数学文化

第8章 线性代数的思想方法与意义

章节目录

17、18世纪，数学中产生了一个新的分支---线性代数。现在一般来说，线性代数的创始人是日本数学家关孝和（sekiTakakazu，约1642-1708）、德国数学家莱布尼茨（G.W.Leibniz，1646-1716）、瑞士数学家克拉默（G.Cramer, 1704-1752)、法国数学家范德蒙德（A.T.Vandermonde,1735-1796)，以及柯西、凯莱（A.Cayley,1821-1895)、拉普拉斯、欧拉等人。其实，早在约公元前200年到公元前100年间，中国人九已经对矩阵有所了解。严格来讲，汉朝张苍等校正的《九章算术》中就给出了利用矩阵解线性方程组的方法。

8.1 早起代数发展简史

代数与几何的历史一样悠久。自从人类有了数的概念的时候就有了关于这些数的运算，也就有了“算术”。所以，处于数学知识积累时期的算术与几何是并驾齐驱的。

不过由于种种原因，在东西方，特别是在西方，代数的发展不如几何发展的快。所以，在古希腊最早发展起来的数学分支是几何。

我们猜想其中最主要的原因有两种：

一是代数比起几何来说可能更为抽象，更需要符号化以及对数学本质更为深刻的认识；

二是早期时候代数的应用可能不如几何的应用在当时更为需要。例如，田亩的丈量，土方的计算、建筑的需要等。

但是，代数还是在缓慢地发展与成长。

算术发展为代数首先应归功于末知数等字母符号的引入以及符号体系的引入，使得算术学科变成代数学科。初学代数时，老师常说“代数就是用字母代替数”，这可以堪称是对代数狭义的理解或最简明的理解。确实，用符号是代数学上最重大的变革之一，这是人类思想上的一件大事。

其次，承认了末知数的存在性，从而结果就是在“存在”的前提下根据已知条件逐步推理得出来的，这是数学上的分析法，方程就是这种思想方法的具体体现。

在公元前 2000 年前后，古巴比伦数学就已演化成用文字叙述的代数学。在英国大不列颠博物馆 13901 号泥板上记载了这样一个问题：“我把我的正方形的面积加上正方形边长的三分之二得 $\frac{35}{60}$，求该正方形的边长。”如果设正方形的边长是 x，则这个问题相当于求解方程

$$x^2+\frac{2}{3}x=\frac{35}{60}$$

该泥板上给出的解法相当于将方程 $x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{35}{60}$ 的系数代人公式

$$x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$$

求解（当时计算是用 60 进位制）。这一史实表明，当时他们解二次方程的方法相当于现在的公式法。也就是说，古巴比伦人那时可能已经知道某些类型的一元 二次方程的求根公式。

在另一块泥板上, 古巴比伦人给出这样的数表：它不仅包含了从 1 到 30 的整数的平方和立方，还包含这个范围内的整数组合 m^3+m^2 。

经专家研究认为, 这个数表是用来解决形如 $x^3+x^2=b$ 的三次方程的。这说明当时他们已经开始讨论某些二次或三次方程的解法。

同样地，古埃及人也很早就发展了他们的代数方法。在兰德纸草书（大约 成书于公元前 1850 年到公元前 1650 年间）中有一些讨论计算若干的问题，例如图8-1中的象形文字

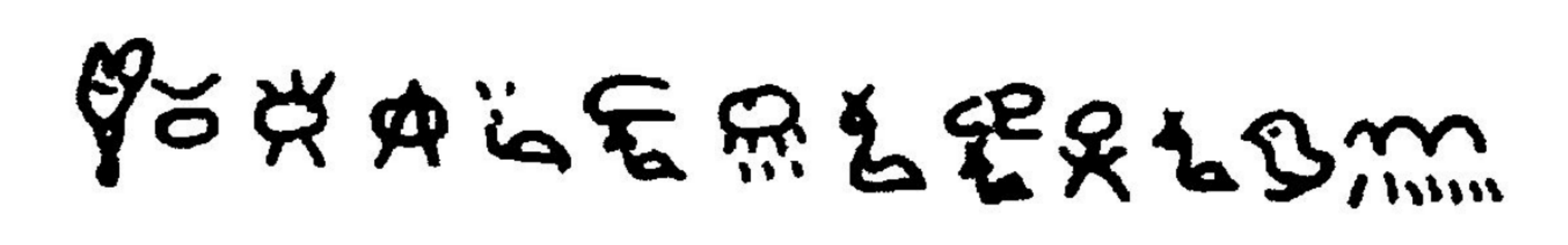

图8-1

其意思是：某数为若干，它的 $\frac{2}{3}$ 加上它的 $\frac{1}{2}$，再加上它的 $\frac{1}{7}$，再加上这个数本身等于37，求这个数。

这个式子等价于解方程:

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x+x=37$$

这是一个一元一次方程问题，他们解决这类问题的办法是试位法。

可见，古埃及人很早就知道了布列方程的方法。

我们知道，古希腊人在几何上具有非凡的成就，实际上他们也在缕慢地发展代数学科。被称为代数学鼻祖的丢番图 (生平不详)。在其撰写的十三卷本《算术》中，大部分内容是代数知识，共包含了189 个问题，讨论了数、一次、二 次与个别的三次方程与大量的不定方程，成为不定方程的创始人。例如下题:

今有四数，任取三数相加，其和分别为 20，22，24，27，求四数。 丢番图给出了一种巧妙的解法：设四数之和为x，则四数分别为x-20，x-22，x-24，x-27。于是，$x=(x-20)+(x-22)+(x-24)+(x-27)$，解得 $x=31$。于是四数分别 为: 11，9，7，4。

丢番图的另一成就是在代数中创造性地运用了一套数学符号，并用符号布列算式。他把未知数称为“题中之数”。下面列出一些丢番图的符号：用 s 表示未知数; 用Δ^y表示未知数的平方(即x^2), 用k^y 表示未知数的立方(即x^3), 等等；而 1， 2， 3， ••• 等分别记为$\overline{\alpha},\overline{\beta},\overline{\gamma},\ldots$ ；用$\overset{0}{m}$ 表示常数。在运算符号方面, 用ψ 或 表示减号,没有加、乘与除的符号,而用ι表示等号。例如,代数式x^2+2x+3, 丢番图就表示为：

$$\Delta^y s\overline{\beta}\overset{0}{m}\overline{\gamma}$$

作为文明古国之一的印度的数学，在代数方面也是很有成就的。阿耶波多 (476-550）在其著作 《阿耶波多文集》（一部以天文学为主的著作）中，有一章专讲数学，介绍了比例、开方、二次方程、一次不定方程等。婆罗摩笈多 (约 598-660) 在其著作《婆罗摩修正体系》中，讨论了二次方程、线性方程 组及一次、二次不定方程的解法，还利用内插公式造了一张正弦表。婆罗摩笈多已经把二次方程归结为标准类型： $ax^2+bx=c$，并给出了这个方程的一个根为： $x=\dfrac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2a}$。这与现代的求根公式完全相同。

婆什伽罗 **(1114-1185)** 著 有《丽罗娃提》与与《算术本原》，已经知道二次方程有两个根，并对形如 $cx^2+1=y^2$ 的二次不定方程提出解法。印度人解不定方程的成就已经超过了丢番图。

作为阿拉伯著名数学家的花拉子米（Al Khowarizmi, 约780-850), 著有《代数学》，其中系统讨论论6种类型的一次或二次代数方程，并介绍论配平方法。这 6 种类型的方程（用现代方法表示）分别为:

$$ax^2 = bx; ax^2 = c; ax = c;\ ax^2 + bx = c; ax^2 + c = bx; bx + c = ax^2$$

他指出，采用复原 (aljebr)与对消（muqabala)（相当于今天的“移项”与“合并同类项”) 的方法可将其他类型的方程划归为这 6 类方程。他的《代数学》这本书的原名就是由 aljebr与 muqabala 两词组合而成, 在后来的传抄过程中逐渐演变而成今王的代数 (algebra)。

阿拉伯的另一数学家奥马海雅姆（1044—1123）也著作《代数学》，比花拉子米有明显的进步。他详尽地研究了三次代数方程的根的几何作图法，指出了用圆锥曲线图解求根的理论，是阿拉伯数学最重大的成就之一。

法国数学家韦达 (Francis Veita，1540-1603 在代数符号体系上的研究, 使代数学发生了质的变革。当时代数研究的中心是探究各种代数方程的解 法。由于方程种类繁多，就必须寻求求解各种类型代数方程的通用方法。韦达认真研究了泰塔格里亚、卡尔达诺、斯蒂文、邦别利、丢番图等人的著作，并在他的名著《分析方法引论》中第一个有意识地系统地使用了字母，改进了卡尔达诺等人关于三、四次方程的解法，利用变换消去方程的次高项，将二、三、四次 方程都用一般表达式给出（即所谓的公式解），给出了著名的二、三次方程的韦达定理，等等。

中国古代数学中对于代数有很多的研究, 而且取得了很高的成就。特别是在公元前 200 年左右创造了 “天元术”, 用天元作为末知数符号，列出方程，产生了“符号代数”。图 8-2 所示是《测圆海镜》中表示一元二次程 $2x^2+18x+316=0$ 其表示方法是：在一次项系数旁边写一个 “元”字, “元” 以上的数字表示各正次幂的系数, “元”以下的数字表示常数和各负次幂系数。

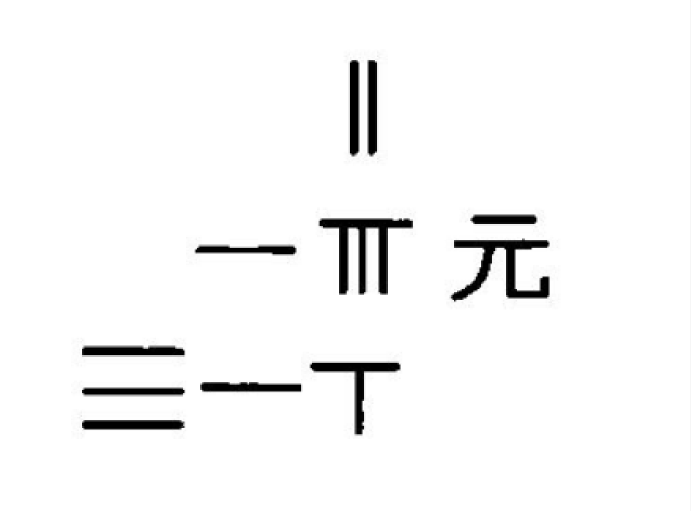

图 8-2

8.2 线性代数发展简史

一般的说法, 线性代数是从解多元线性方程组中发展出来的一种理论, 其主要概念为矩阵、行列式、方程组、二次型等, 本质上是反映数的一种代数关系。 当矩阵和行列式作为一个独立对象表现的时候，就开始引导了线性空间和线性变换等系统理论的演技，并与后来的向量理论结合在一起，促进了代数理论的发展。

8.2.1　行列式发展史

最早引人行列式概念的是日本数学家关孝和，他在其著作《解伏题之法》中提出了行列式的概念与算法。行列式的系统研究是在 17、18 世纪围绕解线性方程组的研究中发展起来的。德国著名数学家莱布尼茨开创了用指标体系来表示方程组的方法，例如把方程组写成：$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, i = 1,2,\cdots,m$，然后研究含指标的系数。1693年，莱布尼茨在写给洛必达的一封信中使用并给出了行列式。

1750年，瑞士数学家克拉默发展了莱布尼茨的思想，并在《代数曲线的分析术入门》中对行列式的定义和展开法则给出了比较完整、明确的阐述，发表了著名的“克拉默法则”。

稍后, 数学家贝祖 (E. Bezout, 17301783）将确定行列式每一项等号的方法进行了系统化, 利用系数行列式概念指出了如何判断一个齐次线性方程组有非零解的方法。

在行列式的发展史上，法国数学家范德蒙德第一个对行列式理论作出系统的阐述，是他把行列式理论从解线性方程组中分离出来，成为一门独立的理论。他是行列式理论的奠基人。特别地，他给出了用二阶子式和它们的余子式来展开行列式的法则。1772 年，拉普拉斯在一篇论文中证明了范德蒙德提出的一些规则，推广了化的展开行列式的方法，也就是现在的拉普拉斯展开定理。

继范德蒙德之后，在行列式的理论方面，又一位作出突出贡献的是法国大数学家柯西。1815年，柯西在一篇论文中给出了行列式的第一个系统的、几乎是近代的处理。其中主要结果之一是行列式的乘法定理。另外，他第一个把行列式的元素排成方阵，采用双足标记法；引进了行列式特征方程的术语；给出了相似行列式概念；改进了拉普拉斯的行列式展开定理并给出了一个证明等。把方阵放在两条竖线之间来表示行列式则是英国数学家凯莱于 1841 年创造的。

柯西之后，德国数学家雅可比 (J. Jacobi, 1804-1851）引进了函数行列式，即“雅可比行列式”，指出函数行列式在多重积分的变量替换中的作用，给出了函数行列式的导数公式。雅可比的著名论文《论行列式的形成和性质》标志着行列式系统理论的建成。

由于行列式在数学分析、几何学、线件方程组理论、二次型理论等多方面的应用，促使行列式理论在 19 世纪也得到了很大发展。整个 19 世纪都有行列式的新结果。除了一般行列式的大量定理之外，还有许多有关特殊行列式的定理都相继得到。

8.2.2 矩阵发展史

矩阵是线性代数中一个重要的基本概念，也是数学研究和应用的一个重要工具。为了将数字的矩形阵列区别于行列式，西尔维斯特（J.J.Sylvester,1814-1897）首先使用了“矩阵”这个词，不过他仅仅是把矩阵用于表达一个行列式。严格的说，矩阵应当是从行列式的研究过程中产生的。因为行列式就是研究方阵的数值性质。矩阵的许多基本性质也是在行列式的发展中建立起来的。

英国数学家凯莱一般被公认为是矩阵论的创立者。因为他首先把矩阵作为一个独立的数学概念提出来，并首先发表了关于这个题目的一系列文章。凯莱在研究线性变换夏的不变量问题时引进矩阵以简化记号。

同样，最初他也是把矩阵作为行列式的推广或者作为线性方程组的表达工具。1858年，他发表了论文《矩阵论的研究报告》，系统地阐述了关于矩阵的理论。

1855年，埃米特（C.Hermite,1822-1901）证明了一些矩阵类的特征根的特殊性质，如现在称为埃米特矩阵的特征根性质等。

特征方程和特征根的工作被哈密尔顿、弗洛伯纽斯等数学家予以推广。

后来，克莱伯施（A.Clebsch,1831-1872）、布克海姆（A.Buchheim）等证明了对称矩阵的特征根性质；泰伯（H.Taber）引入矩阵的迹的概念并给出了一些有关结论。

弗罗伯纽斯讨论了最小多项式问题，引进了矩阵的秩、不变因子和初等因子、正交矩阵、矩阵的相似变换、合同矩阵等概念，以合乎逻辑的形式整理了不变因子和初等因子的理论，并讨论了正交矩阵与合同矩阵的一些重要性质。**1854**年，约尔当研究了矩阵化为标准形的问题。**1892**年，梅茨勒（**H.Metzler**）引进了 矩阵的超越函数概念并将其写成矩阵的幂级数的形式。

矩阵本身所具有的性质依赖于元素的性质，矩阵由最初作为一种工具经过两个多世纪的发展，现在已成为独立的一门数学分支**---**矩阵论，其理论现已广泛弗洛波牛市地应用于现代科技的各个领域。

8.2.3　线性方程组

早在中国古代的数学著作《九章算术》“方程”章中已经对线性方程组作了比较完成的论述。其中所述方法实质上相当于现代的对方程组的增广矩阵施行初等行变换从而小曲儿未知量的方法，即高斯消元法。

下面来看汉朝张苍等校正的《九章算术》中给出的利用矩阵解决实际问题的一个例证：

今有上禾3束、中禾2束、下禾1束，得实39斗；上禾2 束、中禾3束、下禾1束，得实34斗；上禾1束、中禾2束、下禾3束，得实26斗。问上、中、下禾每一束得实各是多少？

用现代方法，若设三种谷物每束（秉） 重量（实）分别为x，y，z，列方程 组，得

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases} \qquad (8\text{-}1)$$

其对应的增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix} \qquad (8\text{-}2)$$

下面我们来看张苍（前 256-前152）的解法。

《九章算术》中的术算过程 （1）：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗于右方，中、左行列如右方。即将 3 个线性方程组对应的 3 个不同未知量的系数和常数项按照下列方式 排列：

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array} \qquad (8\text{-}3)$$

这样的方法相当于将式（ 8-2 ）转置 ，然后交换顺序，第一列排在右边，第三列排在左边。这一点都不奇怪，因为中国古代汉字书写为纵向，且方向从右往左。 所以，这在本质上与我们今天的线性方程组的增广矩阵是一致的。

术算过程（**2**）：以右列上禾遍乘中列。

即以右列上方的**3**，遍乘中列各项。这相当于“第二种初等变换”：用一非零数乘矩阵的某一列。得

$$\begin{array}{ccc} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{array} \qquad (8\text{-}4)$$

术算过程（3）：而以直除。

即由中列连续减去右列各对应项的若干倍数，直到中列头位数为 **0**。这相当于今天“第三种初等变换”：一列减去某列的若干倍。得

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{matrix} \qquad (8\text{-}5)$$

术算过程（4）：又来其次，亦以直除。

即中列头位消除后，以右列“上禾”3遍乘左列各项，连续减去右列各对应项，消去左列头位。得

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array} \qquad (8\text{-}6)$$

术算过程（ 5 ）：然以中列中禾不尽者遍乘左列 而以直除......实即下禾之实 。

即再以中列中禾数遍乘左列而以直除，消去左列中位，得到的为下禾36秉的实际重量。

0	0	3	
0	5	2	(8-7)
36	1	1	
99	24	39	

由此，我们可以解得 1 秉第三种谷物（ 下禾）的重量。其余“ 术算” 过程实为代入法。不再赘述。

这实际上就是后来直到 19 世纪初才被世人知晓的高斯消元法。在西方，线性方程组的研究是在 17 世纪后期由莱布尼茨开创的。他曾研究含两个未知量、三个线性方程组成的方程组。麦克劳林在 18 世纪上半叶研究了具有二、三、四个未知量的线性方程组，得到了现在称为克拉默法则的结果。克拉默不久也发表了这个法则。

18世纪下半叶，法国数学家贝祖对线性方程组理论进行了一系列研究，证明了n元齐次线性方程组有非零解的条件是系数行列式等于零。

19 世纪，英国数学家史密斯（ H. Smith ）和道奇森（C. L. Dodgson） 继续研究线性方程组理论，前者引进了方程组的增广矩阵和非增广矩阵的概念，后者证明了n个未知数、n个方程的方程组相容的充要条件是系数矩阵和增广矩阵的秩相同。这正是现代方程组理论中的重要结果之一 。

线性方程组的思想具有非常好的应用性。现代大量的工程问题、金融问题、经济问题最终往往归结为解线性方程组。特别是在 20 世纪，线性方程组的数值解法得到很好的发展。

8.2.4 二次型

二次型的研究起源于对二次曲线与二次曲面的分类讨论问题。二次型的系统研究是从 18 世纪开始的 。将二次曲线和二次曲面的方程变形，选有主轴方向的轴作为坐标轴以简化方程的形状，这个问题是在 18 世纪引进的。

柯西在其著作中给出结论：当方程是标准形时，二次曲面用二次项的符号来进行分类 。然而， 那时并不太清楚 ，在化简成标准形时，为何总是得到同样数目的正项和负项。西尔维斯特回答了这个问题，他给出了三个变数的二次型惯性定理，但没有证明。 这个定理后被雅可比重新发现和证明。

1801年，高斯在其名著《算术研究》中引进了二次型的正定、负定 、半正定和半负定等术语。

二次型化简的进一步研究涉及二次型或行列式的特征方程的概念。特征方程的概念隐含地出现在欧拉的著作中，拉格朗日在其关于线性微分方程组的著作中首先明确地给出了这个概念 。

1851年，西尔维斯特在研究二次曲线和二次曲面的相切和相交时，开始考虑二次曲线和二次曲面的分类。引进了初等因子和不变因子的概念。