浙江省宁波市镇海中学2024届高三下学期适应性测试数学试卷

说明:本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，共150分.

考试时间120分钟，本次考试不得使用计算器，请考生将所有题目都做在答题卷上.

一、单选题:本大题共8小题，每小题5分，共40分.

1. 设集合 $P=\left\{x|2^x>1\right\}$，$Q=\{x\mid x\in \mathbf{Z},|x|\le 3\}$，则 $P\cap Q$ 的子集个数是（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 8　　D. 16

【答案】C

【解析】

【分析】化简集合 P,Q，求出 $P\cap Q$ 判断子集个数.

【详解】$\because P=\left\{x\left|2^x>1\right.\right\}=\left\{x\left|x>0\right.\right\}$，$Q=\left\{x\left|x\in \mathrm{Z},|x|\le 3\right.\right\}=\left\{-3,-2,-1,0,1,2,3\right\}$，

$\therefore P\cap Q=\left\{1,2,3\right\}$，所以 $P\cap Q$ 的子集个数为 $2^3=8$ 个.

故选：C.

2. 已知复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in \mathrm{R}$，$\mathrm{i}$ 为虚数单位)，若 $|z|=1$ 且 $|z-\mathrm{i}|=1$，则 $|z-2\mathrm{i}|=$（　　）

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】根据复数的模求出 a,b，再根据复数的模的计算公式即可得解.

【详解】由 $|z|=1$ 且 $|z-\mathrm{i}|=1$，得 $\begin{cases}a^2+b^2=1\\ a^2+(b-1)^2=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=\dfrac{1}{2}\\ a^2=\dfrac{3}{4}\end{cases}$，

则 $|z-2\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+(b-2)^2}=\sqrt{\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{4}}=\sqrt{3}$.

故选：B.

3. 已知 $\triangle ABC$ 是边长为1的正三角形，$\overrightarrow{AN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{NC},P$ 是 BN 上一点且 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{9}\overrightarrow{AC}$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=$（　　）

A. $\dfrac{2}{9}$　　B. $\dfrac{1}{9}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. 1

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意得 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+\frac{8}{9}\overrightarrow{AN}$，由 P,B,N 三点共线求得 $m=\frac{1}{9}$，利用向量数量积运算求解.

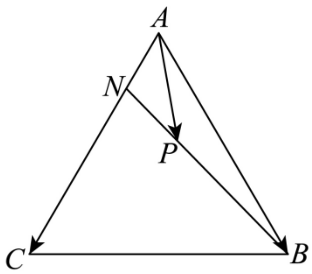
【详解】$\because \overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$，$\therefore \overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}+\frac{8}{9}\overrightarrow{AN}$，

而 P,B,N 三点共线，$\therefore m+\frac{8}{9}=1$，即 $m=\frac{1}{9}$，

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$，

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}\times\cos 60^{\circ}=\frac{2}{9}$.

故选：A.



4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足点 (n,a_n) 在直线 $y=\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}$ 上，$\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 nS_n 的最小值为

（　　）

A. -47　　B. -48　　C. -49　　D. -50

【答案】C

【解析】

【分析】由题意可得数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，根据等差数列的求和公式求出 S_n，从而可得 $nS_n=\frac{n^2(n-10)}{3}$，设 $f(x)=\frac{x^2(x-10)}{3}(x>0)$，利用导数研究其单调性，结合 $n\in\mathbf{N}^*$ 即可求解.

【详解】因为数列 $\{a_n\}$ 满足点 (n,a_n) 在直线 $y=\frac{2}{3}x-\frac{11}{3}$ 上，

所以 $a_n=\frac{2}{3}n-\frac{11}{3}$.

因为 $a_n-a_{n-1}=\left(\frac{2}{3}n-\frac{11}{3}\right)-\left[\frac{2}{3}(n-1)-\frac{11}{3}\right]=\frac{2}{3}(n\geq 2)$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $a_1=\frac{2}{3}-\frac{11}{3}=-3$，公差为 $\frac{2}{3}$ 的等差数列，

所以 $S_n=(-3)n+\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{n(n-10)}{3}$，

则 $nS_n=\dfrac{n^2(n-10)}{3}$.

设 $f(x)=\dfrac{x^2(x-10)}{3}(x>0)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{3}x(3x-20)$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{20}{3}\right)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(\dfrac{20}{3},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{20}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{20}{3},+\infty\right)$ 上单调递增.

又 $n\in\mathbf{N}^*$，$f(6)=\dfrac{6^2\times(-4)}{3}=-48, f(7)=\dfrac{7^2\times(-3)}{3}=-49$，

所以 $f(n)_{\min}=-49$，即 nS_n 的最小值为 -49.

故选:C.

5. 已知棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1, M, N$ 分别是 AB 和 BC 的中点，则 MN 到平面 A_1C_1D 的距离为（　　）

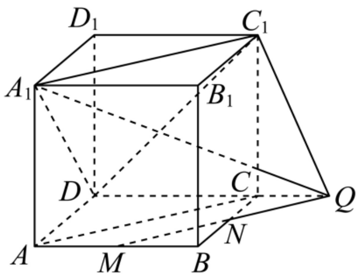
A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　　　B. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】延长 MN 交 DC 延长线于点 Q，连接 A_1Q, C_1Q，由几何关系证明 MN 到平面 A_1C_1D 的距离即点 Q 到平面 A_1C_1D 的距离，再由等体积法 $V_{Q-A_1DC_1}=V_{A_1-QDC_1}$ 求出结果即可；

【详解】



延长 MN 交 DC 延长线于点 Q，连接 A_1Q, C_1Q，AC，

因为 M, N 分别是 AB 和 BC 的中点，则 $MN//AC$，

由正方体的性质可得 $AC//A_1C_1$，所以 $MN//A_1C_1$，

又 $A_1C_1\subset$ 平面 A_1C_1D，$MN\not\subset$ 平面 A_1C_1D，所以 $MN//$ 平面 A_1C_1D，

所以 MN 到平面 A_1C_1D 的距离即点 Q 到平面 A_1C_1D 的距离，设为 h，

则 $V_{Q-A_1DC_1}=V_{A_1-QDC_1}$，

因为正方体的棱长为 1，

所以 $DQ=\dfrac{3}{2}$，$A_1D=DC_1=A_1C_1=\sqrt{2}$，，

所以 $\dfrac{1}{3}S_{\triangle A_1DC_1}\cdot h=\dfrac{1}{3}S_{DQC_1}\cdot A_1D_1$，即 $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\sqrt{2}\right)^2\times h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times1\times1\Rightarrow h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

故选：C.

6. 已知函数 $f(x)=2\cos^2\omega x+\sin2\omega x-1(\omega>0)f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\left|x_1-x_2\right|$ 的最小值为 $\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\omega=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】先由二倍角的余弦公式，辅助角公式化简 $f\left(x\right)$，再由 $y=\sin x$ 与 $y=\dfrac{1}{2}$ 相交的两个交点的最近距离为 $\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}$，结合 $\left[\left(2\omega x_1+\dfrac{\pi}{4}\right)-\left(2\omega x_2+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]_{\min}=2\omega\left|x_1-x_2\right|_{\min}=\dfrac{2\pi}{3}$ 解出即可.

【详解】$f(x)=2\cos^2\omega x+\sin2\omega x-1=\cos2\omega x+\sin2\omega x=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

因为 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\sin\left(2\omega x_1+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2\omega x_2+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$，

因为当 $x\in\left[0,2\pi\right]$ 时，$\sin x=\dfrac{1}{2}$ 对应的 x 的值分别为 $\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}$，

所以 $y=\sin x$ 与 $y=\dfrac{1}{2}$ 相交的两个交点的最近距离为 $\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{3}$，

又 $\left|x_1-x_2\right|$ 的最小值为 $\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $\left[\left(2\omega x_1+\dfrac{\pi}{4}\right)-\left(2\omega x_2+\dfrac{\pi}{4}\right)\right]_{\min}=2\omega|x_1-x_2|_{\min}=\dfrac{2\pi}{3}$，

即 $2\omega\times\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}\Rightarrow\omega=\dfrac{1}{2}$，

故选：A.

7. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，点 A，B 在 C 上，直线 F_1A 倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$，且 $\overrightarrow{F_1A}=2\overrightarrow{F_2B}$，则 C 的离心率为（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　　　C. $\dfrac{1}{2}$　　　　D. $\dfrac{2}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】由椭圆焦半径公式求出 $|F_1A|,|F_2B|$，结合条件列式运算得解.

【详解】根据题意，$F_1A//F_2B$，所以直线 F_2B 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$，

由椭圆焦半径公式得 $|F_1A|=\dfrac{b^2}{a-c\cos\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{2b^2}{2a-c}$，$|F_2B|=\dfrac{b^2}{a+c\cos\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{2b^2}{2a+c}$，

$\because\overrightarrow{F_1A}=2\overrightarrow{F_2B}$，$\therefore|F_1A|=2|F_2B|$，即 $2a+c=2(2a-c)$，

化简得 $2a=3c$，$\therefore e=\dfrac{2}{3}$.

故选：D.

8. 已知 $a=\dfrac{1}{2}+\ln 2,b=\dfrac{2}{3}+\dfrac{\ln 3}{2},c=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2\ln 5}{5}$，则（　　）

A. $c>b>a$　　　　B. $b>a>c$　　　　C. $a>b>c$　　　　D. $a>c>b$

【答案】B

【解析】

【分析】构造 $f(x)=\ln(1+x)-x(x>0)$，利用导数证明 $\ln(1+x)<x(x>0)$，代入 $x=\dfrac{1}{3}$ 可比较 a,b 的大小，根据对数函数的性质可判断 a,c 的大小，从而可求解.

【详解】设 $f(x)=\ln(1+x)-x(x>0)$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{-x}{1+x}<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)<f(0)=0$，

所以$\ln\left(1+x\right)<x\left(x>0\right)$，所以$\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)<\frac{1}{3}$，即$\ln\frac{4}{3}<\frac{1}{3}$，

所以$2\ln 2<\frac{1}{3}+\ln 3$，即$\ln 2<\frac{1}{6}+\frac{\ln 3}{2}$，

所以$\frac{1}{2}+\ln 2<\frac{2}{3}+\frac{\ln 3}{2}$，即$a<b$.

由$25<32$，可得$\ln 25<\ln 32$，即$2\ln 5<5\ln 2$，即$\frac{2\ln 5}{5}<\ln 2$，

所以$\frac{1}{2}+\frac{2\ln 5}{5}<\frac{1}{2}+\ln 2$，即$c<a$.

综上所述，$b>a>c$.

故选:B.

二、多选题:本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.

9. 下列选项中正确的有（　　）

A. 若两个具有线性相关关系的变量的相关性越强，则线性相关系数r的值越接近于 1

B. 在残差图中，残差点分布的水平带状区域越窄，说明模型的拟合精度越高

C. 已知随机变量X服从正态分布$N\left(2,\sigma^2\right),P(X<4)=0.8$，则$P(2<X<4)=0.2$

D. 若数据$2x_1+1,2x_2+1,\ldots,2x_{16}+1$的方差为 8，则数据$x_1,x_2,\ldots,x_{16}$的方差为 2

【答案】BD

【解析】

【分析】由线性相关系数的性质可得 A 错误；由残差图的意义可得 B 正确；由正态分布的对称性可得 C 错误；利用方差的性质可得 D 正确；

【详解】A：若两个具有线性相关关系的变量的相关性越强，则线性相关系数$|r|$的值越接近于 1，故 A 错误；

B：在残差图中，残差点分布的水平带状区域越窄，说明模型的拟合精度越高，故 B 正确；

C：由随机变量X服从正态分布$N\left(2,\sigma^2\right),P(X<4)=0.8$，

所以根据正态分布的对称性可得$P(2<X<4)=P\left(X<4\right)-P\left(X\le 2\right)=0.8-0.5=0.3$，故 C 错误；

D：设数据$x_1,x_2,\ldots,x_{16}$的方差为m，

因为数据$2x_1+1,2x_2+1,\ldots,2x_{16}+1$的方差为 8，

所以$2^2\times m=8$，解得$m=2$，故 D 正确；

故选：BD.

10. 设抛物线 $y^2=4x$，弦 AB 过焦点 F，过 A，B 分别作抛物线的切线交于 Q 点，则下列结论一定成立的是（　　）

A. 存在点 Q，使得 $\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}>0$

B. $|QF|$ 的最小值为 2

C. $|QA|^2=|AF|\cdot|AB|$

D. $\triangle ABQ$ 面积的最小值为 4

【答案】BCD

【解析】

【分析】设 $l_{AB}:x=ty+1,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,联立直线 AB 和抛物线的方程，得 $y_1+y_2=4t,y_1y_2=-4$，根据导数的几何意义求出 QA,QB 的方程，可得 $Q(-1,2t)$，$QF\perp AB$，再逐项判断即可.

【详解】易知 $F(1,0)$，准线方程为 $x=-1$，设 $l_{AB}:x=ty+1,A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y^2=4x\\x=ty+1\end{cases}$，消去 x 可得 $y^2-4ty-4=0$，

$\Delta=(-4t)^2-4\times1\times(-4)=16t^2+16>0$，则 $y_1+y_2=4t,y_1y_2=-4$.

不妨设 A 在第一象限，因为 $y^2=4x$，则 $y=2\sqrt{x}$，

则 $y'=2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

则 QA 的方程为 $y-y_1=\frac{1}{\sqrt{x_1}}(x-x_1)$，即 $y-y_1=\frac{2}{y_1}(x-x_1)$，

即 $y_1y-y_1^2=2x-2x_1$，即 $y_1y-4x_1=2x-2x_1$，即 $y_1y=2x+2x_1$.

同理可得 QB 的方程为 $y_2y=2x+2x_2$.

联立 $\begin{cases}y_1y=2x+2x_1\\y_2y=2x+2x_2\end{cases}$，可得 $\begin{cases}x=\frac{y_1y_2}{4}=-1\\y=\frac{y_1+y_2}{2}=2t\end{cases}$，即 $Q(-1,2t)$，

则 Q 在抛物线的准线 $x=-1$ 上.

又 $k_{QF}=\frac{2t}{-2}=-t$，所以 $k_{QF}\cdot k_{AB}=-1$，即 $QF\perp AB$.

对于 A，因为 $k_{QA}\cdot k_{QB}=\frac{2}{y_1}\cdot\frac{2}{y_2}=\frac{4}{y_1y_2}=-1$，

所以$QA \perp QB$，即$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 0$，故A错误；

对于B，设准线$x=-1$与x轴交于点H，

因为Q在抛物线的准线$x=-1$上，

所以$|QF| \geq |HF| = 2$，即$|QF|$的最小值为2，故B正确；

对于C，因为$QA \perp QB$，$QF \perp AB$，

所以$\mathrm{Rt}\triangle AQB \backsim \mathrm{Rt}\triangle AQF$，

所以$\dfrac{|AQ|}{|AB|} = \dfrac{|AF|}{|AQ|}$，即$|QA|^2 = |AF| \cdot |AB|$，故C正确；

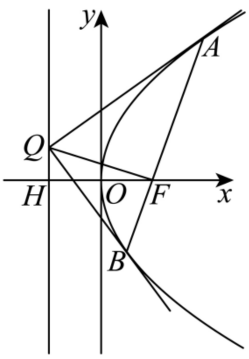
对于D，$|AB| = \sqrt{1+t^2} \cdot \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} = \sqrt{1+t^2} \cdot \sqrt{16t^2+16} = 4(1+t^2)$.

设Q到直线AB的距离为d,则$d = \dfrac{|2t^2+2|}{\sqrt{1+t^2}} = 2\sqrt{1+t^2}$，

所以$S_{\triangle QAB} = \dfrac{1}{2}|AB| \cdot d = 4(1+t^2) \cdot \sqrt{1+t^2} = 4\sqrt{(1+t^2)^3} \geq 4$，当且仅当$t=0$时取等，

故$\triangle ABQ$面积的最小值为4，故D正确.

故选:BCD.



【点睛】关键点睛：

已知切点$M(x_0, y_0)$和抛物线$y^2 = 2px(p>0)$，则抛物线在$M(x_0, y_0)$处的切线方程为

$y_0 y = p(x + x_0)$；

已知切点$M(x_0, y_0)$和抛物线$x^2 = 2py(p>0)$，则抛物线在$M(x_0, y_0)$处的切线方程为

$x_0 x = p(y + y_0)$.

11. 已知数列$\{u_n\}$，其前n项和为S_n，若存在常数$M>0$，对任意的$n \in \mathbf{N}^*$，恒有

$|u_{n+1}-u_n|+|u_n-u_{n-1}|+\cdots+|u_2-u_1|\le M$，则称$\{u_n\}$为$B-$数列.则下列说法正确的是（　　）

A. 若$\{u_n\}$是以 1 为首项，$q(|q|<1)$为公比的等比数列，则$\{u_n\}$为$B-$数列

B. 若$\{u_n\}$为$B-$数列，则$\{S_n\}$也为$B-$数列

C. 若$\{S_n\}$为$B-$数列，则$\{u_n\}$也为$B-$数列

D. 若$\{a_n\},\{b_n\}$均为$B-$数列，则$\{a_n\cdot b_n\}$也为$B-$数列

【答案】ACD

【解析】

【分析】对 A，根据题意可得$u_n=q^{n-1}$，利用$B-$数列的定义求解判断；对 B，举反例$u_n=1\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$不合题意；对 C，根据条件得$|u_{n+1}|+|u_n|+\cdots+|u_2|\le M$，结合$B-$数列的定义和绝对值三角不等式可判断；对 D，由数列$\{a_n\},\{b_n\}$是$B-$数列，可得$|a_n|\le M_1+|a_1|$，$|b_n|\le M_2+|b_1|$，结合绝对值三角不等式可证$|a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_n|\le K_2M_1+K_1M_2$，得解.

【详解】对于 A，$u_n=q^{n-1}$，于是$|u_{n+1}-u_n|=|q^n-q^{n-1}|=(1-q)|q^{n-1}|$，

$\therefore|u_{n+1}-u_n|+|u_n-u_{n-1}|+\cdots+|u_2-u_1|=(1-q)\left(|q^0|+|q^1|+\cdots+|q^{n-1}|\right)$

$=(1-q)\cdot\dfrac{1-|q^n|}{1-|q|}<\dfrac{1-q}{1-|q|}$，故 A 正确；

对于 B，若$u_n=1\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，显然数列$\{u_n\}$是$B-$数列，$S_n=n$，

但$|S_{n+1}-S_n|+|S_n-S_{n-1}|+\cdots+|S_2-S_1|=n$，所以数列$\{S_n\}$不是$B-$数列，故 B 错误；

对于 C，因为数列$\{S_n\}$是$B-$数列，

所以存在正数M，对于任意的$n\in\mathrm{N}^*$，

有$|S_{n+1}-S_n|+|S_n-S_{n-1}|+\cdots+|S_2-S_1|\le M$，即$|u_{n+1}|+|u_n|+\cdots+|u_2|\le M$，

所以$|u_{n+1}-u_n|+|u_n-u_{n-1}|+\cdots+|u_2-u_1|\le|u_{n+1}|+2|u_n|+\cdots+2|u_2|+|u_1|$

$\le2|u_{n+1}|+2|u_n|+\cdots+2|u_2|+|u_1|=2M+|u_1|$，所以数列$\{u_n\}$是$B-$数列，故 C 正确；

对于 D，若数列$\{a_n\},\{b_n\}$是$B-$数列，

则存在正数M_1,M_2，对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，有

$|a_{n+1}-a_n|+|a_n-a_{n-1}|+\cdots+|a_2-a_1|\le M_1$，$|b_{n+1}-b_n|+|b_n-b_{n-1}|+\cdots+|b_2-b_1|\le M_2$，

因为$|a_n|=|a_n-a_{n-1}+a_{n-1}-a_{n-2}+\cdots+a_2-a_1+a_1|\le|a_n-a_{n-1}|+\cdots|a_2-a_1|+|a_1|$

$\le M_1+|a_1|$，

同理可得$|b_n|\le M_2+|b_1|$，记$K_1=M_1+|a_1|$，$K_2=M_2+|b_1|$，

则有$|a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_n|=|a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_{n+1}+a_nb_{n+1}-a_nb_n|\le|b_{n+1}||a_{n+1}-a_n|+|a_n||b_{n+1}-b_n|$

$\le|K_2||a_{n+1}-a_n|+|K_1||b_{n+1}-b_n|\le K_2M_1+K_1M_2$，所以数列$\{a_n\cdot b_n\}$也是$B-$数列，故 D 正确.

故选：ACD.

【点睛】关键点睛：本题是新定义问题的求解，关键是理解新定义，将新定义问题转化为熟悉的问题来进行求解.

三、填空题:本大题共 3 小题，每题 5 分，共 15 分.答案填在题中的横线上.

12. 已知双曲线$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的离心率$e=2$，则双曲线$C_2:\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$的渐近线方程为____________.

【答案】$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

【解析】

【分析】由双曲线$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的离心率$e=2$可得到$b=\sqrt{3}a$，再由焦点在$y$轴上的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{a}{b}x$求出即可.

【详解】因为双曲线$C_1:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的离心率$e=2$，

所以$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=2\Rightarrow b^2=3a^2\Rightarrow b=\sqrt{3}a$，

又双曲线$C_2:\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$，

所以渐近线方程为$y=\pm\dfrac{a}{b}x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，

故答案为：$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

13. 已知圆锥的轴截面面积为$3\sqrt{3}$，则该圆锥的外接球半径的最小值为____________.

【答案】2

【解析】

【分析】设圆锥的底面半径为r，高为h，可得$hr=3\sqrt{3}$，$R=\frac{1}{2}h+\frac{27}{2}h^{-3}$，设$f\left(h\right)=\frac{1}{2}h+\frac{27}{2}h^{-3}$，利用导数判断单调性求出最值.

【详解】设圆锥的底面半径为r，高为h，则$hr=3\sqrt{3}$，

设圆锥的外接球的半径为R，则无论球心O在圆锥内还是圆锥外，都有$R^2=\left(R-h\right)^2+r^2$，则

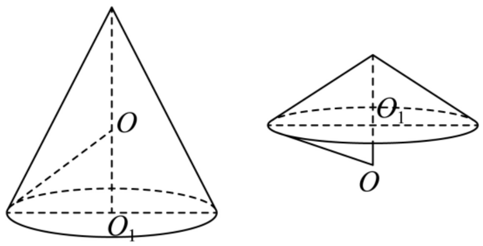
$R=\frac{r^2+h^2}{2h}=\frac{h^4+27}{2h^3}=\frac{1}{2}h+\frac{27}{2}h^{-3}$，

设$f\left(h\right)=\frac{1}{2}h+\frac{27}{2}h^{-3}$，则$f'\left(h\right)=\frac{1}{2}-\frac{81}{2}h^{-4}=\frac{h^4-81}{2h^4}=\frac{\left(h^2+9\right)\left(h+3\right)\left(h-3\right)}{2h^4}$，

当$0<h<3$时，$f'\left(h\right)<0$，$f\left(h\right)$单调递减，当$h>3$时，$f'\left(h\right)>0$，$f\left(h\right)$单调递增，

$\therefore f\left(h\right)_{\min}=f\left(3\right)=2$.

故答案为：2.



14. 面积为1的$\triangle ABC$满足$AB=2AC,AD$为$\angle BAC$的内角平分线且D在线段BC上，当边BC的长度最短时，$\frac{AD}{AC}$的值是____________.

【答案】$\frac{2\sqrt{10}}{5}$##$\frac{2}{5}\sqrt{10}$

【解析】

【分析】设$AC=m$，$\angle BAD=CAD=\alpha$，由$S_{\triangle ABC}=1$得$m^2\sin 2\alpha=1$，且$AD=\frac{2}{3m\sin\alpha}$，进而$AD=\frac{4m}{3}\cos\alpha$，在$\triangle ABC$中，由余弦定理结合基本不等式求得$BC$的最小值时，$\cos\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，从而得到答案.

【详解】设 $AC=m$，$\angle BAD=CAD=\alpha$，则 $\alpha=\dfrac{1}{2}\angle BAC\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，从而 $\tan\alpha>0$，

因为 $1=S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 2m\cdot m\cdot\sin 2\alpha=m^2\sin 2\alpha$，

又 $1=S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{2}\cdot 2m\cdot AD\sin\alpha+\dfrac{1}{2}\cdot m\cdot AD\sin\alpha=\dfrac{3}{2}\cdot m\cdot AD\sin\alpha$，

所以 $m^2\sin 2\alpha=1$，且 $AD=\dfrac{2}{3m\sin\alpha}$，

从而 $AD=\dfrac{2}{3m\sin\alpha}=\dfrac{2m^2\sin 2\alpha}{3m\sin\alpha}=\dfrac{4m}{3}\cos\alpha$，

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得，

$$BC^2=4m^2+m^2-2\cdot 2m\cdot m\cdot\cos 2\alpha=5m^2-4m^2\cos 2\alpha=\frac{m^2\left(5-4\cos 2\alpha\right)}{m^2\sin 2\alpha}$$

$$=\frac{5-4\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{5\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-4\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{9\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

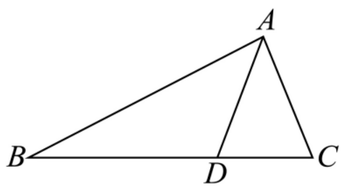
$$=\frac{9}{2}\tan\alpha+\frac{1}{2\tan\alpha}\geq 2\sqrt{\frac{9}{2}\tan\alpha\times\frac{1}{2\tan\alpha}}=3,$$

当且仅当 $\dfrac{9}{2}\tan\alpha=\dfrac{1}{2\tan\alpha}$ 即 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$ 时，等号成立，

所以当 BC 取最小值 $\sqrt{3}$ 时，$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，此时 $\cos\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{\frac{4}{3}m\cos\alpha}{m}=\dfrac{4}{3}\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

故答案为：$\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.



【点睛】关键点睛：本题解题的关键是利用余弦定理求出 BC 的表达式，并结合条件和基本不等式得到 BC 的最小值时的条件.

四、解答题:本大题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明.证明过程或演算步骤.

15. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-1$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性;