摘 要

针对希尔伯特第 16 问题, $V.I.Arnold$ 于 1977 年提出了一个弱化形式, 即确定 $Abel$ 积分孤立零点个数的最小上界. 众多学者针对这一问题进行了广泛的研究, 并取得了一定进展, 然而, 关于 $Abel$ 积分零点个数上界的突破仍然存在许多需要解决的问题. 本文以弱化的希尔伯特第 16 问题为核心, 基于定性理论, 共分为四个部分, 具体内容如下:

第一部分阐述了本文研究的相关背景, 包括国内外的研究动态, 并明确了本文的主要研究内容和创新之处.

第二部分详细介绍了处理 $Abel$ 积分零点个数问题的方法, 即 $Picard-Fuchs$ 方程法和 $Riccati$ 方程法, 并对此方法的相关应用进行了介绍.

第三部分讨论了二次可逆系统两种特殊情况的标准形式, 并通过引入积分函数来寻找最优生成元, 从而进一步揭示了 $Abel$ 积分的代数结构.

第四部分主要寻求 $Picard-Fuchs$ 方程和 $Riccati$ 方程, 并通过迭代消元的方法, 分析了在受到 n 次多项式扰动后的两类二次可逆系统的 $Abel$ 积分孤立零点个数的上界. 研究结果表明, 二次可逆系统两种特殊情况的 $Abel$ 积分孤立零点个数的上界都线性依赖于 n, 具体研究结果如下:

(1) 当 $n \geq 6$ 时, 上界为 $20[n/3]+2[(n-1)/3]+8[(n-2)/3]+2$; 当 $n=5$ 时, 上界为 48; 当 $n=3$ 或 4 时, 上界为 40; 当 $n=1$ 或 2 时, 上界为 36; 当 $n=0$ 时, 上界为 0.

(2) 当 $n \geq 5$ 时, 上界为 $7[(n-3)/2]+5$; 当 $n=4$ 时, 上界为 8; 当 $n=3$ 时, 上界为 5; 当 $n=2$ 时, 上界为 4; 当 $n=0$ 或 1 时, 上界为 0.

关键词: 二次可逆系统; $Abel$ 积分; 孤立零点个数; $Picard-Fuchs$ 方程; $Riccati$ 方程

Abstract

Yu Qiuli

Applied Mathematics

Directed by Hong Xiaochun

In response to Hilbert's 16th problem, V.I. Arnold proposed a weakened form in 1977, that is, to determine the minimum upper bound on the number of isolated zeros of Abelian integral. Many scholars have conducted extensive research on this topic and have achieved certain progress, however, there are still many unresolved issues regrading the breakthrough of upper bounds on the number of isolated zeros of Abelian integrals. This paper takes the weakened Hilbert's 16 problem as the core, based on qualitative theory and comprises four sections, which are outlined as follows:

The first part expounds on the background of this research, including the research trends both domestically and internationally, and clarifies the main research content and innovations of this paper.

The second section introduces the methods for addressing the issue of Abelian integral zeros, namely the Picard-Fuchs equation and the Riccati equation, and describes the application of these techniques.

The third part discusses the standard form of two specific cases of quadratically reversible system, and reveals the algebraic structure of Abelian integrals by introducing an integral function to seek the optimal generator.

In the final part, the Picard-Fuchs equation and the Riccati equation are sought, and through the iterative elimination process, upper bounds on the number of isolated zeros of the two classes of quadratic reversible systems after being perturbed by the n subpolynomial are analyzed, so that the upper bound of the numbers of isolated zeros of their Abelian integrals is linearly dependent on n, and the results are respectively:

(1) When $n \geq 6$, the upper bound is $20[n/3]+2[(n-1)/3]+8[(n-2)/3]+2$; When $n=5$, the upper bound is 48; When $n=3$ or 4, the upper bound is 40; When $n=1$ or 2, the upper bound is 36; When $n=0$, the upper bound is 0.

(2) When $n \geq 5$, the upper bound is $7[(n-3)/2]+5$; When $n=4$, the upper bound is 8; When $n=3$, the upper bound is 5; When $n=2$, the upper bound is 4; When $n=0$ or 1, the upper bound is 0.

Keywords: quadratic reversible system; Abelian integral; number of isolated zeros; Picard-Fuchs equation; Riccati equation

目录

第 1 章 绪论 1
1.1 研究背景 1
1.1.1 希尔伯特第 16 问题及其弱化 2
1.1.2 二次系统的分类 4
1.1.3 二次可逆系统及 *Abel* 积分 5
1.2 国内外的研究现状 6
1.3 研究内容及创新之处 7
1.3.1 研究内容 7
1.3.2 创新点 8
第 2 章 研究方法及应用 9
2.1 $Picard-Fuchs$ 方程法与 $Riccati$ 方程法 9
2.2 两种方法的相关应用 9
第 3 章 两类二次可逆系统 Abel 积分及其代数结构 12
3.1 标准形式 12
3.1.1 系统 $(sr4)$ 的标准形式 12
3.1.2 系统 $(sr5)$ 的标准形式 13
3.2 *Abel* 积分 $A(h)$ 的代数结构 15
第 4 章 Abel 积分孤立零点个数的研究 24
4.1 $Picard-Fuchs$ 方程和 $Riccati$ 方程 24
4.2 *Abel* 积分零点个数的上界 28
4.3 相关结论 35
总结和展望 37
参考文献 38

致谢 43

在读期间的研究成果 44

第 1 章　绪论

本章节主要介绍弱化的希尔伯特第 16 问题相关背景, 并探讨国内外在希尔伯特第 16 问题领域的研究进展, 同时明确本文的研究内容和创新之处.

1.1　研究背景

微分方程作为数学领域的一个重要分支, 伴随着微积分共同发展, 在数学和物理等诸多领域中发挥着至关重要的作用, 并且是解决实际问题和科学技术进步强有力的工具. 在 19 世纪中叶之前, 数学家对具体的微分方程总是要寻求出其解的具体表达式. 在 19 世纪中叶之后, 法国数学家 *Poincar* 为突破原有的微分方程求解的思维束缚, 创立了微分方程定性理论, 这一理论的核心在于不求出解的具体表达式情况下研究解的各种特性, 开辟了研究微分方程的新思路. 俄国数学家 *Lyapunov* 在 *Poincar* 的定性理论研究的基础上, 对动力系统定性理论进行更深入的分析, 并发展出一系列适用的方法来解决运动稳定性问题, 为微分方程以及定性理论的研究奠定了坚实的理论和方法基础, 并极大的推进了微分方程以及定性理论的发展[1]. 常微分方程定性理论的研究主要探讨非线性动力系统内周期解的存在性、稳定性条件以及它们随参数变化的分岔现象, 这些研究成果在工程、生物、经济等多个领域有着广泛的应用, 并为掌握和预测复杂系统的动态行为提供了重要基础和理论支持.

对于平面自治系统

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(x,y), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q(x,y), \end{cases} \tag{L}$$

如果一条闭合轨道 l 在系统 (L) 存在一个邻域 r, 在 l 的邻域 r 内系统 (L) 不会形成闭环, 那么我们把 l 称为系统 (L) 的一个极限环. 因此, 极限环是一条存在于在平面自治系统中的孤立闭轨线. 探究极限环的个数不仅对平面动力系统的研究起到推动作用, 而且在实际应用问题中也具有显著的应用意义, 关于极限环的详细研究可见专著 [2-5].

1.1.1 希尔伯特第 16 问题及其弱化

在 1900 年的巴黎数学家大会上, 数学家 *Hilbert* 提出了著名的“希尔伯特 23 问”, 其中第 16 问题的后半部分是涉及微分方程的平面系统极限环存在与分布情况, 我们可以将这个问题简述为: 右端是由两个关于变量 x, y 的 n 阶多项式 $P_n(x,y)$ 和 $Q_n(x,y)$ 定义的平面系统

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P_n(x,y), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q_n(x,y), \end{cases} \tag{1.1}$$

可能形成的极限环数量问题及其在相平面上的具体位置问题. 当系统的多项式阶数为确定的正整数 n 时, 这个平面系统被称 n 次平面微分系统. 值得注意的是, 当 $n=1$ 时, 该平面微分系统为线性系统, 仅有周期解而没有极限环, 对于线性系统的研究并不具有实际应用价值. 因此, 研究重点应当放在 $n \geq 2$ 时的平面微分系统极限环的数量以及在相平面的具体位置上[6].

希尔伯特第 16 问题提出至今已有 100 多年, 尽管很多学者针对这一问题做了大量的工作, 但至今仍然有许多问题要去解决, 某些关键点尚需突破. 在希尔伯特第 16 问题研究途中, 数学家 *Dulac* 在 1923 年的文献 [7] 中给出了每个给定的微分系统的极限环个数都是有限的证明. 然而, 经过 60 年的实践检验, 人们发现 *Dulac* 的证明存在严重的缺陷, 结论不能作为严格的数学证据. *Ecalle* 随后在论文 [8] 和 *Ilyashenko* 在论文 [9] 中对 *Dulac* 的证明进行了补充和完善, 对于这些详细的工作内容, 可以进一步查阅文献 [10-11]. *Petrovskii* 和 *Landis* 在 1955 年的文献 [12] 提出了在特定条件下系统的 *Hopf* 分叉点维数 $H(2)$ 等于 3 的结论. 然而, *Petrovskii* 和 *Landis* 证明的这个结论并不正确, 史松龄在 1979 年的文献 [13] 中提出了在二次系统中一个至少四个极限环的反例. 同年, 陈兰荪和王明淑也在文献 [14] 中报告了 $H(2) \geq 4$ 的反例, 进一步证实了 *Petrovskii* 和 *Landis* 的结论是错误的. 对于上述两次错误的结论以及后续的纠正工作都为我们提供了深入解决希尔伯特第 16 问题的工具. 对于 $H(n)$ 的有限性问题, 目前得到研究结论主要集中在 $H(n)$ 的下界, 关于 $H(n)$ 下界一些详细的相关研究可参考文献 [15-17].

在 1977 年, 数学家 *Arnold* 对希尔伯特第 16 问题进行了简化处理, 提出了

弱化的希尔伯特第 16 问题, 简而言之, 这个弱化版本的问题聚焦于求解 *Able* 积分孤立零点个数. 具体来说, 它涉及到平面上的 $n-1$ 次 *Hamilton* 系统在受到 $m+1$ 次扰动后形成的极限环个数问题[18]. 在文献 [19] 中进一步指出了首次积分 $H(x,y)$ 的次数至少为三次, 多项式 q 和 p 的最低次数为一次, 求解 $n-1$ 次 *Hamilton* 系统在受到任意 m 次多项式扰动后, 产生 *Abel* 积分零点个数的问题. 这些简化处理和具体问题的提出, 为我们深入理解和探究希尔伯特第 16 问题提供了新的视角和方法. 接下来, 将介绍希尔伯特第 16 问题的弱化处理.

基于扰动的 *Hamilton* 系统, 我们考虑如下:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} + \mu q(x,y,\mu), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} + \mu p(x,y,\mu), \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 μ 为小参数, 设 $\mu=0$ 时, 系统 (1.2) 的首次积分为 $H(x,y)=h$. 对于系统 (1.2), 在 $\mu=0$ 的条件下, 我们把闭轨道参数方程用 $x=\varphi(t,h)$, $y=\phi(t,h)$ 来表示, 其中 $T=T(h)$ 就是这个闭轨线的周期函数. 当 $h_1<h<h_2$ 时, $H(x,y)=h$ 是一族闭轨线.

定理 1.1 当 $\mu=0$ 时, 设 $x=\varphi(t)$, $y=\phi(t)$ 是为扰动的 *Hamilton* 系统的闭轨线 Γ^{h_0} 的参数方程, $T=T(h_0)$ 是 Γ^{h_0} 的周期函数. 当 $0<|\mu|\ll 1$ 时, $I(h_0)$ 和 $I'(h_0)$ 满足

$$I(h_0) = \int_0^{T_0} \left[p(\varphi_0,\phi_0,0)\dot{\varphi} - q(\varphi_0,\phi_0,0)\dot{\phi} \right] dt = 0, \tag{1.3}$$

$$I'(h_0) = \int_0^{T_0} \left[p'_x(\varphi_0,\phi_0,0) - q'_y(\varphi_0,\phi_0,0) \right] dt \neq 0, \tag{1.4}$$

且存在 $\mu>0$, $\delta>0$, 使得下述条件 1 和 2 成立.

条件 1: $\forall\ \mu$, $|\mu|<\delta$, 系统 (1.4) 在曲线 Γ^{h_0} 的周围存在极限环 L_μ , 使得当 $\mu\to 0$, 有 $L_\mu \to \Gamma^{h_0}$ 成立.

条件 2: 当 $\mu I'(h_0)<0$ 时, 得到的是稳定的极限环. 当 $\mu I'(h_0)>0$ 时, 得到的是不稳定的极限环.

基于上述定理 1.1, 张芷芬教授在文献 [20] 和陈翔炎教授在文献 [21] 中进一步推广了定理 1.1, 他们将其从存在一个特定 h_0 的情况, 拓展到存在多个 h 值的情况, 即将定理 1.1 中 h_0 换成 h, 定理依然成立.

当我们对 Γ^h 上所形成的闭轨线进行积分时, 即对 (1.3) 式和 (1.4) 式中的 t 进行积分处理, 那么 (1.3) 式和 (1.4) 式可以经过两步换算为:

$$I(h) = \oint_{\Gamma^h} \left[p(\varphi, \phi, 0) - q(\varphi, \phi, 0)\right] dx = 0, \tag{1.5}$$

$$I'(h) = \oint_{\Gamma^h} \left[p'_x(\varphi, \phi, 0) - q'_y(\varphi, \phi, 0)\right] dx \neq 0, \tag{1.6}$$

把上述闭轨线所围成的内部区域设为 $\Gamma^h(D)$, 根据格林公式, 简单换算得

$$I(h) = \iint\limits_{\Gamma^h(D)} \left[p'_x(x, y) + q'_y(x, y)\right] dxdy. \tag{1.7}$$

对于 (1.7) 式, 我们有, 当 $h \in (h_1, h_2)$ 时, 通过分析积分函数 $I(h)$ 的零点分布, 我们可以得到受到扰动后 *Hamilton* 系统 (1.2) 形成的极限环数量.

1.1.2 二次系统的分类

对于系统 (1.1) 来说, 当 $n = 2$, 则称系统 (1.1) 为二次多项式系统, 定义二次可积系统为可以获得首次积分的二次多项式系统 [22]. *Iliev* 在文献 [23] 中提供了至少一个中心的二次系统的复数形式分类, 其中 a, b, c 属于实数集, 如下:

(1) $\dot{z} = -iz - z^2 + 2|z|^2 + (b + ic)\bar{z}^2$, *Hamilton* 型 (Q_3^H);

(2) $\dot{z} = -iz + az^2 + 2|z|^2 + b\bar{z}^2$, 可逆型 (Q_3^R);

(3) $\dot{z} = -iz + 4z^2 + 2|z|^2 + (b + ic)\bar{z}^2, |b + ic| = 2$, 余维 4 型 (Q_4);

(4) $\dot{z} = -iz + z^2 + (b + ic)\bar{z}^2$, 广义 $Lotka - Volterrra$ 型 (Q_3^{LV});

(5) $\dot{z} = -iz + |z|^2$, *Hamilton* 三角型.

当二次系统 X_H 为通有的 *Hamilton* 系统时, X_H 满足 $X_H \in Q_3^H \setminus \left\{Q_3^R \cup Q_4 \cup Q_3^{LV}\right\}$. 当二次系统 X_H 为退化的 *Hamilton* 系统时, X_H 满足 $X_H \in Q_3^H \cap \left\{Q_3^R \cup Q_4 \cup Q_3^{LV}\right\}$.

1.1.3 二次可逆系统及 $Abel$ 积分

在可逆型 (Q_3^R) 中, 令 $z=p+ki$, 其中 $p,k\in R$, 则可以化为:

$$\begin{cases} \dot{p}=(a+b+2)p^2-(a+b-2)k^2+k, \\ \dot{k}=-p[1-2(a-b)k]. \end{cases} \tag{1.8}$$

令 $Y=p$, $X=1-2(a-b)k$, $d\tau=-2(a-b)dt$, 则我们可以把方程组 (1.8) 化为

$$\begin{cases} \dot{X}=-XY, \\ \dot{Y}=-\frac{a+b+2}{2(a-b)}Y^2+\frac{a+b-2}{8(a-b)^3}X^2-\frac{b-1}{2(a-b)^3}X-\frac{a-3b+2}{8(a-b)^3}. \end{cases} \tag{1.9}$$

在文献 [24] 中给出了系统 (1.9) 的首次积分, 具体形式如下:

$$H(X,Y)=X^{\lambda}\left[\frac{1}{2}Y^2+\frac{1}{8(a-b)^2}\left(\frac{a+b-2}{a-3b-2}X^2+2\frac{b-1}{b+1}X+\frac{a-3b+2}{a+b+2}\right)\right], \tag{1.10}$$

其中 $\lambda=-(a+b+2)/(a-b)$, 上述首次积分的积分因子为 $N(X,Y)=X^{\lambda-1}$.

当我们研究系统 (1.9) 受到 n 次扰动后, 具体的系统如下:

$$\begin{cases} \dot{X}=-XY+\mu f(X,Y), \\ \dot{Y}=-\frac{a+b+2}{2(a-b)}Y^2+\frac{a+b-2}{8(a-b)^3}X^2-\frac{b-1}{2(a-b)^3}X-\frac{a-3b+2}{8(a-b)^3}+\mu g(X,Y), \end{cases} \tag{1.11}$$

其中 $f(X,Y)=\sum_{0\le i+j\le n}a_{ij}X^iY^j$ 和 $g(X,Y)=\sum_{0\le i+j\le n}b_{ij}X^iY^j$ 是关于 X 和 Y 的 n 阶多项式并且 μ 为小参数 $(0<\mu\ll 1)$.

设 $\{\Gamma_h\}=\{(X,Y)\mid H(X,Y)=h, h\in\Omega\}$ 为系统 (1.11) 的闭轨线族, Ω 是闭轨线族 $\{\Gamma_h\}$ 的最大区间, 对于研究在系统 (1.9) 闭轨线所包围的极限环问题, 实质上是研究 Γ_h 附近关于 h 的后继映射

$$d(h,\mu)=\mu I_1(h)+\mu^2 I_2(h)+\cdots+\mu^k I_k(h)+o(\mu^{k+1}), \tag{1.12}$$

的孤立零点上界问题, 这里 $I(h)$ 指的是 $Abel$ 积分, 且

$$I(h)=\oint_{\Gamma_h}N(X,Y)g(X,Y)dX-N(X,Y)f(X,Y)dY. \tag{1.13}$$