考试参考习题 – 系统复习

备考题库训练 – 习题强化

考前模拟测试 – 模拟演练

通关宝典梳理 – 真题体验

技巧提升冲刺 – 技能技巧

2021-2022 学年江西省景德镇下学期期中数学试题

一、单选题

1．在空间中，已知命题 p:$\triangle ABC$ 的三个顶点到平面 α 的距离相等且不为零，q 平面 α // 平面 ABC，则 p 是 q 的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

B

【分析】由线面平行的性质结合平面与平面的位置关系判断即可.

【详解】当平面 α // 平面 ABC 时，$\triangle ABC$ 的三个顶点到平面 α 的距离相等且不为零；当 $\triangle ABC$ 的三个顶点到平面 α 的距离相等且不为零时，平面 α 可能与平 ABC 交，例如当 BC// 平面 α 且 AB,AC 的中点在平面 α 内时，$\triangle ABC$ 的三个顶点到平面 α 的距离相等且不为零，但平面 α 与平 ABC 交.

即 p 是 q 的必要不充分条件

故选：B

2．已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{10}+a_9=6a_8$，若存在两项 a_m，a_n 使得 $\sqrt{a_m a_n}=4a_1$，则 $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}$ 的最小值为（　　）

A．4　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．9

C

由 $a_{10}+a_9=6a_8$ 求得 $q=2$，代入 $\sqrt{a_m a_n}=4a_1$ 求得 $m+n=6$，利用基本不等式求出它的最小值.

【详解】因为各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{10}+a_9=6a_8$，

可得 $a_8q^2+a_8q=6a_8$，即 $q^2+q-6=0$

解得 $q=2$ 或 $q=-3$（舍去）.

$\because \sqrt{a_m a_n}=4a_1$，

$\therefore 2^{m+n-2}=16$，

$\therefore m+n=6$

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{6}(\frac{1}{m}+\frac{4}{n})(m+n)=\frac{1}{6}(5+\frac{n}{m}+\frac{4m}{n})\geq\frac{1}{6}(5+2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{4m}{n}})=\frac{3}{2}$.

当且仅当 $\frac{n}{m}=\frac{4m}{n}$，即 m=2,n=4 时，等号成立.

故 $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}$ 的最小值等于 $\frac{3}{2}$.

故选：C

方法点睛：本题主要考查等比数列的通项公式和基本不等式的应用，解题的关键是常量代换的技巧，所谓常量代换，就是把一个常数用代数式来代替，如

$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=(\frac{1}{m}+\frac{4}{n})\times 6\times\frac{1}{6}$，再把常数 6 代换成已知中的 $m+n$,即 $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{6}(\frac{1}{m}+\frac{4}{n})(m+n)$.

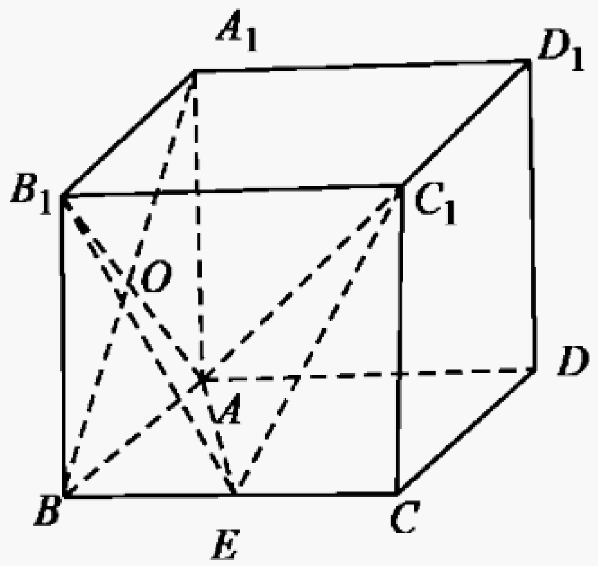
常量代换是基本不等式里常用的一个技巧，可以优化解题，提高解题效率.

3．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E 为 BC 上一点，则三棱锥 B_1-AC_1E 的体积为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{6}$

D

【分析】由 AB 为 A 到平面 EB_1C_1 的距离，所以根据体积法可得 $V_{B_1-AC_1E}=V_{A-EB_1C_1}$，代入数值即可得解.

【详解】

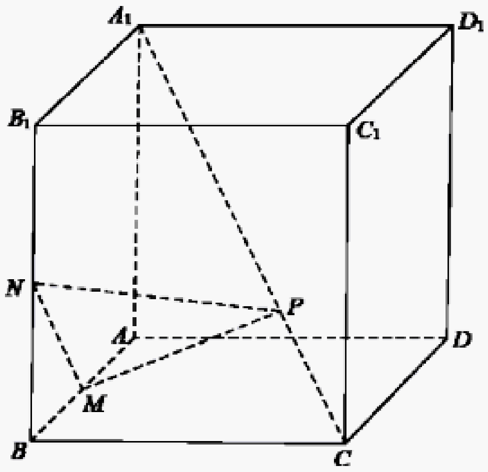
由 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，

显然 AB 为 A 到平面 EB_1C_1 的距离，

所以 $V_{B_1-AC_1E}=V_{A-EB_1C_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle EB_1C_1}\cdot AB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1\times 1=\frac{1}{6}$，

故选：D

4．如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别是棱 AB，BB_1 的中点，点 P 在对角线 CA_1 上运动.当△PMN 的面积取得最小值时，点 P 的位置是（　　）



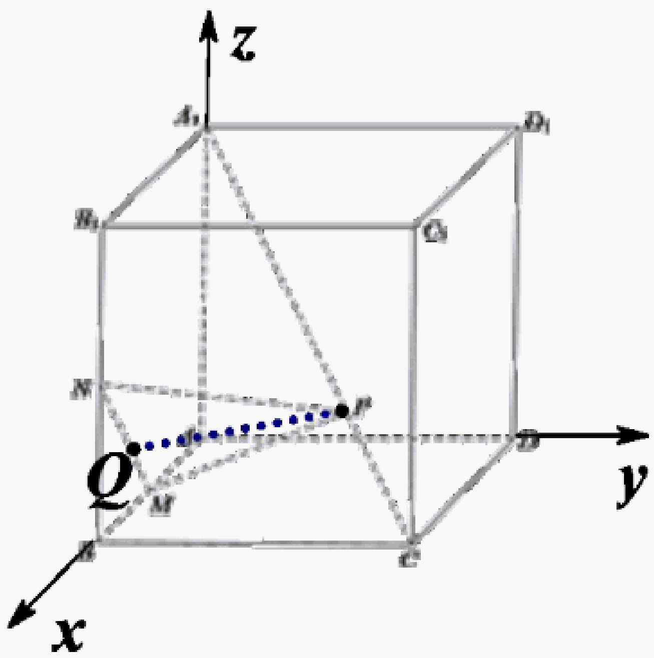
A．线段 CA_1 的三等分点，且靠近点 A_1 B．线段 CA_1 的中点

C．线段 CA_1 的三等分点，且靠近点 C D．线段 CA_1 的四等分点，且靠近点 C

B

将问题转化为动点 P 到直线 MN 的距离最小时，确定点 P 的位置，建立空间直角坐标系，取 MN 的中点 Q，通过坐标运算可知 $PQ\perp MN$，即 $|PQ|$ 是动点 P 到直线 MN 的距离，再由空间两点间的距离公式求出 $|PQ|$ 后，利用二次函数配方可解决问题.

【详解】设正方体的棱长为 1，以 A 为原点，AB,AD,AA_1 分别为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示：



则 $M(\frac{1}{2},0,0)$，$N(1,0,\frac{1}{2})$，MN 的中点 $Q(\frac{3}{4},0,\frac{1}{4})$，

$A_1(0,0,1)$，$C(1,1,0)$，则 $\overrightarrow{A_1C}=(1,1,-1)$，

设 $P(t,t,z)$，$\overrightarrow{PC}=(1-t,1-t,-z)$，

由 $\overrightarrow{A_1C}$ 与 $\overrightarrow{PC}$ 共线，可得 $\frac{1-t}{1}=\frac{1-t}{1}=\frac{-z}{-1}$，所以 $t=1-z$，所以 $P(1-z,1-z,z)$，其中 $0\le z\le 1$，

因为 $|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{(1-z-\frac{1}{2})^2+(1-z-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{3z^2-3z+\frac{5}{4}}$，