

## 专题 2.10 一元二次方程（挑战综合压轴题分类专题）

### 【挑战综合题】

【考点 1】一元二次方程  $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$  可化为一元二次方程的分式方程

1. (2023·四川凉山·统考中考真题) 解方程:  $\frac{x}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$ .

2. (2012·山东德州·中考真题) 解方程:  $\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = 1$

3. (2023·陕西西安·校考模拟预测) 解分式方程:  $\frac{2(x-1)}{x+1} - \frac{8}{x^2-1} = 1$

【考点 2】一元二次方程的解★★分式的化简（整体思想）

4. (2023·山东德州·二模) 先化简, 再求值:  $\left(x-1-\frac{3}{x+1}\right) \div \frac{x^2-4}{x^2+2x+1}$ , 其中  $x$  满足  $x^2-2x-3=0$ .

5. (2012·甘肃兰州·中考真题) 已知  $x$  是一元二次方程  $x^2 - 2x + 1 = 0$  的根, 求代数式

$$\frac{x-3}{3x^2-6x} \div \left( x+2 - \frac{5}{x-2} \right) \text{ 的值.}$$

6. (2023·江苏连云港·校考二模) 先化简, 再求值:  $\frac{a-2}{a^2-1} \div \left( a-1 - \frac{2a-1}{a+1} \right)$ , 其中  $a$  是方程  $x^2 - x - 6 = 0$

的根.

### 【考点3】解一元二次方程★★配方法的应用（应用）

7. (2023·浙江·一模) 设  $x, y$  都是实数, 请探究下列问题,

(1) 尝试: ① 当  $x = -2, y = 1$  时,  $\because x^2 + y^2 = 5, 2xy = -4, \therefore x^2 + y^2 > 2xy$ .

② 当  $x = 1, y = 2$  时,  $\because x^2 + y^2 = 5, 2xy = 4, \therefore x^2 + y^2 > 2xy$ .

③ 当  $x = 2, y = 2.5$  时,  $\because x^2 + y^2 = 10.25, 2xy = 10, \therefore x^2 + y^2 > 2xy$ .

④ 当  $x = 3, y = 3$  时,  $\because x^2 + y^2 = 18, 2xy = 18, \therefore x^2 + y^2$  \_\_\_\_\_  $2xy$ .

(2) 归纳:  $x^2 + y^2$  与  $2xy$  有怎样的大小关系? 试说明理由.

(3) 运用: 求代数式  $x^2 + \frac{4}{x^2}$  的最小值.

8. (2013·四川达州·中考真题) 选取二次三项式  $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$  中的两项, 配成完全平方式的过程叫配方. 例如

①选取二次项和一次项配方:  $x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2$ ;

②选取二次项和常数项配方:  $x^2 - 4x + 2 = (x - \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} - 4)x$ ,

或  $x^2 - 4x + 2 = (x + \sqrt{2})^2 - (4 + 2\sqrt{2})x$

③选取一次项和常数项配方:  $x^2 - 4x + 2 = (\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2 - x^2$

根据上述材料, 解决下面问题:

(1) 写出  $x^2 - 8x + 4$  的两种不同形式的配方;

(2) 已知  $x^2 + y^2 + xy - 3y + 3 = 0$ , 求  $x^y$  的值.

#### 【考点 4】一元二次方程根的判别式★★根与系数关系

9. (2023·湖北·统考中考真题) 已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m = 0$ .

(1) 求证: 无论  $m$  取何值时, 方程都有两个不相等的实数根;

(2) 设该方程的两个实数根为  $a, b$ , 若  $(2a + b)(a + 2b) = 20$ , 求  $m$  的值.

10. (2022·湖北十堰·统考中考真题) 已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 2x - 3m^2 = 0$ .

(1) 求证: 方程总有两个不相等的实数根;

(2) 若方程的两个实数根分别为  $\alpha$ ,  $\beta$ , 且  $\alpha + 2\beta = 5$ , 求  $m$  的值.

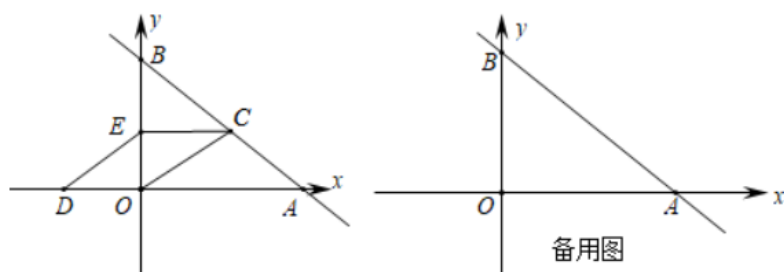
11. (2021·北京·统考中考真题) 已知关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 4mx + 3m^2 = 0$ .

(1) 求证: 该方程总有两个实数根;

(2) 若  $m > 0$ , 且该方程的两个实数根的差为 2, 求  $m$  的值.

### 【考点 5】一元二次方程 $\rightarrow$ $\rightarrow$ $\rightarrow$ 几何问题

12. (2019·辽宁沈阳·统考中考真题) 在平面直角坐标系中, 直线  $y = kx + 4$  ( $k \neq 0$ ) 交  $x$  轴于点  $A(8, 0)$ , 交  $y$  轴于点  $B$ ,



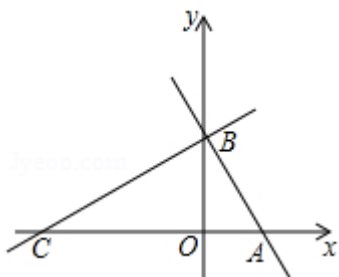
(1)  $k$  的值是\_\_\_\_\_;

(2) 点  $C$  是直线  $AB$  上的一个动点, 点  $D$  和点  $E$  分别在  $x$  轴和  $y$  轴上.

①如图, 点  $E$  为线段  $OB$  的中点, 且四边形  $OCED$  是平行四边形时, 求  $\square OCED$  的周长;

②当 CE 平行于 x 轴，CD 平行于 y 轴时，连接 DE，若  $\triangle CDE$  的面积为  $\frac{33}{4}$ ，请直接写出点 C 的坐标.

13. (2013·黑龙江黑河·中考真题) 如图，平面直角坐标系中，直线 l 分别交 x 轴、y 轴于 A、B 两点 ( $OA < OB$ ) 且 OA、OB 的长分别是一元二次方程  $x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} = 0$  的两个根，点 C 在 x 轴负半轴上，且  $AB : AC = 1 : 2$



(1) 求 A、C 两点的坐标;

(2) 若点 M 从 C 点出发，以每秒 1 个单位的速度沿射线 CB 运动，连接 AM，设  $\triangle ABM$  的面积为 S，点 M 的运动时间为 t，写出 S 关于 t 的函数关系式，并写出自变量的取值范围;

(3) 点 P 是 y 轴上的点，在坐标平面内是否存在点 Q，使以 A、B、P、Q 为顶点的四边形是菱形? 若存在，请直接写出 Q 点的坐标; 若不存在，请说明理由.

14. (2011·山东淄博·中考真题) 已知:  $\square ABCD$  的两边  $AB, AD$  的长是关于  $x$  的方程  $x^2 - mx + \frac{m}{2} - \frac{1}{4} = 0$

的两个实数根.

- (1) 当  $m$  为何值时, 四边形  $ABCD$  是菱形?
- (2) 若  $AB$  的长为 2, 那么  $\square ABCD$  的周长是多少?

### 【考点 6】一元二次方程的应用 $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$ 增长率图形问题 $\star \star$ 销售利润问题

15. (2023·山东东营·东营市胜利第一初级中学学校考三模) 某公司 2 月份销售新上市的  $A$  产品 20 套, 由于该产品的经济适用性, 销量快速上升, 4 月份该公司销售  $A$  产品达到 45 套, 并且 2 月到 3 月和 3 月到 4 月两次的增长率相同.

(1) 求该公司销售  $A$  产品每次的增长率;

(2) 若  $A$  产品每套盈利 2 万元, 则平均每月可售 30 套, 为了尽量减少库存, 该公司决定采取适当的降价措施, 经调查发现,  $A$  产品每套每降 0.5 万元, 公司平均每月可多售出 20 套; 若该公司在 5 月份要获利 70 万元, 则每套  $A$  产品需降价多少?

16. (2023·湖北孝感·统考三模) 随着疫情防控全面放开, “复工复产”成为主旋律. 中航无人机公司统计发现: 公司今年 2 月份生产 A 型无人机 2000 架, 4 月份生产 A 型无人机达到 12500 架.

(1) 求该公司生产 A 型无人机每月产量的平均增长率;

(2) 该公司还生产 B 型无人机, 已知生产 1 架 A 型无人机的成本 200 元, 生产 1 架 B 型无人机的成本是 300 元. 若生产 A、B 两种型号无人机共 100 架, 预算投入生产的成本不高于 22500 元, 问最多能生产 B 型无人机多少架?

17. (2023·湖北黄冈·统考模拟预测) “低碳生活, 绿色出行”, 自行车成为人们喜爱的交通工具, 某品牌共享自行车在宁波的投放量自 2017 年起逐月增加, 据统计, 该品牌共享自行车 1 月份投放了 640 辆, 3 月份投放了 1000 辆.

(1) 若该品牌共享自行车前 4 个月的投放量的月平均增长率相同, 则 4 月份投放了多少辆?

(2) 考虑到增强客户体验, 该品牌共享自行车准备投入 3 万元向自行车生产厂商定制一批两种规格比较高档的自行车, 之后投放到某高端写字楼区域, 已知自行车生产厂商生产 A 型车的成本价为 300 元/辆, 售价为 500 元/辆, 生产 B 型车的成本价为 700 元/辆, 售价为 1000 元/辆. 根据定制要求, B 型车的数量超过 12 辆, 且 A 型车的数量不少于 B 型车的 2 倍. 自行车生产厂商应如何设计生产方案才能获得最大利润? 最大利润是多少?

## 【挑战压轴题】

【考点1】解一元二次方程  $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$  分式方程  $\star\star$  无理方程  $\star\star$  高次方程

18. (2023·浙江温州·校考一模) 解方程:

(1)  $\sqrt{x+2} - \sqrt{8-x} = 2$ ;

(2)  $\frac{2x}{x^2-2x-3} - \frac{1}{x-3} = 1$ ;

(3)  $2x^2 - 3\sqrt{2x^2-1} + 1 = 0$

19. (2023 春·上海·八年级专题练习) 解方程:  $\sqrt{3x-5} - \sqrt{x+2} = 1$ .

20. (2023·江苏·九年级假期作业) 阅读理解以下内容, 解决问题:

解方程:  $x^2 + |x| - 2 = 0$ .

解:  $\because x^2 = |x|^2$ ,

$\therefore$  方程即为:  $|x|^2 + |x| - 2 = 0$ ,

设  $|x| = t$ , 原方程转化为:  $t^2 + t - 2 = 0$



解得,  $t_1=1$ ,  $t_2=-2$ ,

当  $t_1=1$  时, 即  $|x|=1$ ,  $\therefore x_1=1$ ,  $x_2=-1$ ;

当  $t_2=-2$  时, 即  $|x|=-2$ , 不成立.

$\therefore$  综上所述, 原方程的解是  $x_1=1$ ,  $x_2=-1$ .

以上解方程的过程中, 将其中  $|x|$  作为一个整体设成一个新未知数  $t$ , 从而将原方程化为关于  $t$  的一元二次方程, 像这样解决问题的方法叫做“换元法” (“元”即未知数).

(1) 已知方程  $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2x - \frac{2}{x} - 1 = 0$ , 若设  $x + \frac{1}{x} = m$ , 则利用“换元法”可将原方程化为关于  $m$  的方程是 \_\_\_\_\_:

(2) 仿照上述方法, 解方程:  $\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + 1} - 5 = 0$ .

### 【考点 2】一元二次方程★★ $\rightarrow$ $\rightarrow$ $\rightarrow$ 分式方程★★不等式解集★★勾股定理

21. (2023·广东·模拟预测) 若关于  $x, y$  的二元一次方程  $\begin{cases} x - y = 2a + 3 \\ x + y = 4a - 1 \end{cases}$ , 若满足  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

(1) 求参数  $a$  的取值范围;

(2) 若  $y$  为一个直角三角形的一条直角边长,  $x$  为该直角三角形的斜边长, 另一条直角边长为方程  $m^3 - 6\sqrt{11}m^2 + 99m = 0$  的一个根, 试求该直角三角形的周长.

22. (2023 春·重庆北碚·八年级西南大学附中校考阶段练习) 若关于  $x$  的方程  $\frac{k(x-1)}{x} + \frac{2k+1}{x^2+x} = 1 + \frac{2k}{x+1}$

有且只有一个实数根，求实数  $k$  的所有可能值.

23. (2021 秋·新疆乌鲁木齐·九年级校考期中) 已知: 关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 3m + 2 = 0$

(1) 已知  $x=2$  是方程的一个根, 求  $m$  的值;

(2) 以这个方程的两个实数根作为  $\triangle ABC$  中  $AB$ 、 $AC$  ( $AB < AC$ ) 的边长, 当  $BC = \sqrt{5}$  时,  $\triangle ABC$  是直角三角形, 求此时  $m$  的值.

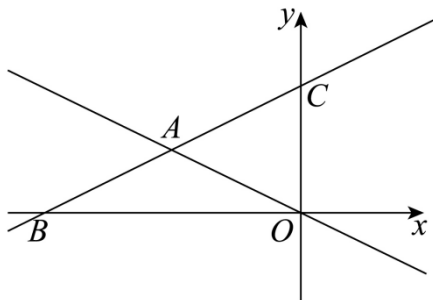
### 【考点 3】一元二次方程★★函数问题 (应用)

24. (2023·湖南益阳·校考一模) 如图, 在平面直角坐标系中, 直线  $y = \frac{1}{2}x + 3$  分别与  $x$  轴、 $y$  轴交于点  $B$ 、 $C$ , 且与直线  $y = -\frac{1}{2}x$  交于点  $A$ .

(1) 分别求出  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的坐标;

(2) 若  $D$  是线段  $OA$  上的点, 且  $\triangle COD$  的面积为 3, 求直线  $CD$  的函数解析式;

(3) 在 (2) 的条件下, 设  $P$  是射线  $CD$  上的点, 在平面内是否存在点  $Q$ , 使以  $O$ 、 $C$ 、 $P$ 、 $Q$  为顶点的四边形是菱形? 若存在, 直接写出点  $Q$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.



25. (2022春·广东广州·八年级统考期末) 当  $m, n$  为实数, 且满足  $m+nm=n$  时, 就称点  $P\left(m, \frac{m}{n}\right)$  为“状元点”. 已知点  $A(0, 7)$  和点  $M$  都在直线  $y=x+b$  上, 点  $B, C$  是“状元点”, 且  $B$  在直线  $AM$  上.

(1) 求  $b$  的值及判断点  $F(2, 6)$  是否为“状元点”;

(2) 请求出点  $B$  的坐标;

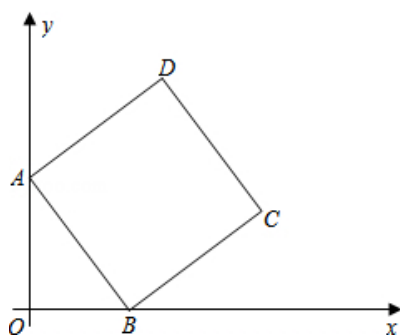
(3) 若  $AC \leq 5\sqrt{2}$ , 求点  $C$  的横坐标的取值范围.

26. (2014·黑龙江·统考中考真题) 如图, 在平面直角坐标系中, 正方形  $ABCD$  的顶点  $A$  在  $y$  轴正半轴上, 顶点  $B$  在  $x$  轴正半轴上,  $OA, OB$  的长分别是一元二次方程  $x^2 - 7x + 12 = 0$  的两个根 ( $OA > OB$ ).

(1) 求点  $D$  的坐标.

(2) 求直线  $BC$  的解析式.

(3) 在直线  $BC$  上是否存在点  $P$ , 使  $\triangle PCD$  为等腰三角形? 若存在, 请直接写出点  $P$  的坐标; 若不存在, 说明理由.



## 参考答案

1.  $x=2$

【分析】分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到  $x$  的值，经检验即可得到分式方程的解.

解：  $\frac{x}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}$

方程两边同乘  $(x+1)(x-1)$ ,

得  $x(x-1)=2$ ,

整理得，  $x^2-x-2=0$ ,

$\therefore (x+1)(x-2)=0$ ,

解得：  $x_1=-1$ ，  $x_2=2$ ,

检验：当  $x=-1$  时，  $(x+1)(x-1)=0$ ，  $x=-1$  是增根，

当  $x=2$  时，  $(x+1)(x-1)=3 \neq 0$ ，

$\therefore$  原方程的解为  $x=2$  .

【点拨】本题考查了分式方程的解法，属于基本题型，熟练掌握解分式方程的方法是解题关键.

2.  $x=2$

解：方程两边都乘以  $(x+1)(x-1)$  得：

$2+(x-1)=(x+1)(x-1)$ ，解得： $x=2$  或  $-1$ .

经检验： $x=-1$  是增根.

$\therefore$  原方程的解为  $x=2$ .

首先去掉分母，观察可得最简公分母是  $(x+1)(x-1)$ ，方程两边乘最简公分母，可以把分式方程转化为整式方程求解，然后解一元二次方程，最后检验即可求解.

3.  $x=5$

【分析】根据分式方程的解法步骤求解即可.

解：去分母，得  $2(x-1)^2-8=x^2-1$ ，

去括号，得  $2x^2-4x+2-8=x^2-1$

移项、合并同类项，得  $x^2-4x-5=0$ ，

解得  $x_1=-1$ ，  $x_2=5$ ，

经检验， $x=5$ 是方程的解。

【点拨】本题考查解分式方程、解一元二次方程，熟练掌握分式方程的解法步骤是解答的关键。

4.  $x+1, 4$

【分析】先计算括号内的，再计算除法，然后解出一元二次方程 $x^2-2x-3=0$ ，根据分式有意义的条件可得 $x=3$ ，再代入化简后的结果，即可求解。

$$\begin{aligned}\text{解: } & \left(x-1-\frac{3}{x+1}\right) \div \frac{x^2-4}{x^2+2x+1} \\ & = \frac{x^2-1-3 \cdot \frac{(x+1)^2}{x+1}}{x^2+2x+1} \\ & = \frac{x^2-4}{x^2+2x+1} \\ & = x+1,\end{aligned}$$

$$\because x^2-2x-3=0,$$

$$\therefore x_1=3, x_2=-1,$$

$$\because x+1 \neq 0, \text{ 且 } x^2-4 \neq 0,$$

$$\therefore \text{取 } x=3,$$

$$\therefore \text{原式} = 3+1=4.$$

【点拨】本题主要考查了分式的化简求值，解一元二次方程，熟练掌握相关运算是解题的关键。

5.  $\frac{1}{12}$

$$\text{解: } \because x^2-2x+1=0,$$

$$\therefore x_1=x_2=1,$$

$$\text{原式} = \frac{x-3}{3x(x-2)} \div \frac{x^2-9}{x-2} = \frac{x-3}{3x(x-2)} \cdot \frac{x-2}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{3x(x+3)}.$$

$$\therefore \text{当 } x=1 \text{ 时, 原式} = \frac{1}{3 \times (1+3)} = \frac{1}{12}.$$

6.  $\frac{1}{a^2-a}; \frac{1}{6}$

【分析】先根据分式混合运算的顺序把原式进行化简，再根据 $a$ 是方程 $x^2-x-6=0$ 的根求出 $a$ 的值，代入原式进行计算即可。

$$\begin{aligned}\text{解: } & \frac{a-2}{a^2-1} \div \left(a-1-\frac{2a-1}{a+1}\right) \\ & = \frac{a-2}{(a+1)(a-1)} \div \left(\frac{a(a+1)}{a+1}-\frac{a+1}{a+1}-\frac{2a-1}{a+1}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{a-2}{(a+1)(a-1)} \div \frac{a^2+a-a-1-2a+1}{a+1}$$

$$= \frac{a-2}{(a+1)(a-1)} \div \frac{a^2-2a}{a+1}$$

$$= \frac{a-2}{(a+1)(a-1)} \times \frac{a+1}{a(a-2)}$$

$$= \frac{1}{a^2-a},$$

$\because a$  是方程  $x^2 - x - 6 = 0$  的根,

$$\therefore a^2 - a = 6,$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{6};$$

**【点拨】** 本题综合考查了一元二次方程的解、分式的化简求值. 解答此题时, 采用了“整体代入”思想是解题的关键, 避免了求  $a$  的值的繁琐过程, 而是直接将  $a^2 - a = 6$  整体代入化简后的代数式.

7. (1) =; (2)  $x^2 + y^2 \geq 2xy$ , 理由见分析; (3) 代数式  $x^2 + \frac{4}{x^2}$  的最小值为 8.

**【分析】** (1) 求得  $x^2 + y^2 = 18$ ,  $2xy = 18$ , 得到  $x^2 + y^2 = 2xy$ ;

(2) 结合完全平方的非负性即可解答;

(3) 利用归纳的结论即可求解.

解: 当  $x = 3$ ,  $y = 3$  时,  $\because x^2 + y^2 = 18$ ,  $2xy = 18$ ,

$$\therefore x^2 + y^2 = 2xy,$$

故答案为: =;

(2) 解:  $x^2 + y^2 \geq 2xy$ , 理由如下,

$$\because x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 \geq 0,$$

$$\therefore x^2 + y^2 \geq 2xy;$$

(3) 解:  $\because x^2 + y^2 \geq 2xy$ ,

$$\therefore x^2 + \frac{4}{x^2} \geq 2x^2 \cdot \frac{4}{x^2} = 8,$$

$\therefore$  代数式  $x^2 + \frac{4}{x^2}$  的最小值为 8.

**【点拨】** 本题考查了配方法的应用, 利用完全平方非负数的性质是解题关键.

8. (1) 答案解析; (2) 1.

**【分析】** (1) 根据配方法的步骤根据二次项系数为 1, 常数项是一次项系数的一半的平方进行配方和二

次项和常数项在一起进行配方即可.

(2) 根据配方法的步骤把  $x^2 + y^2 + xy - 3y + 3 = 0$  变形为  $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-2)^2 = 0$ , 再根据偶次幂的非负

性质得到  $\begin{cases} x + \frac{y}{2} = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$ , 求出  $x, y$  的值, 即可得出答案.

解: (1)  $x^2 - 8x + 4 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 4 = (x-4)^2 - 12$ ,

或  $x^2 - 8x + 4 = x^2 - 4x + 4 - 8x + 4x = (x-2)^2 - 4x$ .

(2)  $\because x^2 + y^2 + xy - 3y + 3 = 0$ ,

$\therefore x^2 + xy + \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4} - 3y + 3 = 0$ , 即  $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-2)^2 = 0$ .

$\therefore \begin{cases} x + \frac{y}{2} = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ .

$\therefore x^y = (-1)^2 = 1$ .

9. (1) 证明见分析; (2)  $m$  的值为 1 或 -2

【分析】(1) 根据一元二次方程根的判别式可进行求解;

(2) 根据一元二次方程根与系数的关系可进行求解.

解: (1) 证明:  $\because \Delta = [-(2m+1)]^2 - 4 \times (m^2 + m) = 1 > 0$ ,

$\therefore$  无论  $m$  取何值, 方程都有两个不相等的实数根.

(2) 解:  $\because x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0$  的两个实数根为  $a, b$ ,

$\therefore a + b = 2m + 1, ab = m^2 + m$ .

$\therefore (2a + b)(a + 2b) = 20$ ,

$\therefore 2a^2 + 4ab + 2b^2 + ab = 20, 2(a + b)^2 + ab = 20$ .

$\therefore 2(2m + 1)^2 + m^2 + m = 20$ .

即  $m^2 + m - 2 = 0$ .

解得  $m = 1$  或  $m = -2$ .

$\therefore m$  的值为 1 或 -2.

【点拨】本题主要考查一元二次方程根的判别式及根与系数的关系, 熟练掌握一元二次方程根的判别

式及根与系数的关系是解题的关键.

10. (1)见分析; (2)  $m = \pm 1$

【分析】(1) 根据根的判别式  $\Delta = b^2 - 4ac$ , 即可判断;

(2) 利用根与系数关系求出  $\alpha + \beta = 2$ , 由  $\alpha + 2\beta = 5$  即可解出  $\alpha, \beta$ , 再根据  $\alpha \cdot \beta = -3m^2$ , 即可得到  $m$  的值.

解: (1)  $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \cdot (-3m^2) = 4 + 12m^2$ ,

$\therefore 12m^2 \geq 0$ ,

$\therefore 4 + 12m^2 \geq 4 > 0$ ,

$\therefore$  该方程总有两个不相等的实数根;

(2)  $\therefore$  方程的两个实数根  $\alpha, \beta$ ,

由根与系数关系可知,  $\alpha + \beta = 2$ ,  $\alpha \cdot \beta = -3m^2$ ,

$\therefore \alpha + 2\beta = 5$ ,

$\therefore \alpha = 5 - 2\beta$ ,

$\therefore 5 - 2\beta + \beta = 2$ ,

解得:  $\beta = 3$ ,  $\alpha = -1$ ,

$\therefore -3m^2 = -1 \times 3 = -3$ , 即  $m = \pm 1$ .

【点拨】本题考查了根的判别式以及根与系数的关系, 解题的关键是掌握根的判别式以及根与系数的关系.

11. (1) 见详解; (2)  $m = 1$

【分析】(1) 由题意及一元二次方程根的判别式可直接进行求证;

(2) 设关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 4mx + 3m^2 = 0$  的两实数根为  $x_1, x_2$ , 然后根据一元二次方程根与系数的关系可得  $x_1 + x_2 = 4m, x_1 \cdot x_2 = 3m^2$ , 进而可得  $(x_1 - x_2)^2 = 4$ , 最后利用完全平方公式代入求解即可.

解: (1) 证明: 由题意得:  $a = 1, b = -4m, c = 3m^2$ ,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 16m^2 - 4 \times 1 \times 3m^2 = 4m^2$ ,

$\therefore m^2 \geq 0$ ,

$\therefore \Delta = 4m^2 \geq 0$ ,

$\therefore$  该方程总有两个实数根;

(2) 解: 设关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 - 4mx + 3m^2 = 0$  的两实数根为  $x_1, x_2$ , 则有:



$$x_1 + x_2 = 4m, x_1 \cdot x_2 = 3m^2,$$

$$\therefore |x_1 - x_2| = 2,$$

$$\therefore (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16m^2 - 12m^2 = 4,$$

$$\text{解得: } m = \pm 1,$$

$$\therefore m > 0,$$

$$\therefore m = 1.$$

【点拨】本题主要考查一元二次方程根的判别式及根与系数的关系，熟练掌握一元二次方程根的判别式及根与系数的关系是解题的关键。

$$12. (1) -\frac{1}{2}; (2) \textcircled{1} \square OCED \text{ 的周长 } 8+4\sqrt{5}; \textcircled{2} C \text{ 的坐标为 } (-3, \frac{11}{2}) \text{ 或 } (11, -\frac{3}{2}).$$

【分析】(1) 根据点 A 的坐标，利用待定系数法可求出 k 值；

(2) ①利用一次函数图象上点的坐标特征可得出点 B 的坐标，由平行四边形的性质结合点 E 为 OB 的中点可得出 CE 是  $\triangle ABO$  的中位线，结合点 A 的坐标可得出 CE 的长，在  $\text{Rt}\triangle DOE$  中，利用勾股定理可求出 DE 的长，再利用平行四边形的周长公式即可求出  $\square OCED$  的周长；

②设点 C 的坐标为  $(x, -\frac{1}{2}x+4)$ ，则  $CE = |x|$ ， $CD = |-\frac{1}{2}x+4|$ ，利用三角形的面积公式结合  $\triangle CDE$  的面积为  $\frac{33}{4}$  可得出关于 x 的方程，解之即可得出结论。

解：(1) 将 A (8, 0) 代入  $y=kx+4$ ，得： $0=8k+4$ ，

$$\text{解得: } k = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{故答案为 } -\frac{1}{2}.$$

(2) ①由 (1) 可知直线 AB 的解析式为  $y = -\frac{1}{2}x+4$ 。

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } y = -\frac{1}{2}x+4=4,$$

$$\therefore \text{点 B 的坐标为 } (0, 4),$$

$$\therefore OB=4.$$

$\therefore$ 点 E 为 OB 的中点，

$$\therefore BE=OE = \frac{1}{2}OB=2.$$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 (8, 0)，

$\therefore OA=8.$

$\therefore$  四边形 OCED 是平行四边形,

$\therefore CE \parallel DA,$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{BE}{OE} = 1,$$

$\therefore BC=AC,$

$\therefore CE$  是  $\triangle ABO$  的中位线,

$$\therefore CE = \frac{1}{2} OA = 4.$$

$\therefore$  四边形 OCED 是平行四边形,

$\therefore OD=CE=4, OC=DE.$

在  $Rt\triangle DOE$  中,  $\angle DOE=90^\circ, OD=4, OE=2,$

$$\therefore DE = \sqrt{OD^2 + OE^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore C_{\text{平行四边形 OCED}} = 2(OD+DE) = 2(4+2\sqrt{5}) = 8+4\sqrt{5}.$$

② 设点 C 的坐标为  $(x, -\frac{1}{2}x+4)$ , 则  $CE=|x|, CD=|-\frac{1}{2}x+4|,$

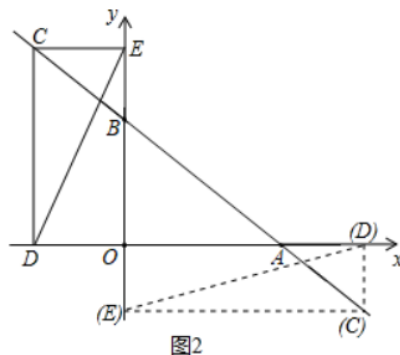
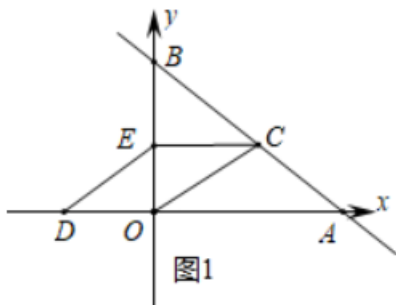
$$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} CD \cdot CE = |-\frac{1}{4}x^2+2x| = \frac{33}{4},$$

$$\therefore x^2+8x+33=0 \text{ 或 } x^2+8x-33=0.$$

方程  $x^2+8x+33=0$  无解;

解方程  $x^2+8x-33=0$ , 得:  $x_1=-3, x_2=11,$

$\therefore$  点 C 的坐标为  $(-3, \frac{11}{2})$  或  $(11, -\frac{3}{2}).$



**【点拨】** 本题考查了待定系数法求一次函数解析式、一次函数图象上点的坐标特征、平行四边形的性质、勾股定理、平行四边形的周长、三角形的面积、解一元二次方程以及三角形的中位线, 解题的关键是:

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/736035005030010131>