

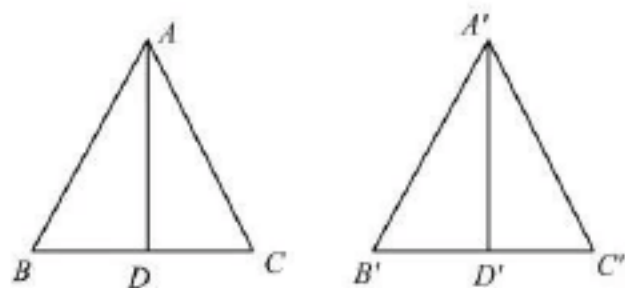
全等三角形典型例题汇总



模块一 全等基本模型

【典题1】 证明：两全等三角形的对应角的角平分线相等。

【答案】 已知： $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ， AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于 D ， $A'D'$ 平分 $\angle B'A'C'$ 交 $B'C'$ 于 D' 。



求证： $AD = A'D'$ 。

证明： $\because \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ，

$\therefore \angle BAC = \angle B'A'C'$ ，

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于 D ， $A'D'$ 平分 $\angle B'A'C'$ 交 $B'C'$ 于 D'

$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \angle B'A'C' = \angle B'A'D'$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle A'B'D'$ 中，

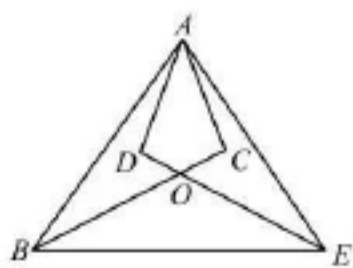
$$\begin{cases} \angle BAD = \angle B'A'D' \\ AB = A'B' \\ \angle B = \angle B' \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$ ，

$\therefore AD = A'D'$

【典题2】 如图，在 $\triangle ABE$ 中， $AB = AE$ ， $AD = AC$ ， $\angle BAD = \angle EAC$ ， BC 、 DE 交于点 O 。

求证：(1) $\triangle ABC \cong \triangle AED$ ；(2) $OB = OE$ 。



【答案】 (1) $\because \angle BAD = \angle EAC$

$\therefore \angle BAC = \angle EAD$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 中

$$\begin{cases} AB = AE \\ \angle BAC = \angle EAD \\ AC = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AED$ (SAS)

(2) 由(1)知 $\angle ABC = \angle AED$

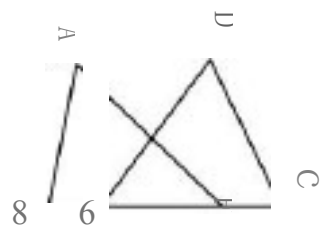
$\therefore AB = AE$

$\therefore \angle ADE = \angle AEB$

$\therefore \angle OBE = \angle OEB$

$\therefore OB = OE$

【典题3】如图，点 E, F 在 BC 上， $BE = CF$ ， $AB = DC$ ， $\angle B = \angle C$ 求证： $AF = DE$



【答案】证明： $\because BE = CF$

$\therefore BE + EF = CF + EF$

即 $BF = CE$

在 $\triangle ABF$ 与 $\triangle DCE$ 中

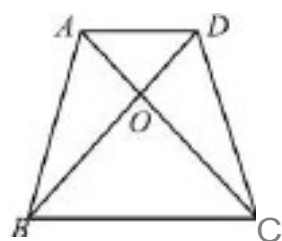
$AB = DC$ $\angle B = \angle C$ $BF = CE$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle DCE$ (SAS)

$\therefore AF = DE$

【典题4】已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC, BD 相交于点 O ， $\angle ABC = \angle DCB$ ， $AB = CD$ 。

求证： $OA = OD$



【答案1】证法一。

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中，

$\because AB = CD$ ， $\angle ABC = \angle DCB$ ， BC 是公共边，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$

$\therefore AC = DB$

且 $\angle ACB = \angle DBC$

$\therefore OB = OC$

$\therefore OA = OD$

证法二

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中 (同法一)

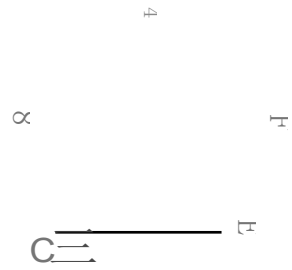
$\therefore \angle ACB = \angle DBC$

$\therefore \angle ABO = \angle DCO$
 又', $\angle AOB = \angle DOC$,
 $\therefore \triangle AOB \cong \triangle DOC$
 $\therefore OA = OD$

【典题5】 如图所示, $AB=AF$, $BC=FE$, $LB=LF$, D 是 CE 的中点

(1) 求证 $AD \perp CE$:

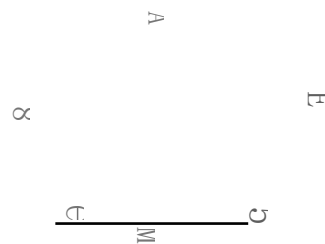
(2) 连接 BF 后, 还能得出什么结论? 请你写出两个 (不要求证明)



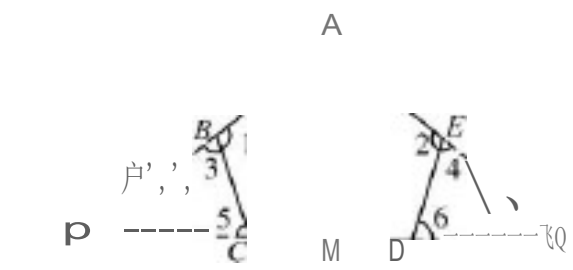
【答案1】 (1) 连结 AC, AE , 则 $\triangle ABC \cong \triangle AFE$, $\therefore AC = AE$.
 又', D 是 CE 的中点, $\therefore AD \perp CE$
 (2) $AD \perp BF$, $BF \parallel CE$

【典题6】 如图, 在五边形 $ABCDE$ 中, $LB=LE$, $LC=LD$, $BC=DE$, M 为 CD 中点

求证: $AM \perp CD$



【答案1】 分别延长 AB, DC 交于点 P ; 分别延长 AE, CD 交于点 Q

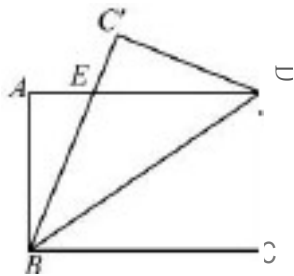


$\therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ, \angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$
 $\therefore \angle 3 = \angle 4$
 同理 $\angle 5 = \angle 6$
 在心 PCB 和 QDE 中



$\therefore LP = LQ \quad CP = DQ$
 $\therefore AP = AQ$
 $\therefore CM = DM$
 $\therefore PM = QM$
 $\therefore M$ 为等腰 $\triangle PCQ$ 底边中点
 $\therefore AM \perp CD$

[共题7) 如图, 把长方形 $ABCD$ ($AB = CD, AD = BC, \angle A = \angle ABC = \angle C = \angle D = 90^\circ$) 沿对角线 BD 对折, 使点 C 落在点 C' 处, 请说明 $AE = C'E$



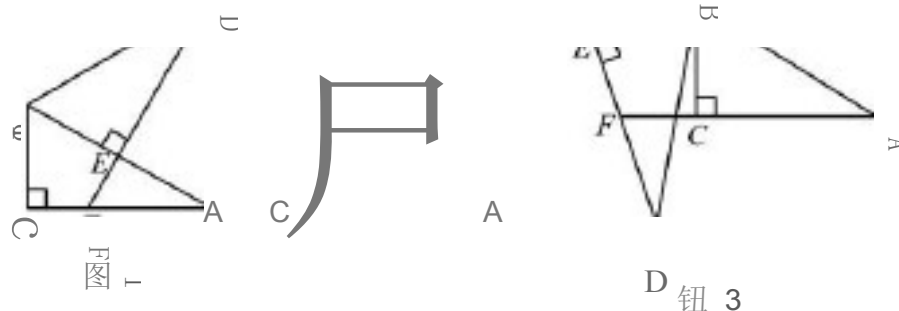
【答案 I】 $\angle AEB = \angle C'ED, \angle A = \angle C = 90^\circ, AB = CD = C'D,$
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle C'DE, \therefore AE = C'E.$

(共题8) 将两个全等的直角三角形 ABC 和 DBE 按图①方式摆放, 其中 $\angle ACB = \angle DEB = 90^\circ, \angle A = \angle D = 30^\circ$, 点 E 落在 AB 上, DE 所在直线交 AC 所在直线于点 F .

(1) 求 $AF + EF = DE$,

(2) 若将图 1 中的 $\triangle DBE$ 绕点 B 按顺时针方向旋转角 α , 且 $0^\circ < \alpha < 60^\circ$, 其他条件不变, 请在图 2 中画出变换后的图形, 并直接写出 (1) 中的结论是否仍然成立

(3) 若将图 1 中的 $\triangle DBE$ 绕点 B 按顺时针方向旋转角 α' , 且 $60^\circ < \alpha' < 180^\circ$, 其他条件不变, 如图 3, 你认为 (1) 中的结论还成立吗? 若成立, 写出证明过程; 若不成立, 写出此时 AF, EF 与 DE 之间的关系, 并说明理由



【答案 1】 (1) 连结 BF , $\because \triangle BED \cong \triangle ABC, \therefore BE = BC$, 又 BF 是公共边,
 $\therefore \text{Rt} \triangle BCF \cong \text{Rt} \triangle BEF, \therefore CF = EF, \therefore AF + EF = AC = DE,$
 (2) 成立
 (3) 不成立, $AF - EF = DE$,
 连结 BF , 与 (1) 同理 $\text{Rt} \triangle BCF \cong \text{Rt} \triangle BEF, \therefore CF = EF$
 $\therefore AF - EF = AC = DE$

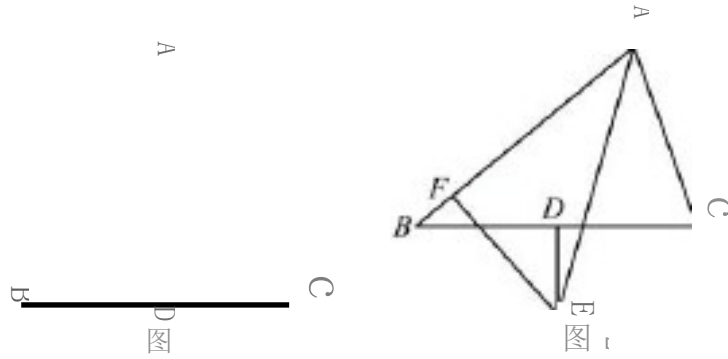


粗块二 角平分线基本模型

(共9) b. A8C 中.

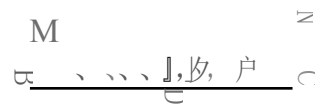
(1) 如图 1, 若 $\angle BAC$ 的平分线过 BC 的中点 D . 猜想 AB 与 AC 的关系并证明.

(2) 如图 2, 若 $\angle BAC$ 的平分线不过 BC 的中点 D , 而是与 BC 的垂直平分线交于点 E , 过 E 作 $EF \perp AB$, 垂足为 F , 猜想 AB 、 AC 的关系并证明.



【答案 1】(1) 猜想 $AB = AC$:

证明: 过 D 作 $DM \perp AB$ 于 M , $DN \perp AC$ 于 N ;



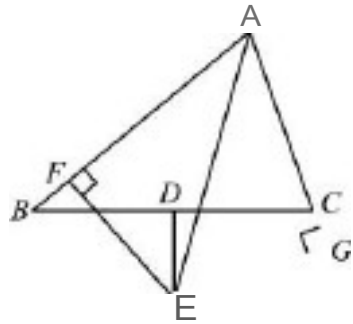
$\because AD$ 平分 $\angle BAC \therefore DM = DN$,

又 $\because AD = AD$, $BD = CD$, $\therefore \triangle ADM \cong \triangle ADN$, $\therefore \triangle BDM \cong \triangle CDN$

$\therefore AM = AN$, $BM = CN$, $\therefore AB = AC$,

(2) 猜想, $AB - AC = 2BF$

证明 连结 EB , EC , 过 E 作 $EG \perp AC$ 交 AC 延长线于点 G



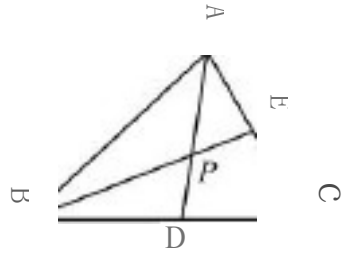
$\because AE$ 平分 $\angle BAC$, $EF \perp AB$, $EG \perp AC$, $\therefore EF = EG$, $AF = AG$

$\because DE$ 垂直平分 BC , $\therefore BE = CE$, $\therefore \triangle EBF \cong \triangle ECG$, $\therefore BF = CG$,

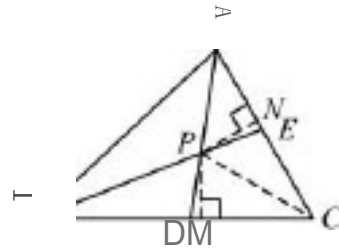
$\therefore AB - AC = AF + BF - (AG - CG) = 2BF$

[典超 10] 如图, $\triangle ABC$ 的角平分线 AD , BE 相交于点 P , 已知 $\angle C = 60^\circ$. (1) 求 $\angle APE$ 的度数

(2) 说明 $PD = PE$ 的理由.

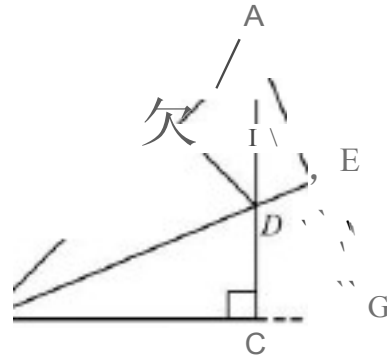
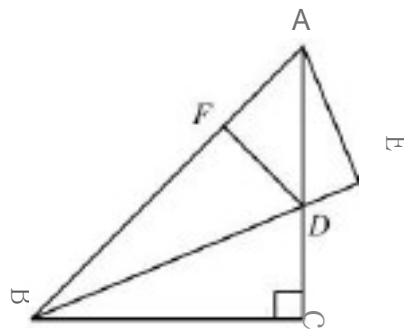


$\angle APE = \angle PAB + \angle PBA = \frac{1}{2} \angle CAB + \frac{1}{2} \angle CBA = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) = 60^\circ$
【答案 I】 (1) $\angle APE = \angle PAB + \angle PBA = \frac{1}{2} \angle CAB + \frac{1}{2} \angle CBA = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle A) = 60^\circ$
 (2) 过 P 作 $PM \perp BC$ 于 M, $PN \perp AC$ 于 N, 连结 PC



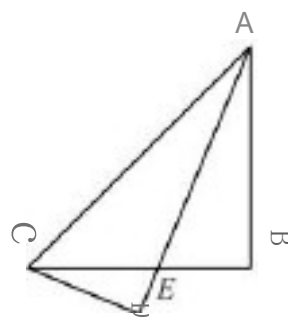
$\therefore AD, BE$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $\therefore PC$ 平分 $\angle ACB, \therefore PM = PN,$
 $\angle PDM = \angle ABD + \angle BAD = \angle ABP + \angle PBD + \angle BAD = \angle APE + \angle PBC = 60^\circ + \angle PBC$
 $\angle PEN = \angle EBC + \angle BCN = \angle EBC + 60^\circ$
 $\therefore \angle PDM = \angle PEN, \text{ 又 } \angle PMD = \angle PNE, \therefore \text{心 } PMD \text{ 心 } PNE, \therefore PD = PE$

【共题 11】 如图. 在 $\triangle ABC$ 中. $\angle C = 90^\circ, AC = BC. D$ 是 AC 上一点. $AE \perp BD$ 交 BD 的延长线于 E , 且 $AE = \frac{1}{2} BD$, $DF \perp AB$ 于 F 求证: $CD = DF$

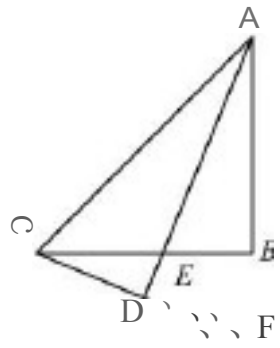


【答案】 延长 AE, BC 交于点 $G,$
 $AE = GE = \frac{1}{2} AG$
 易得 $\triangle ACG \cong \triangle BCO, \therefore AG = BO, \therefore$
 又 $BE \perp AG, \therefore \triangle BAE \cong \triangle BGE, \therefore BE$ 平分 $\angle ABC, \therefore DC = DF$

【共题 12】 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB \perp BC, AD \perp CD, AE$ 平分 $\angle CAB$, 求证: $AD = 2CD$.



[答案 1 延长 AB、CD 交于点 F，



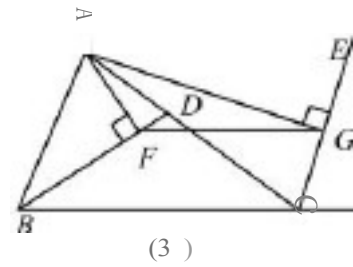
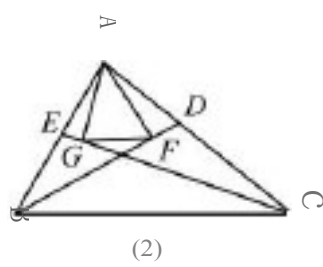
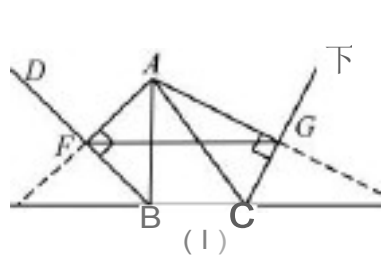
$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ADF, \triangle ABE \cong \triangle CBF, \therefore AE = CF = 2CD$

【共题13】 已知，如图(1)，BD、CE 分别是 $\triangle ABC$ 的外角平分线，过点 A 作 $AF \perp BD, AG \perp CE$ ，垂足分别为 F、G。连结 FG，延长 AF、AG，与直线 BC 相交，易证： $FG = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$

若(1) BD、CE 分别是 $\triangle ABC$ 的内角平分线（如图(2)）

(2) BD 为 $\triangle ABC$ 的内角平分线，CE 为 $\triangle ABC$ 的外角平分线（如图(3)），

则在图(2)、图(3)两种情况下，线段 FG 与 $\triangle ABC$ 三边又有怎样的数量关系？请写出你的猜想，并对其中的一种情况给予证明。



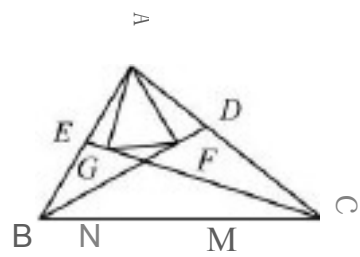
猜想 图(2)中 _____ 图(3)中 _____

证明，如图 (1) $FG = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$

[答案 1 (1) 结论： $FG = \frac{1}{2}(AC + BC - AB)$

(2) $FG = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$

证明：(2) 延长 AG、AF 交 BC 于点 N、点 M



证 $\triangle ABF \cong \triangle BFM$

$\therefore AB = 1 \cdot FB, AF = FM$
 同理 $AC = CN, AG = NG$
 $GP = \frac{1}{2} MN$
 $\therefore MN = BM + CN - BC = AB + AC - BC$
 $\therefore GF = \frac{1}{2} (AB + AC - BC)$
 (3) 与(2)同理

【典题14】 如图(1), 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CD \perp AB$ 于 D . AF 平分 $\angle CAB$, 交 CD 于 E , 交 CB 于 F .

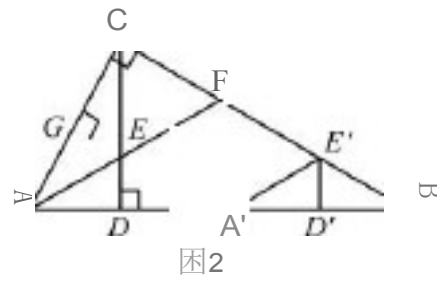


(1) 如图 1, $CE = CF$

(2) 将图 1 中的 $\triangle ADE$ 沿 AB 向右平移到 $\triangle A'D'E'$ 的位置, 使点 E' 落在 BC 边上, 其它条件不变, 如图 2 所示. 试猜想 BE' 与 CF 有怎样的数量关系, 并证明你的结论.

[答案] (1) 相等

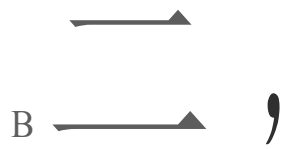
(2) 如图, 过点 E 作 $EG \perp AC$ 于 G .



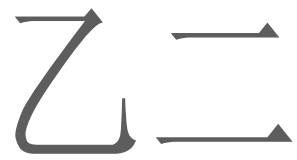
又 $\because AF$ 平分 $\angle CAB, ED \perp AB, \therefore ED = EG$
 由平移的性质可知 $D'E' = DE, \therefore D'E' = GE$.
 $\because \angle ACB = 90^\circ, \therefore \angle ACD + \angle DCB = 90^\circ$
 $\because CD \perp AB$ 于 $D, \therefore \angle A + \angle ACD = 90^\circ$.
 $\therefore \angle DCB = \angle A$
 在 $\triangle CEG$ 与 $\triangle BE'D'$ 中
 $\because \angle GCE = \angle B, \angle CGE = \angle BE'D', GE = D'E'$
 $\therefore \triangle CEG \cong \triangle BE'D'$
 $\therefore CE = BE'$
 由(1)可知 $CF = BE'$

【典题15】 已知: 如图, $BC > AD, DC \perp AD, BD$ 平分 $\angle ABC$

求证 $\angle A + \angle C = 180^\circ$

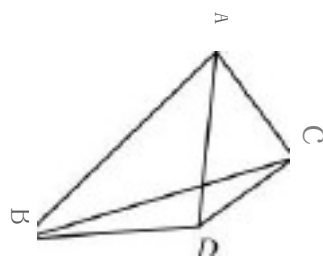


在 BC 上取点 E，使得 $BE = BA$ ，

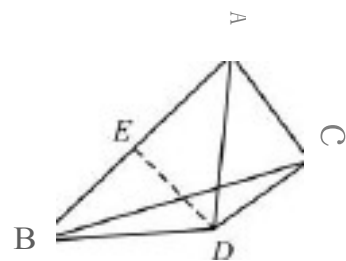


则 $\triangle BAD \cong \triangle BED$ ， $\therefore AD = DE = DC$ ， $\angle BAD = \angle BED$ 。
 $\therefore \angle C = \angle DEC$ ， $\therefore \angle DEB + \angle DEC = 180^\circ$ ， $\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ$ 。

【典例 16】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = \frac{1}{2} AB$ ，AD 平分 $\angle BAC$ ，且 $AD = BD$ ，求证： $CD \perp AC$ 。



【答案】取 AB 中点 E，连结 DE，



则 $AE = \frac{1}{2} AB = AC$ ， $DE \perp AB$ ，
 $\therefore \triangle ACD$ 为直角三角形， $\therefore \angle ACD = \angle AED = 90^\circ$ ， $\therefore CD \perp AC$ 。

【典例 17】已知：如图， $AB = AC$ ， $PB = PC$ ， $PD \perp AB$ ， $PE \perp AC$ ，垂足分别为 D、E。
 求证： $PD = PE$ 。

的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/728041064005006106>