

## 2022-2023 学年山东省临沂市蒙阴县实验中学联考数学试题试卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在边长为 2 的菱形  $ABCD$  中， $BD = 2\sqrt{3}$ ，将菱形  $ABCD$  沿对角线  $AC$  对折，使二面角  $B-AC-D$  的余弦值为  $\frac{1}{3}$ ，则所得三棱锥  $A-BCD$  的外接球的表面积为 ( )

- A.  $\frac{2\pi}{3}$                       B.  $2\pi$                       C.  $4\pi$                       D.  $6\pi$

2. 已知  $a = \ln \sqrt[3]{3}$ ， $b = e^{-1}$ ， $c = \frac{3 \ln 2}{8}$ ，则  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $a > b > c$                       B.  $a > c > b$                       C.  $b > c > a$                       D.  $b > a > c$

3. 函数  $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$  的图象为  $C$ ，以下结论中正确的是 ( )

① 图象  $C$  关于直线  $x = \frac{5}{12}\pi$  对称；

② 图象  $C$  关于点  $(-\frac{\pi}{3}, 0)$  对称；

③ 由  $y = 2\sin 2x$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度可以得到图象  $C$ 。

- A. ①                      B. ①②                      C. ②③                      D. ①②③

4. 《周易》是我国古代典籍，用“卦”描述了天地世间万象变化。如图是一个八卦图，包含乾、坤、震、巽、坎、离、艮、兑八卦（每一卦由三个爻组成，其中“——”表示一个阳爻，“- - -”表示一个阴爻）若从八卦中任取两卦，这两卦的六个爻中恰有两个阳爻的概率为 ( )



- A.  $\frac{3}{56}$       B.  $\frac{3}{28}$       C.  $\frac{3}{14}$       D.  $\frac{1}{4}$

5. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的公差为 -2, 前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $a_2, a_3, a_4$  为某三角形的三边长, 且该三角形有一个内角为  $120^\circ$ , 则  $S_n$  的最大值为 ( )

- A. 5      B. 11      C. 20      D. 25

6. 正项等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $a_3 + a_7 - a_5^2 + 15 = 0$ , 则  $S_9 =$  ( )

- A. 35      B. 36      C. 45      D. 54

7. 已知角  $\alpha$  的顶点与坐标原点重合, 始边与  $x$  轴的非负半轴重合, 若点  $P(2, -1)$  在角  $\alpha$  的终边上, 则  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) =$  ( )

- A.  $-\frac{4}{5}$       B.  $\frac{4}{5}$       C.  $-\frac{3}{5}$       D.  $\frac{3}{5}$

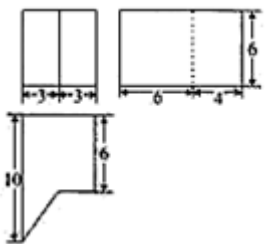
8. 已知  $a > b > 0, c > 1$ , 则下列各式成立的是 ( )

- A.  $\sin a > \sin b$       B.  $c^a > c^b$       C.  $a^c < b^c$       D.  $\frac{c-1}{b} < \frac{c-1}{a}$

9. 要得到函数  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  的图象, 只需将函数  $y = \sin 2x$  的图象 ( )

- A. 向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位      B. 向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位  
C. 向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位      D. 向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位

10. 若某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为 ( )



- A. 240      B. 264      C. 274      D. 282

11. 若函数  $f(x) = x^2 e^x - a$  恰有 3 个零点, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

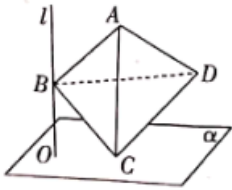
- A.  $\left(\frac{4}{e^2}, +\infty\right)$       B.  $\left(0, \frac{4}{e^2}\right)$       C.  $(0, 4e^2)$       D.  $(0, +\infty)$

12. 正四棱锥  $P-ABCD$  的五个顶点在同一个球面上, 它的底面边长为  $\sqrt{6}$ , 侧棱长为  $2\sqrt{3}$ , 则它的外接球的表面积为 ( )

- A.  $4\pi$       B.  $8\pi$       C.  $16\pi$       D.  $20\pi$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 如图，直线  $l \perp$  平面  $\alpha$ ，垂足为  $O$ ，三棱锥  $A-BCD$  的底面边长和侧棱长都为4， $C$  在平面  $\alpha$  内， $B$  是直线  $l$  上的动点，则点  $B$  到平面  $ACD$  的距离为\_\_\_\_\_，点  $O$  到直线  $AD$  的距离的最大值为\_\_\_\_\_。



14. 已知下列命题：

- ①命题“ $\exists x_0 \in \mathbb{R}, x_0^2 + 1 > 3x_0$ ”的否定是“ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 3x$ ”；
- ②已知  $p, q$  为两个命题，若“ $p \vee q$ ”为假命题，则“ $(\neg p) \wedge (\neg q)$ ”为真命题；
- ③“ $a > 2$ ”是“ $a > 5$ ”的充分不必要条件；
- ④“若  $xy = 0$ ，则  $x = 0$  且  $y = 0$ ”的逆否命题为真命题。

其中所有真命题的序号是\_\_\_\_\_。

15. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$  的左右焦点为  $F_1, F_2$ ，过  $F_2$  作  $x$  轴的垂线与  $C$  相交于  $A, B$  两点， $F_1B$  与  $y$  轴相交于  $D$ 。若  $AD \perp F_1B$ ，则双曲线  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_。

16. 某城市为了解该市甲、乙两个旅游景点的游客数量情况，随机抽取了这两个景点 20 天的游客人数，得到如下茎叶图：

甲			乙	
3 2	60		3 4 7	
8 6 4 2	61		1 2 5	
9 8 7 3 3 0	62		1 2 4 4 6 7	
5 4 3 2 1	63		3 5 6 7 9	
8 7 4	64		2 4 6	

由此可估计，全年（按 360 天计算）中，游客人数在 (625, 635) 内时，甲景点比乙景点多\_\_\_\_\_天。

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 设椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F$ ，右顶点为  $A$ ，已知椭圆离心率为  $\frac{1}{2}$ ，过点  $F$  且与  $x$  轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 3。

(I) 求椭圆  $C$  的方程；

(II) 设过点  $A$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  交于点  $B$  ( $B$  不在  $x$  轴上)，垂直于  $l$  的直线与  $l$  交于点  $M$ ，与  $y$  轴交于点  $H$ ，若  $BF \perp HF$ ，且  $\angle MOA \leq \angle MAO$ ，求直线  $l$  斜率的取值范围。

18. (12分)

某动漫影视制作公司长期坚持文化自信，不断挖掘中华优秀传统文化中的动漫题材，创作出一批又一批的优秀动漫影视作品，获得市场和广大观众的一致好评，同时也为公司赢得丰厚的利润.该公司2013年至2019年的年利润 $y$ 关于年份代号 $x$ 的统计数据如下表（已知该公司的年利润与年份代号线性相关）.

年份	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
年份代号 $x$	1	2	3	4	5	6	7
年利润 $y$ （单位：亿元）	29	33	36	44	48	52	59

(I) 求 $y$ 关于 $x$ 的线性回归方程，并预测该公司2020年（年份代号记为8）的年利润；

(II) 当统计表中某年年利润的实际值大于由(I)中线性回归方程计算出该年利润的估计值时，称该年为A级利润年，否则称为B级利润年.将(I)中预测的该公司2020年的年利润视作该年利润的实际值，现从2013年至2020年这8年中随机抽取2年，求恰有1年为A级利润年的概率.

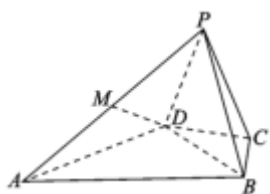
参考公式：
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

19. (12分) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $a_n$ 是 $-1$ 与 $a_{n+1}$ 的等差中项.

(1) 证明：数列 $\{a_n + 1\}$ 为等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{a_n + 2n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ .

20. (12分) 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 中， $\triangle ABD$ 为等边三角形， $\triangle BCD$ 是等腰三角形，且顶角 $\angle BCD = 120^\circ$ ， $PC \perp BD$ ，平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$ ， $M$ 为 $PA$ 中点.



(1) 求证： $DM \parallel$ 平面 $PBC$ ；

(2) 若 $PD \perp PB$ ，求二面角 $C-PA-B$ 的余弦值大小.

21. (12分) 对于正整数 $n$ ，如果 $k(k \in \mathbb{N}^*)$ 个整数 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 满足 $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k \leq n$ ，

且 $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$ ，则称数组 $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ 为 $n$ 的一个“正整数分拆”.记 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 均为偶数的“正整数分拆”的个数为 $f_n$ ， $a_1, a_2, \dots, a_k$ 均为奇数的“正整数分拆”的个数为 $g_n$ .

(I) 写出整数4的所有“正整数分拆”；

(II) 对于给定的整数  $n (n \geq 4)$ , 设  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  是  $n$  的一个“正整数分拆”, 且  $a_1 = 2$ , 求  $k$  的最大值;



(Ⅲ)对所有的正整数 $n$ , 证明: $f_n \leq g_n$ ;并求出使得等号成立的 $n$ 的值.

(注:对于 $n$ 的两个“正整数分拆” $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ 与 $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ , 当且仅当 $k = m$ 且 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_k = b_m$ 时, 称这两个“正整数分拆”是相同的.)

22. (10分) 已知抛物线 $C_1: x^2 = 2py (p > 0)$ 和圆 $C_2: (x+1)^2 + y^2 = 2$ , 倾斜角为 $45^\circ$ 的直线 $l_1$ 过抛物线 $C_1$ 的焦点, 且 $l_1$ 与圆 $C_2$ 相切.

(1) 求 $p$ 的值;

(2) 动点 $M$ 在抛物线 $C_1$ 的准线上, 动点 $A$ 在 $C_1$ 上, 若 $C_1$ 在 $A$ 点处的切线 $l_2$ 交 $y$ 轴于点 $B$ , 设 $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{MB}$ . 求证点 $N$ 在定直线上, 并求该定直线的方程.

## 参考答案

一、选择题: 本题共12小题, 每小题5分, 共60分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

取 $AC$ 中点 $N$ , 由题意得 $\angle BND$ 即为二面角 $B-AC-D$ 的平面角, 过点 $B$ 作 $BO \perp DN$ 于 $O$ , 易得点 $O$ 为 $VADC$ 的中心, 则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球球心在直线 $BO$ 上, 设球心为 $O_1$ , 半径为 $r$ , 列出方程 $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3} - r\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = r^2$

即可得解.

【详解】

如图, 由题意易知 $VABC$ 与 $VADC$ 均为正三角形, 取 $AC$ 中点 $N$ , 连接 $BN, DN$ ,

则 $BN \perp AC, DN \perp AC, \therefore \angle BND$ 即为二面角 $B-AC-D$ 的平面角,

过点 $B$ 作 $BO \perp DN$ 于 $O$ , 则 $BO \perp$ 平面 $ACD$ ,

由 $BN = ND = \sqrt{3}, \cos \angle BND = \frac{1}{3}$ 可得 $ON = BN \cdot \cos \angle BND = \frac{\sqrt{3}}{3}, OD = \frac{2\sqrt{3}}{3},$

$$OB = \sqrt{3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$\therefore ON = \frac{1}{3}ND$  即点  $O$  为  $VADC$  的中心,

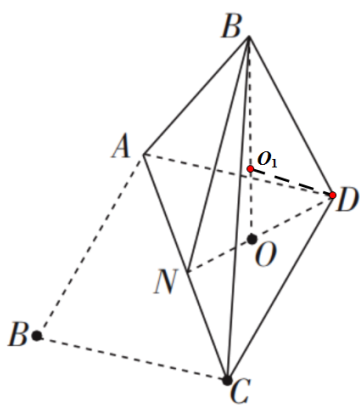
$\therefore$  三棱锥  $A-BCD$  的外接球球心在直线  $BO$  上, 设球心为  $O_1$ , 半径为  $r$ ,

$$\therefore BO_1 = DO_1 = r, \quad OO_1 = \frac{2\sqrt{6}}{3} - r,$$

$$\therefore \left(\frac{2\sqrt{6}}{3} - r\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = r^2 \text{ 解得 } r = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore \text{三棱锥 } A-BCD \text{ 的外接球的表面积为 } S = 4\pi r^2 = 4\pi \times \frac{3}{2} = 6\pi.$$

故选: D.



**【点睛】**

本题考查了立体图形外接球表面积的计算, 考查了空间想象能力, 属于中档题.

2、D

**【解析】**

构造函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , 利用导数求得  $f(x)$  的单调区间, 由此判断出  $a, b, c$  的大小关系.

**【详解】**

依题意, 得  $a = \ln \sqrt[3]{3} = \frac{\ln 3}{3}$ ,  $b = e^{-1} = \frac{\ln e}{e}$ ,  $c = \frac{3 \ln 2}{8} = \frac{\ln 8}{8}$ . 令  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ , 所以  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ . 所以函数  $f(x)$

在  $(0, e)$  上单调递增, 在  $(e, +\infty)$  上单调递减. 所以  $[f(x)]_{\max} = f(e) = \frac{1}{e} = b$ , 且  $f(3) > f(8)$ , 即  $a > c$ , 所以

$b > a > c$ . 故选: D.

**【点睛】**

本小题主要考查利用导数求函数的单调区间, 考查化归与转化的数学思想方法, 考查对数式比较大小, 属于中档题.

3、B

**【解析】**

根据三角函数的对称轴、对称中心和图象变换的知识, 判断出正确的结论.



**【详解】**

因为  $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ ,

又  $f(\frac{5\pi}{12}) = 2\sin(2 \times \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3}) = 2\sin\frac{3\pi}{6} = 2$ , 所以①正确.

$f(-\frac{\pi}{3}) = 2\sin(2 \times \frac{-\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = 2\sin(-\pi) = 0$ , 所以②正确.

将  $y = 2\sin 2x$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度, 得  $y = 2\sin[2(x - \frac{\pi}{3})] = 2\sin(2x - \frac{2\pi}{3})$ , 所以③错误.

所以①②正确, ③错误.

故选:B

**【点睛】**

本小题主要考查三角函数的对称轴、对称中心, 考查三角函数图象变换, 属于基础题.

4、C

**【解析】**

分类讨论, 仅有一个阳爻的有坎、艮、震三卦, 从中取两卦; 从仅有两个阳爻的有巽、离、兑三卦中取一个, 再取没有阳爻的坤卦, 计算满足条件的种数, 利用古典概型即得解.

**【详解】**

由图可知, 仅有一个阳爻的有坎、艮、震三卦, 从中取两卦满足条件, 其种数是  $C_3^2 = 3$ ;

仅有两个阳爻的有巽、离、兑三卦, 没有阳爻的是坤卦, 此时取两卦满足条件的种数是  $C_3^1 = 3$ , 于是所求的概率

$$P = \frac{3+3}{C_8^2} = \frac{3}{14}.$$

故选: C

**【点睛】**

本题考查了古典概型的应用, 考查了学生综合分析, 分类讨论, 数学运算的能力, 属于基础题.

5、D

**【解析】**

由公差  $d=-2$  可知数列单调递减, 再由余弦定理结合通项可求得首项, 即可求出前  $n$  项和, 从而得到最值.

**【详解】**

等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $-2$ , 可知数列单调递减, 则  $a_2, a_3, a_4$  中  $a_2$  最大,  $a_4$  最小,

又  $a_2, a_3, a_4$  为三角形的三边长, 且最大内角为  $120^\circ$ ,

由余弦定理得  $a_2^2 = a_3^2 + a_4^2 + a_3a_4$ ，设首项为  $a_1$ ，

即  $(a_1 - 2)^2 = (a_1 - 4)^2 + (a_1 - 6)^2 + (a_1 - 4)(a_1 - 6) = 0$  得  $(a_1 - 4)(a_1 - 9) = 0$ ，

所以  $a_1 = 4$  或  $a_1 = 9$ ，又  $a_4 = a_1 - 6 > 0$ ，即  $a_1 > 6$ ， $a_1 = 4$  舍去，故  $a_1 = 9$ ， $d = -2$

前  $n$  项和  $S_n = 9n + \frac{n(n-1)}{2} \times (-2) = -(n-5)^2 + 25$ 。

故  $S_n$  的最大值为  $S_5 = 25$ 。

故选：D

【点睛】

本题考查等差数列的通项公式和前  $n$  项和公式的应用，考查求前  $n$  项和的最值问题，同时还考查了余弦定理的应用。

6、C

【解析】

由等差数列  $\{a_n\}$  通项公式得  $a_3 + a_7 - a_5^2 + 15 = 0$ ，求出  $a_5$ ，再利用等差数列前  $n$  项和公式能求出  $S_9$ 。

【详解】

Q 正项等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ ，

$$a_3 + a_7 - a_5^2 + 15 = 0，$$

$$\therefore a_5^2 - 2a_5 - 15 = 0，$$

解得  $a_5 = 5$  或  $a_5 = -3$ （舍），

$$\therefore S_9 = \frac{9}{2}(a_1 + a_9) = 9a_5 = 9 \times 5 = 45，\text{ 故选 C.}$$

【点睛】

本题主要考查等差数列的性质与求和公式，属于中档题。解等差数列问题要注意应用等差数列的性质

$a_p + a_q = a_m + a_n = 2a_r$ （ $p + q = m + n = 2r$ ）与前  $n$  项和的关系。

7、D

【解析】

由题知  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，又  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ ，代入计算可得。

【详解】

由题知  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 又  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{3}{5}$ .

故选: D

【点睛】

本题主要考查了三角函数的定义, 诱导公式, 二倍角公式的应用求值.

8、B

【解析】

根据函数单调性逐项判断即可

【详解】

对 A, 由正弦函数的单调性知  $\sin a$  与  $\sin b$  大小不确定, 故错误;

对 B, 因为  $y=c^x$  为增函数, 且  $a>b$ , 所以  $c^a>c^b$ , 正确

对 C, 因为  $y=x^c$  为增函数, 故  $a^c > b^c$ , 错误;

对 D, 因为  $y = \frac{c-1}{x}$  在  $(0, +\infty)$  为减函数, 故  $\frac{c-1}{b} > \frac{c-1}{a}$ , 错误

故选 B.

【点睛】

本题考查了不等式的基本性质以及指数函数的单调性, 属基础题.

9、D

【解析】

直接根据三角函数的图象平移规则得出正确的结论即可;

【详解】

解: 函数  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]$ ,

$\therefore$  要得到函数  $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  的图象,

只需将函数  $y = \sin 2x$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位.

故选: D.

【点睛】

本题考查三角函数图象平移的应用问题, 属于基础题.

10、B

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/727053121050006100>