2023-2024 学年十月份初三数学学科素养评估试卷

一、选择题（共 8 小题，每题 3 分，满分 24 分）

1. 下列方程是一元二次方程的是（　　）

A. $3x+2y-1=0$　　B. $5x^2-6y-3=0$　　C. $-x+2=0$　　D. $x^2-1=0$

【答案】D

【解析】

【分析】根据一元二次方程的定义，逐项分析即可，一元二次方程是指只含有一个未知数，且未知数最高次数为 2 次的整式方程.

【详解】A. $3x+2y-1=0$，是二元一次方程，不符合题意；

B. $5x^2-6y-3=0$，是二元二次方程，不符合题意；

C. $-x+2=0$，是一元一次方程，不符合题意；

D. $x^2-1=0$，是一元二次方程，符合题意；

故选 D

【点睛】本题考查了一元二次方程的定义，掌握一元二次方程的定义是解题的关键.

2. 已知 $3a=2b\left(ab\neq 0\right)$，下列变形错误的是（　　）

A. $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$　　B. $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$　　C. $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$　　D. $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】比例的性质，$a:b=c:d$，则 $ad=bc$，由此性质对比例式变形即可.

【详解】解：A、由 $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，可得 $3a=2b\left(ab\neq 0\right)$，故本选项正确，不符合题意；

B、$\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$，可得 $2a=3b\left(ab\neq 0\right)$，故本选项错误，符合题意；

C、由 $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$，可得 $3a=2b\left(ab\neq 0\right)$，故本选项正确，不符合题意；

D、由 $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$，可得 $3a=2b\left(ab\neq 0\right)$，故本选项正确，不符合题意.

故选：B.

【点睛】本题考查比例的性质，熟练掌握比例的性质:内项积等于外项积，利用性质对比例式进行变形是解题的关键.

3. 已知 x_1、x_2 是一元二次方程 $x^2+4x+3=0$ 的两根，则 $x_1+x_2+2x_1x_2$ 的值为（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】利用根与系数的关系得到$x_1+x_2=-4$，$x_1x_2=3$，然后利用整体代入的方法计算$x_1+x_2+2x_1x_2$的值.

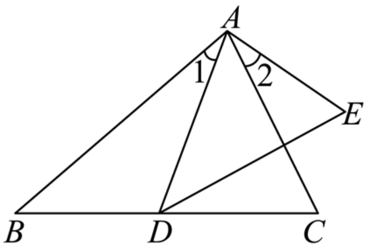
【详解】解：根据题意得：$x_1+x_2=-4$，$x_1x_2=3$，

所以$x_1+x_2+2x_1x_2=-4+2\times 3=2$.

故选：D.

【点睛】本题考查了根与系数的关系：若x_1、x_2是一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两根时，$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

4. 如图，已知$\angle 1=\angle 2$，那么添加下列一个条件后，不能判定$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$的是（　　）



A. $\angle C=\angle E$　　B. $\angle B=\angle ADE$　　C. $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$　　D. $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$

【答案】D

【解析】

【分析】本题主要考查了相似三角形的判定：如果两个三角形的三组对应边的比相等，那么这两个三角形相似；如果两个三角形的两条对应边的比相等，且夹角相等，那么这两个三角形相似；如果两个三角形的两个对应角相等，那么这两个三角形相似.

先根据$\angle 1=\angle 2$求出$\angle BAC=\angle DAE$，再根据相似三角形的判定方法解答.

【详解】解：$\because \angle 1=\angle 2$，

$\therefore \angle BAC=\angle DAE$，

A、添加$\angle C=\angle E$，可用两角法判定$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$，故本选项不符合题意；

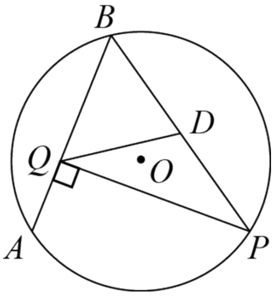
B、添加$\angle B=\angle ADE$，可用两角法判定$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$，故本选项不符合题意；

C、添加$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$，可用两边及其夹角法判定$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$，故本选项不符合题意；

D、添加$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}$，不能判定$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$，故本选项符合题意；

故选：D.

5. 如图，$\odot O$ 中，P 为优弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上一个动点（不与 A，B 两点重合），$PQ \perp AB$，垂足为 Q，D 是 PB 的中点，连接 DQ．若 $\odot O$ 的半径为 4，则线段 DQ 的最大值是（　　）



A. 4　　　　B. $4\sqrt{2}$　　　　C. 6　　　　D. 8

【答案】A

【解析】

【分析】根据直角三角形斜边上的中线，得出 $DQ=\frac{1}{2}PB$，当 PB 为直径时，PB 最大，解答即可．

【详解】解：$\because PQ \perp AB$，垂足为 Q，D 是 PB 的中点，

$\therefore DQ=\frac{1}{2}PB$，

当 PB 为直径时，PB 最大，

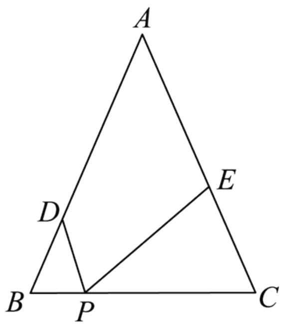
$\because \odot O$ 的半径为 4，

当 $PB=8$ 时，$DQ=4$，

故选：A．

【点睛】本题考查了直角三角形斜边上的中线，掌握直角三角形斜边上的中线的性质是解题的关键．

6. 如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=\angle ACB=\alpha$，$BC=12$，点 D 是边 AB 上一点，且 $BD=4$，点 P 是边 BC 上一动点，作 $\angle DPE=\alpha$，射线 PE 交边 AC 于点 E，当 $CE=9$ 时，则 BP 的长为（　　）



A. 4　　　　B. 6　　　　C. 9　　　　D. 无法确定

【答案】B

【解析】

【分析】由已知得 $\angle ABC=\angle ACB=\alpha$，再证明 $\angle EPC=\angle PDB$，则可判断 $\triangle PDB \backsim \triangle EPC$

，利用相似比得到 $BD:PC=BP:CE$，设 $BP=x$，则 $PC=12-x$，当 $BD=4$，$CE=9$ 时，所以 $x^2-12x+36=0$，解方程即可求解.

【详解】解：$\because \triangle ABC$ 为等腰三角形，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=\alpha$，

$\because \angle DPC=\angle B+\angle PDB$ 即 $\angle DPE+\angle EPC=\angle B+\angle PDB$，$\angle DPE=\alpha$，

$\therefore \angle EPC=\angle PDB$，

又 $\because \angle ABC=\angle ACB$，

$\therefore \triangle PDB \backsim \triangle EPC$，

$\therefore BD:PC=BP:CE$，

设 $BP=x$，则 $PC=12-x$，当 $BD=4$，$CE=9$ 时，

$\dfrac{4}{12-x}=\dfrac{x}{9}$，

$\therefore x^2-12x+36=0$，

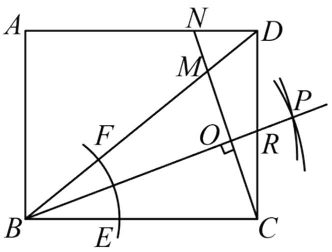
解得：$x_1=x_2=6$，

$\therefore BP=6$，

故选：B.

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质，熟练掌握相似三角形的判定与性质以及能灵活运用相似三角形的性质表示线段之间的关系是解题的关键.

7. 如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=4$，以点 B 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 BC，BD 于点 E，F，再分别以点 E，F 为圆心，大于 $\dfrac{1}{2}EF$ 长为半径画弧交于点 P，作射线 BP，过点 C 作 BP 的垂线分别交 BD, AD 于点 M，N，则 CN 的长为（　　）



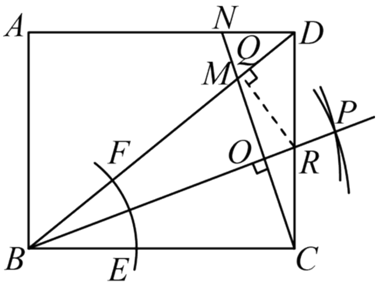
A. $\sqrt{10}$　　B. $\sqrt{11}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】由作图可知BP平分$\angle CBD$，设BP与CN交于点O，与CD交于点R，作$RQ\perp BD$于点Q，根据角平分线的性质可知$RQ=RC$，进而证明$\mathrm{Rt}\triangle BCR\cong\mathrm{Rt}\triangle BQR$，推出$BC=BQ=4$，设$RQ=RC=x$，则$DR=CD-CR=3-x$，解$\mathrm{Rt}\triangle DQR$求出$QR=CR=\dfrac{4}{3}$．利用三角形面积法求出$OC$，再证$\triangle OCR\backsim\triangle DCN$，根据相似三角形对应边成比例即可求出$CN$．

【详解】解：如图，设BP与CN交于点O，与CD交于点R，作$RQ\perp BD$于点Q，



$\because$矩形$ABCD$中，$AB=3$，$BC=4$，

$\therefore CD=AB=3$，

$\therefore BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=5$．

由作图过程可知，BP平分$\angle CBD$，

$\because$四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore CD\perp BC$，

又$\because RQ\perp BD$，

$\therefore RQ=RC$，

在$\mathrm{Rt}\triangle BCR$和$\mathrm{Rt}\triangle BQR$中，

$\begin{cases}RQ=RC\\BR=BR\end{cases}$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle BCR\cong\mathrm{Rt}\triangle BQR\ (\mathrm{HL})$，

$\therefore BC=BQ=4$，

$\therefore QD=BD-BQ=5-4=1$，

设$RQ=RC=x$，则$DR=CD-CR=3-x$，

在$\mathrm{Rt}\triangle DQR$中，由勾股定理得$DR^2=DQ^2+RQ^2$，

即$\left(3-x\right)^2=1^2+x^2$，

解得$x=\dfrac{4}{3}$，

$\therefore CR=\dfrac{4}{3}$.

$\therefore BR=\sqrt{BC^2+CR^2}=\dfrac{4}{3}\sqrt{10}$.

$\because S_{\triangle BCR}=\dfrac{1}{2}CR\cdot BC=\dfrac{1}{2}BR\cdot OC$，

$\therefore OC=\dfrac{CR\cdot BC}{BR}=\dfrac{\dfrac{4}{3}\times 4}{\dfrac{4}{3}\sqrt{10}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{10}$.

$\because \angle COR=\angle CDN=90°$，$\angle OCR=\angle DCN$，

$\therefore \triangle OCR\backsim\triangle DCN$，

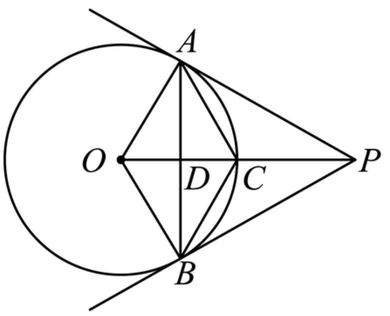
$\therefore \dfrac{OC}{DC}=\dfrac{CR}{CN}$，即$\dfrac{\dfrac{2}{5}\sqrt{10}}{3}=\dfrac{\dfrac{4}{3}}{CN}$，

解得$CN=\sqrt{10}$.

故选 A.

【点睛】本题考查角平分线的作图方法，矩形的性质，角平分线的性质，全等三角形的判定与性质，勾股定理，相似三角形的判定与性质等，涉及知识点较多，有一定难度，解题的关键是根据作图过程判断出BP平分$\angle CBD$，通过勾股定理解直角三角形求出CR.

8. 如图，点 A，B 在$\odot O$上，P 为$\odot O$外一点，且$PA\perp OA$，$PB\perp OB$，连接 OP，OP 与$\odot O$相交于点 C，与 AB 交于点 D，连接AC，BC，有下列结论：①$PA=PB$；②$OP\perp AB$；③C 为$\overset{\frown}{AB}$中点；④四边形$AOBC$为菱形；⑤O，A，B，P 四点共圆，其中一定成立的有（　　）个



A. 2　　　　B. 3　　　　C. 4　　　　D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】由P为$\odot O$外一点，且$PA\perp OA$，$PB\perp OB$，可得$\angle OAP=\angle OBP=90^\circ$，然后依据HL可证明$\triangle AOP\cong\triangle BOP$，可判断①；进而可证明$\triangle ADP\cong\triangle BDP$，可判断②，根据$\angle AOP=\angle BOP$，得到$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，可判断③，要使得四边形$AOBC$为菱形，即$OD=CD$必须成立，即$\angle OAD=\angle CAD$必须成立，即$OA=AC$必须成立，显然，只有当$\angle AOC=60^\circ$时，这些前提才成立，故可判断④，由直角三角形的性质可得到$\angle AOP+\angle APO=90^\circ$，$\angle BOP+\angle BPO=90^\circ$，即$\angle APB+\angle AOB=180^\circ$，可判断⑤.

【详解】证明：$\because PA\perp OA$，$PB\perp OB$，

$\therefore \angle OAP=\angle OBP=90^\circ$，

在$\mathrm{Rt}\triangle AOP$和$\mathrm{Rt}\triangle BOP$中，

$\begin{cases}OP=OP\\OA=OB\end{cases}$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AOP\cong\mathrm{Rt}\triangle BOP(\mathrm{HL})$，

$\therefore PA=PB$，故①一定成立；

$\because \mathrm{Rt}\triangle AOP\cong\mathrm{Rt}\triangle BOP$，

$\therefore \angle APO=\angle BPO$，

在$\triangle ADP$和$\triangle BDP$中，

$\begin{cases}AP=BP\\\angle APO=\angle BPO\\PD=PD\end{cases}$，

$\therefore \triangle ADP\cong\triangle BDP(\mathrm{SAS})$，

$\therefore \angle ADP=BDP=90^\circ$，即$OP\perp AB$，故②一定成立；

$\because \angle AOP=\angle BOP$，

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，故③一定成立；

要使得四边形$AOBC$为菱形，

$\therefore OD=CD$，即$\angle OAD=\angle CAD$，即$OA=AC$，

显然，只有当$\angle AOC=60^\circ$时，这些前提才成立，故④不一定成立；

$\because \angle AOP+\angle APO=90^\circ$，$\angle BOP+\angle BPO=90^\circ$，

$\therefore \angle APB+\angle AOB=180^\circ$，

$\therefore$ O，A，B，P四点共圆，故⑤一定成立；

$\therefore$一定成立的有：①②③⑤，

故选：C.

【点睛】此题重点考查圆的有关概念和性质、切线的性质定理、切线长定理、等腰三角形的“三线合一”、勾股定理、四点共圆等知识，由切线长定理证明 $PA=PB$， PO 平分 $\angle APB$ 是解题的关键．

二、填空题（共 10 小题，每题 3 分，满分 30 分）

9. 若 $x=1$ 是方程 $x^2-a=0$ 的根，则 $a=$______．

【答案】1

【解析】

【分析】将 $x=1$ 代入原方程，即可得出关于 a 的方程，求出解即可．

【详解】当 $x=1$ 时，$1-a=0$，

解得 $a=1$．

故答案为：1．

【点睛】本题主要考查了一元二次方程的根，理解一元二次方程的根的意义是解题的关键．

10. 在比例尺为 1：40000 的地图上，某条道路的长为 7*cm*，则该道路的实际长度是_____*km*．

【答案】2.8

【解析】

【详解】设这条道路的实际长度为 x，

则：$\dfrac{1}{40000}=\dfrac{7}{x}$，

解得 x=280000*cm*=2.8*km*，

经检验，x=280000 是原方程的解

∴280000*cm*=2.8*km*

∴这条道路的实际长度为 2.8*km*．

故答案为 2.8．

【点睛】本题考查了根据比例尺列出分式方程，解题的关键是知道比例尺的意义．

11. 已知点 C 是线段 AB 的黄金分割点 $\left(AC>BC\right)$，若线段 AB 的长 10cm，则线段 AC 的长为________．（结果保留根号）

【答案】$\left(5\sqrt{5}-5\right)\text{cm}$

【解析】

【分析】根据黄金分割的定义得 $AC=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}AB$，代入 AB 的长计算即可．

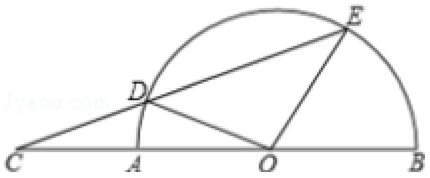
【详解】解：∵点 C 是线段 AB 的黄金分割点 $\left(AC>BC\right)$， $AB=10\text{cm}$，

$\therefore AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\times 10=\left(5\sqrt{5}-5\right)\text{cm}$，

故答案为：$\left(5\sqrt{5}-5\right)\text{cm}$.

【点睛】本题主要考查了黄金分割，解题的关键是熟练掌握黄金比，如果点 C 是线段 AB 的黄金分割点 $\left(AC>BC\right)$，那么 $AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$.

12. 如图，以 AB 为直径的半圆 O 上有两点 D、E，ED 与 BA 的延长线交于点 C，且有 DC=OE，若∠C=20°，则∠EOB 的度数是__________.



【答案】60°.

【解析】

【详解】∵CD=OD=OE,

∴∠C=∠DOC=20°,

∴∠EDO=∠E=40°,

∴∠EOB=∠C+∠E=20°+40°=60°.

故答案是：60°.

13. 某商品经过两次降价，由每件 100 元降至 81 元，则平均每次降价的百分率为_________

【答案】10%

【解析】

【分析】设平均每次降价的百分率为 x，那么第一次降价后的单价是原来的 $\left(1-x\right)$，那么第二次降价后的单价是原来的 $\left(1-x\right)^2$，根据题意列方程解答即可.

【详解】解：设平均每次降价的百分率为 x，根据题意列方程得

$100\times\left(1-x\right)^2=81$，

解得 $x_1=0.1=10\%$， $x_2=1.9$（不符合题意，舍去），

故答案为：10%.

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

14. 已知实数a，b分别满足$a^2+2a=2$，$b^2+2b=2$，$a \neq b$，则$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=$______.

【答案】-4

【解析】

【分析】a，b可看作方程$x^2+2x-2=0$的两个实数根，根据根与系数的关系得到$a+b=-2$，$ab=-2$，最后代入$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{ab}$进行求值即可.

【详解】解：$\because$实数a，b分别满足$a^2+2a=2$，$b^2+2b=2$，$a \neq b$，

$\therefore a$，b可看作方程$x^2+2x-2=0$的两个实数根，

$\therefore a+b=-2$，$ab=-2$，

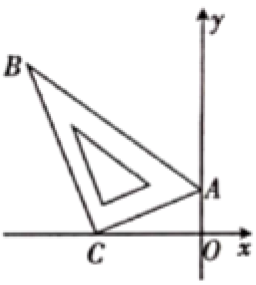
$\because \dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{ab}$，

$\therefore \dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{(-2)^2-2\times(-2)}{-2}=-4$.

故答案为：-4.

【点睛】本题考查了方程解的定义，一元二次方程根与系数的关系，代数式求值，理解方程的解的定义是解答本题的关键.

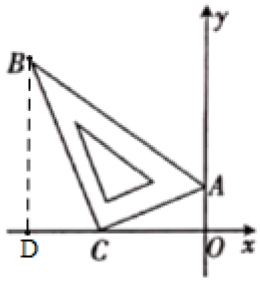
15. 一块含有$30°$角的直角三角板ABC按如图所示的方式放置，若顶点A的坐标为$(0,1)$，直角顶点C的坐标为$y\left(-\sqrt{3},0\right)$，则点$B$的坐标为______.



【答案】$\left(-2\sqrt{3},3\right)$

【解析】

【分析】过点B作BD⊥OD于点D，根据△ABC为直角三角形可证明△BCD∽△CAO，设点B坐标为（x，y），根据相似三角形的性质即可求解.

【详解】

过点 B 作 $BD\perp OD$ 于点 D，

∵$\triangle ABC$ 为直角三角形，

∴$\angle BCD+\angle ACO=90^\circ$，

∴$\triangle BCD\backsim\triangle CAO$，

∴$\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{CO}{AO}$，

设点 B 坐标为(x,y)，

则$\dfrac{y}{x-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}$，

∴ $y=\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)$，

∴$BC=\sqrt{\left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left[\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)\right]^2}=\sqrt{4x^2-8\sqrt{3}x+12}$

AC=2，

∵有图知，$\angle B=30^\circ$，

∴$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{2}{\sqrt{4x^2-8\sqrt{3}x+12}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

解得：$x=-2\sqrt{3}$，

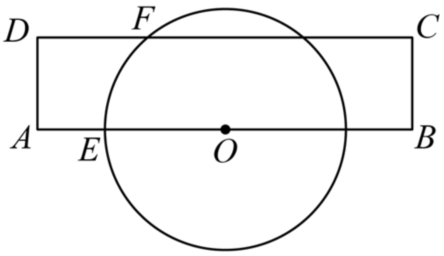
则 y=3.

即点 B 的坐标为$\left(-2\sqrt{3},3\right)$.

故答案为$\left(-2\sqrt{3},3\right)$

【点睛】本题考查了坐标与图形性质、相似三角形的判定及性质、特殊角的三角函数值，解题的关键是要求出 BC 和 AC 的值和 30 度角的三角函数联系起来，作辅助线构造直角三角形为三角函数作铺垫.

16. 如图，矩形 $ABCD$ 的边 AB 过 e O 的圆心，E 、F 分别为 AB 、CD 与 e O 的交点，若 $AE=3\text{cm}$，$AD=4\text{cm}$，$DF=5\text{cm}$，则 e O 的直径等于________.

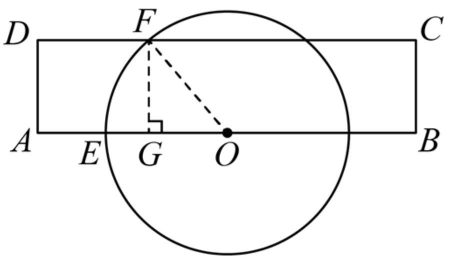


【答案】10

【解析】

【分析】连接 OF，作 $FG\perp AB$ 于点 G，则 $EG=DF-AE=5-3=2\text{cm}$，设 $\odot O$ 的半径是 R，在 $\text{Rt}\triangle OFG$ 中利用勾股定理即可得到一个关于 R 的方程，解方程求得半径，则圆的直径即可求解．

【详解】解：连接 OF，作 $FG\perp AB$ 于点 G．



$\because$ 矩形 $ABCD$，

$\therefore \angle A=\angle D=90^\circ$，

$\therefore$ 四边形 $AGFD$ 是矩形，

$\therefore EG=DF-AE=5-3=2\text{cm}$，

设 $\odot O$ 的半径是 R，

则 $OF=R$，$OG=R-2$．

在 $\text{Rt}\triangle OFG$ 中，$OF^2=FG^2+OG^2$，

即 $R^2=(R-2)^2+4^2$，

解得：$R=5$，

则直径是 10cm，

故答案为：10．

【点睛】本题考查了勾股定理，正确作出辅助线是关键．

17．《代数学》中记载，形如 $x^2+8x=33$ 的方程求正数解的几何方法是："如图①，先构造一个面积为 x^2 的正方形，再以正方形的边长为一边向外构造四个面积为 $2x$ 的矩形，得到大正方形的面积为 $33+4\times 2^2=49$，则该方程的正数解为 $\sqrt{49}-2\times 2=3$．"小聪按此方法解决了关于 x 的方程

$x^2+12x+m=0$，构造图②，已知阴影部分的面积为 60，则该方程的正数解为______.

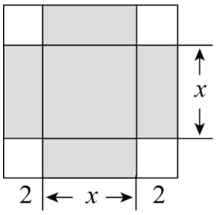


图1

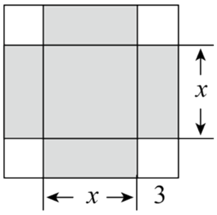


图2

【答案】$4\sqrt{6}-6$

【解析】

【分析】先把方程化为指定的形式，根据题意，得$12x=4ax$，确定$a=3$，继而得到大正方形的面积为$60+4\times3^2=96$，从而得到方程的正数解为$\sqrt{96}-2\times3$计算即可.

【详解】由$x^2+12x+m=0$得$x^2+12x=-m$，

∵阴影部分的面积为 60，

∴$x^2+12x=60$，

根据题意，得$12x=4ax$，

∴$a=3$，

∴大正方形的面积为$60+4\times3^2=96$，

∴方程的正数解为$\sqrt{96}-2\times3=4\sqrt{6}-6$，

故答案为：$4\sqrt{6}-6$.

【点睛】本题考查了阅读学习的本领，利用图形求一元二次方程的解，正确读取解题信息是解题的关键.

18. 如图，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，$BC=1$，$AC=2$，把边长分别为x_1，x_2，x_3，…，x_n的n个正方形依次放$\vee ABC$中，第 1 个正方形$CM_1P_1N_1$的顶点分别放在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$的各边上；第 2 个正方形$M_1M_2P_2N_2$的顶点分别放在$\mathrm{Rt}\vee AP_1M_1$的各边上；其他正方形依次放入，则第 2023 个正方形的边长x_{2023}为______.