面积之和将趋近于50.

练习

课本P40

一个乒乓球从1 m高的高度自由落下，每次落下后反弹的高度都是原来高度的0.61倍.

(1) 当它第6次着地时，经过的总路程是多少(精确到1 cm)?

(2) 至少在第几次着地后，它经过的总路程能达到400 cm?

解: (1)第6次着地时,经过的的总路程为

$$100+2(100\times0.61+100\times0.61^2+\cdots+100\times0.61^5)$$

$$=100+200\times\frac{0.61\times(1-0.61^5)}{1-0.61}\approx386\ (cm).$$

(2) 设第n次着地时,经过的路程为400cm,则有

$$100+200\times\frac{0.61\times(1-0.61^{n-1})}{1-0.61}=400,$$

整理得$0.61^{n-1}\approx0.04$,解得$n\approx7.5$.

因此,小球至少在第8次着地后,经过的总路程能达到400cm.

例题

课本P38

例2： 去年某地产生的生活垃圾为20万吨，其中14万吨垃圾以填埋方式处理，6万吨垃圾以环保方式处理，预计每年生活垃圾的总量递增5%，同时，通过环保方式处理的垃圾量每年增加1.5万吨. 为了确定处理生活垃圾的预算，请写出从今年起n年内通过填埋方式处理的垃圾总量的计算公式，并计算从今年起5年内通过填埋方式处理的垃圾总量 (精确到0.1万吨).

解:设从今年起每年生活垃圾的总量（单位：万吨）构成数列$\{a_n\}$,每年以环保方式处理的垃圾量（单位：万吨）构成数列$\{b_n\}$,n年内通过填埋方式处理的垃圾总量为S_n（单位：万吨）,则

$a_n=20\times1.05^n,b_n=1.5n+6.$

$S_n=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_n-b_n)$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(b_1+b_2+\cdots+b_n)$

$=(20\times1.05+20\times1.05^2+\cdots+20\times1.05^n)-(7.5+9+\cdots$

$+6+1.5n)$

$$=\frac{20\times1.05\times(1-1.05^n)}{1-1.05}-\frac{n(7.5+1.5n+6)}{2}$$

$$=420\times1.05^n-\frac{3}{4}n^2-\frac{27}{4}n-420.$$

当$n=5$时,$S_5\approx63.5.$

$\therefore$从今年起5年内,通过填埋方式处理的垃圾总量约为63.5万吨.

练习

某市共有 1 万辆燃油型公交车．有关部门计划于 2016 年投入 128 辆电力型公交车，随后电力型公交车每年的投入比上一年增加 50%.则：

(1)该市在 2022 年应该投入电力型公交车多少辆？

(2)到哪一年年底，电力型公交车的数量开始超过公交车总量的$\frac{1}{3}$？

解： (1)每年投入电力型公交车的数量可构成等比数列$\{a_n\}$，

其中 $a_1=128$，$q=\frac{3}{2}$.

∴2022 年应投入的数量为 $a_7=a_1q^6=128\times\left(\frac{3}{2}\right)^6=1\ 458$(辆).

∴该市在 2022 年应该投入 1 458 辆电力型公交车．