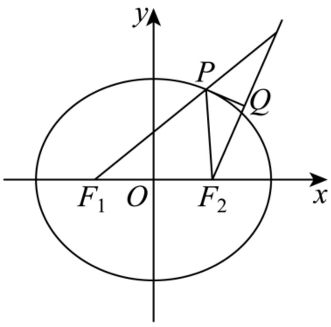
专题04 轨迹方程的求法

最新模拟精练

1．（2023上·福建厦门·高二校考阶段练习）如图所示，已知F_1，F_2是椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左右焦点，$P$是椭圆上任意一点，过$F_2$作$\angle F_1PF_2$的外角的角平分线的垂线，垂足为$Q$，则点$Q$的轨迹方程为（　　）



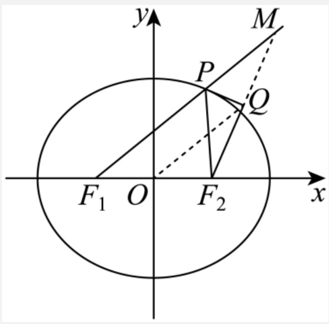
A．$x^2+y^2=4$　　　　B．$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

C．$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$　　　　D．$y^2=4x$

【答案】A

【分析】延长F_2Q，与F_1P的延长线交于点M，连接OQ，由角平分线、中位线性质得$|PF_2|=|PM|$，$|OQ|=\frac{1}{2}|F_1M|=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|)$，再根据椭圆定义得$|OQ|=2$，即可得轨迹.

【详解】延长F_2Q，与F_1P的延长线交于点M，连接OQ，



由PQ是$\angle F_1PF_2$外角的角平分线，且$PQ\perp F_2M$，

在$\triangle PF_2M$中，$|PF_2|=|PM|$且Q为线段F_2M的中点

又O为线段F_1F_2的中点，由三角形的中位线：$|OQ|=\frac{1}{2}|F_1M|=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|)$，

根据椭圆的定义得：$|PF_1|+|PF_2|=4$，则$|OQ|=2$，

点Q的轨迹为以原点为圆心，2 为半径的圆，点Q的轨迹方程：$x^2+y^2=4$.

故选：A.

2.（2023·青海·校联考模拟预测）已知$Q(3,3)$,M 为抛物线$C_1:y^2=8x$上一动点，N是圆

$C_2:x^2+y^2-4x+3=0$上一点，则$|MQ|+|MN|$的最小值是（　）

A．5　　B．4　　C．3　　D．2

【答案】B

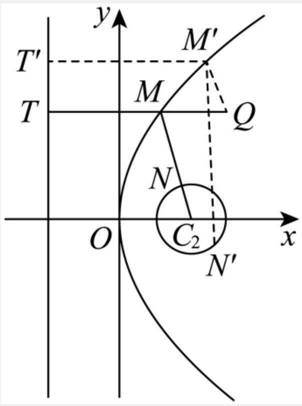
【分析】将$|MN|$转化为$|MC_2|-r$，再根据抛物线的定义考虑M,T,Q三点共线时的情况，由此求解出$|MQ|+|MN|$的最小值.

【详解】$C_1:y^2=8x$的焦点为$(2,0)$，准线为$x=-2$，

$C_2:x^2+y^2-4x+3=0$即为$C_2:(x-2)^2+y^2=1$，

所以圆心为$C_2(2,0)$即为C_1焦点，半径$r=1$，显然$Q(3,3)$在抛物线内部，

过点M作$MT\perp$准线，交准线于T点，记点M',T',N'如下图所示：



所以$|MQ|+|MN|\geq|MQ|+|MC_2|-r=|MQ|+|MT|-1$，

当且仅当M,Q,T三点共线时取最小值，此时$|MQ|+|MN|=|QT|-1=3+2-1=4$，

所以$|MQ|+|MN|$的最小值为4，

故选：B.

3.（2024·浙江温州·统考一模）动点$M(x,y)$到定点$F(-4,0)$的距离与M到定直线l：$x=-\frac{25}{4}$的距离的比等于$\frac{4}{5}$，则动点M的轨迹方程是（　）

A. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

B. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

C. $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$

D. $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{16}=1$

【答案】A

【分析】根据距离公式即可化简求解.

【详解】根据题意可得$\frac{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}{\left|x+\frac{25}{4}\right|}=\frac{4}{5}$，平方化简可得$9x^2+25y^2=25\times 9$，

进而得$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，

故选:A

4．（2023·重庆沙坪坝·重庆南开中学校考模拟预测）已知CD为圆$A:(x+1)^2+(y+1)^2=4$的一条弦，且以CD为直径的圆始终经过原点O，则CD中点B的轨迹方程为（　）

A. $x^2+y^2=1$

B. $x^2+y^2+x+y-1=0$

C. $x^2+y^2+x-1=0$

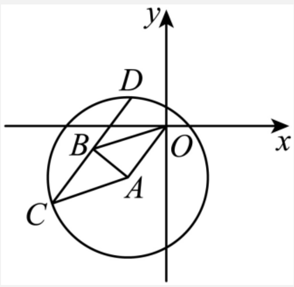
D. $x^2+y^2+x+y=0$

【答案】B

【分析】由题意可得$4=AB^2+OB^2$，设$B(x,y)$，用x,y表示出$4=AB^2+OB^2$，化简即可求得答案.

【详解】由题意可得：$AB\perp CD$,连接AC,则$AC=2$，

则$4=AB^2+\left(\frac{1}{2}CD\right)^2=AB^2+OB^2$，



由圆$A:(x+1)^2+(y+1)^2=4$可知$A(-1,-1)$，

设$B(x,y)$，则$(x+1)^2+(y+1)^2+x^2+y^2=4$，

化简得：$x^2+y^2+x+y-1=0$，

即点B的轨迹方程为$x^2+y^2+x+y-1=0$，

故选：B

5．（2020·江西南昌·江西师大附中校考一模）设过点 $P(x,y)$ 的直线分别与 x 轴的正半轴和 y 轴的正半轴交于 A，B 两点，点 Q 与点 P 关于 y 轴对称，O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$ 且 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=1$，则点 P 的轨迹方程是（　）

A．$3x^2+\frac{3}{2}y^2=1(x>0,y>0)$　　B．$3x^2-\frac{3}{2}y^2=1(x>0,y>0)$

C．$\frac{3}{2}y^2-3x^2=1(x>0,y>0)$　　D．$\frac{3}{2}x^2+3y^2=1(x>0,y>0)$

【答案】D

【分析】设 $A(a,0),B(0,b),a>0,b>0$，根据 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$ 求出 $a=\frac{3}{2}x,b=3y$，再利用 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=1$，求出轨迹方程，注意 $x>0,y>0$.

【详解】由题意得：$Q(-x,y)$，设 $A(a,0),B(0,b),a>0,b>0$，

因为 $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$，所以 $(x,y-b)=2(a-x,-y)$，

解得：$a=\frac{3}{2}x,b=3y$，

因为 $a>0,b>0$，所以 $x>0,y>0$

所以 $A\left(\frac{3}{2}x,0\right),B(0,3y)$，

因为 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{AB}=1$，

所以 $(-x,y)\cdot\left(-\frac{3}{2}x,3y\right)=1$，

即 $\frac{3}{2}x^2+3y^2=1(x>0,y>0)$.

故选：D

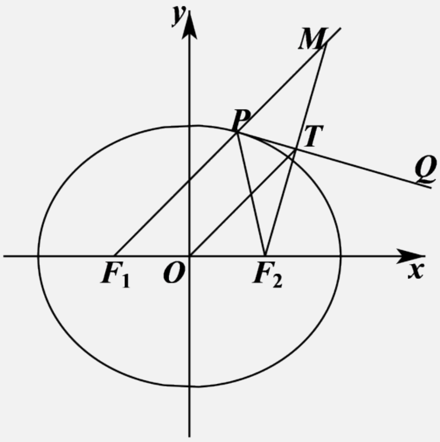
6．（2020·全国·模拟预测）在平面直角坐标系 xOy 中，F_1、F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，P 为椭圆上的点，PQ 为 $\angle F_1PF_2$ 的外角平分线，$F_2T\perp PQ$ 于点 T，则点 T 的轨迹为（　）

A．双曲线　　B．抛物线　　C．椭圆　　D．圆

【答案】D

【分析】延长 F_2T 交 F_1P 于点 M，可得出 $|PM|=|F_1P|$，进而可得出 $|F_1M|=2a$，利用中位线的性质可得出 $|OT|=\frac{1}{2}|F_1M|=a$，即可得出结论.

【详解】延长 F_2T 交 F_1P 于点 M，如下图所示：



由于 PQ 平分 $\angle F_2PM$，则 $\angle F_2PT=\angle MPT$，$|PT|=|PT|$，$\angle PTF_2=\angle PTM$，

所以，$\triangle PTF_2\cong\triangle PTM$，则 $|PF_2|=|PM|$，$|TF_2|=|TM|$，则点 T 为 MF_2 的中点，

又因为 O 为 F_1F_2 的中点，$\therefore|OT|=\frac{1}{2}|F_1M|=\frac{1}{2}(|F_1P|+|PM|)=\frac{1}{2}(|F_1P|+|F_2P|)=a$，

所以，点 T 的轨迹是圆.

故选：D.

【点睛】方法点睛：求动点的轨迹方程有如下几种方法：

（1）直译法：直接将条件翻译成等式，整理化简后即得动点的轨迹方程；

（2）定义法：如果能确定动点的轨迹满足某种已知曲线的定义，则可利用曲线的定义写出方程；

（3）相关点法：用动点 Q 的坐标 x、y 表示相关点 P 的坐标 x_0、y_0，然后代入点 P 的坐标 (x_0,y_0) 所满足的曲线方程，整理化简可得出动点 Q 的轨迹方程；

（4）参数法：当动点坐标 x、y 之间的直接关系难以找到时，往往先寻找 x、y 与某一参数 t 得到方程，即为动点的轨迹方程；

（5）交轨法：将两动曲线方程中的参数消去，得到不含参数的方程，即为两动曲线交点的轨迹方程.

7.（2019·湖北黄冈·黄冈中学校考二模）设 D 为椭圆 $x^2+\frac{y^2}{5}=1$ 上任意一点，$A(0,-2)$，$B(0,2)$，点 P 满足 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{AD}(\lambda>0)$，$(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DP})\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则点 P 的轨迹方程为（　　）

A．$x^2+(y-2)^2=20$　　　　B．$x^2+(y+2)^2=20$

C．$x^2+(y-2)^2=5$　　　　D．$x^2+(y+2)^2=5$

【答案】B