

# 第二章 一元二次方程

---

## 专题3 一元二次方程的解法



# 目录

CONTENTS



专题解读



典例讲练

01

# 专题解读



## ◎问题综述

一元二次方程常与几何图形及实际应用问题等结合考查，在考试中出现得比较频繁，所以如何在考试提高解题效率就非常重要.在解一元二次方程时，关键在于灵活选择解法，以提高计算能力.有时可能需要将几种解法综合起来使用，而选择最合适解法的依据是善于观察方程的具体结构特征.

## ◎要点归纳

一元二次方程各种解法的关键.

(1) 直接开平方法: 将方程化为  $(mx + n)^2 = a$  ( $a \geq 0$ ) 的形式;

(2) 配方法: 先把二次项系数化为1, 再把方程的两边都加上一次项系数 一半 的平方;

(3) 公式法: 把一元二次方程化为 一般形式, 正确写出

$a$ ,  $b$ ,  $c$  的值;

0

(4) 因式分解法: 使方程的右边为 0;

[返回目录](#)

(5) 换元法：把某一部分看作一个整体，用一个新的未知数代替。

其中配方法与公式法是通法。

02

# 典例讲练



## 类型一 用配方法、公式法解一元二次方程

**例1** (1) 用配方法解下列方程：

①  $x^2 + 2x - 143 = 0$ ；      ②  $3x^2 + 3x - 1 = 0$ .

**【思路导航】** ①先移项，再在两边都加上1，即可配方；②先移项，然后把两边都除以3，再在两边都加上一次项系数一半的平方即可配方.

解：①移项，得  $x^2 + 2x = 143$ .

配方，得  $x^2 + 2x + 1 = 143 + 1$ ，即  $(x + 1)^2 = 144$ .

开方，得  $x + 1 = \pm 12$ .

解得  $x_1 = 11$ ，  $x_2 = -13$ .

②整理，得  $x^2 + x = \frac{1}{3}$ .

配方，得  $x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ,

即  $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}$ .

开方，得  $x + \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{21}}{6}$ .

解得  $x_1 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{6}$ ,  $x_2 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{6}$ .

**【点拨】**配方法的一般步骤：①将一元二次方程化为一般形式；②二次项系数化为1；③常数项移到等号右边；④等号两边都加上一次项系数一半的平方，并配方；⑤开方，求解.配方法的关键在于第②④两步，这两步一定不能漏掉.配方法一般在直接解方程中很少用到，但在求最大值或最小值、比较代数式的大小、解特殊方程中常用到.

(2) 用公式法解下列方程：

①  $2x^2 - 3x - 4 = 0$ ;

②  $2x^2 + 5x = 6x^2 + 5$ ;

③  $(x - 1)(3x + 2) = 4x + 6$ .

**【思路导航】** ①先判断判别式 $\Delta$ 的值，再用公式法求解；②先整理成一般形式，再用判别式的值判断是否能用公式法求解；③先化简，并整理成一般形式，再用判别式的值判断是否能用公式法求解。

解：①这里  $a=2$ ,  $b=-3$ ,  $c=-4$ .

$$\because b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 41 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{41}}{2 \times 2} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4},$$

$$\text{即 } x_1 = \frac{3 + \sqrt{41}}{4}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{41}}{4}.$$

②整理, 得  $4x^2 - 5x + 5 = 0$ .

这里  $a=4$ ,  $b=-5$ ,  $c=5$ .

$$\because b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 4 \times 5 = -55 < 0,$$

$\therefore$  原一元二次方程无解.

③整理，得 $3x^2 - 5x - 8 = 0$ .

这里 $a = 3$ ， $b = -5$ ， $c = -8$ .

$$\because b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-8) = 121 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{121}}{2 \times 3} = \frac{5 \pm 11}{6},$$

$$\text{即 } x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{8}{3}.$$

**【点拨】**用公式法求解一元二次方程的一般步骤：①化简，并整理成 $ax^2+bx+c=0$  ( $a\neq 0$ ) 的形式；②计算判别式 $\Delta$ 的值，判断方程是否有解；③若 $\Delta\geq 0$ ，则可用公式法求解.需要注意的是，若 $\Delta>0$ ，则原方程有两个不同的实数根；若 $\Delta=0$ ，则原方程有两个相等的实数根；若 $\Delta<0$ ，则原方程无实数根.此题中，第③问还可以用因式分解法求解.

## 变式训练

1. 用配方法解下列方程：

$$(1) x^2 - 6x - 3 = 0;$$

$$\text{解: } x_1 = 3 + 2\sqrt{3}, \quad x_2 = 3 - 2\sqrt{3}.$$

$$(2) \frac{1}{3}x^2 + 3x = 2.$$

$$\text{解: } x_1 = \frac{-9 + \sqrt{105}}{2}, \quad x_2 = \frac{-9 - \sqrt{105}}{2}.$$

## 2. 用公式法解下列方程:

$$(1) 4x^2 - 8x + 3 = 0;$$

$$\text{解: } x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}.$$

$$(2) (2x + 1)(x - 2) = 6;$$

$$\text{解: } x_1 = \frac{3 + \sqrt{73}}{4}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{73}}{4}.$$

$$(3) 7x^2 + 9 = 6x^2 - 26x - 160.$$

$$\text{解: } x_1 = x_2 = -13.$$

## 类型二 用因式分解法、换元法解方程

**例2** (1) 用因式分解法解下列方程：

①  $(4x+1)^2 - x^2 = 0$ ;

②  $(x-4)^2 - 2x + 8 = 0$ .

**【思路导航】** ①先用平方差公式进行因式分解，再解方程；②先用提公因式法进行因式分解，再解方程。

解：①原方程可变形为  $(4x+1+x)(4x+1-x)=0$ 。

$$\therefore (5x+1)(3x+1)=0.$$

$$\therefore 5x+1=0, \text{ 或 } 3x+1=0.$$

$$\therefore x_1 = -\frac{1}{5}, \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：  
<https://d.book118.com/726121040020010154>