2024年湖北云学名校联盟高二年级10月联考

数学试卷

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知i为虚数单位，$\dfrac{3+\mathrm{i}^{2025}}{1+\mathrm{i}}$的虚部为（　　）

A. $-\mathrm{i}$　　B. i　　C. -1　　D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】根据复数乘方、乘法、除法运算法则结合复数的概念运算即可得出结果.

【详解】根据复数的乘方可知$\mathrm{i}^{2025}=\left(\mathrm{i}^4\right)^{506}\cdot\mathrm{i}=\mathrm{i}$，

则$\dfrac{3+\mathrm{i}^{2025}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(3+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{3-2\mathrm{i}+1}{2}=2-\mathrm{i}$，其虚部为$-1$.

故选：C

2. 已知一组数据：2，5，7，x，10的平均数为6，则该组数据的第60百分位数为（　　）

A. 7　　B. 6.5　　C. 6　　D. 5.5

【答案】B

【解析】

【分析】先根据平均数求x的值，然后将数据从小到大排列，根据百分位数的概念求值.

【详解】因为$\dfrac{2+5+7+x+10}{5}=6\Rightarrow x=6$.

所以数据为：2，5，6，7，10.

又因为$5\times60\%=3$，所以这组数据的第60百分位数为：$\dfrac{6+7}{2}=6.5$.

故选：B

3. 直线l_1：$ax-y+2025=0$，l_2：$(3a-2)x+ay-2a=0$，若$l_1\perp l_2$，则实数a的值为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 0或1　　D. $\dfrac{1}{3}$或1

【答案】C

【解析】

【分析】根据两直线垂直的公式 $A_1A_2+B_1B_2=0$ 求解即可.

【详解】因为 l_1： $ax-y+2025=0$， l_2： $(3a-2)x+ay-2a=0$ 垂直，

所以 $a(3a-2)+(-1)a=0$，

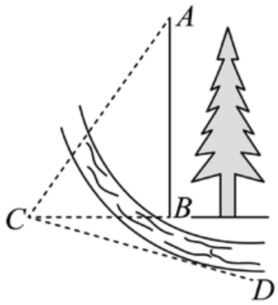
解得 $a=0$ 或 $a=1$，

将 $a=0$， $a=1$ 代入方程，均满足题意，

所以当 $a=0$ 或 $a=1$ 时， $l_1 \perp l_2$.

故选： C .

4. 为了测量河对岸一古树高度 AB 的问题（如图），某同学选取与树底 B 在同一水平面内的两个观测点 C 与 D，测得 $\angle BCD=15°$， $\angle BDC=30°$， $CD=48\text{m}$，并在点 C 处测得树顶A的仰角为 $60°$，则树高 AB 约为（　　）（取 $\sqrt{2}\approx 1.4$， $\sqrt{3}\approx 1.7$）



A. 100.8m　　B. 33.6m　　C. 81.6m　　D. 57.12m

【答案】D

【解析】

【分析】先在 $\triangle BCD$ 中，利用正弦定理求出 BC，再在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中求 AB 即可.

【详解】在 $\triangle BCD$ 中， $\angle BCD=15°$， $\angle BDC=30°$，所以 $\angle CBD=135°$，又 $CD=48$，

由正弦定理得： $\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{CB}{\sin\angle CDB} \Rightarrow \dfrac{48}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{CB}{\frac{1}{2}} \Rightarrow CB=24\sqrt{2}$.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB=BC\tan 60°=24\sqrt{6}\approx 24\times 1.4\times 1.7=57.12$.

故选：D

5. 如果直线 $ax+by=4$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 有两个不同的交点，那么点 $P(a，b)$ 与圆的位置关系是(　　)

A. P在圆外

B. P在圆上

C. P在圆内

D. P与圆的位置关系不确定

【答案】A

【解析】

【详解】试题分析：由题意得$\frac{|-4|}{\sqrt{a^2+b^2}}\langle 2\therefore a^2+b^2\rangle 4$，所以点$(a,b)$在圆外

考点：1．直线与圆的位置关系；2．点与圆的位置关系

6. 在棱长为6的正四面体$ABCD$中，点P与Q满足$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，且$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CQ}$，则$|\overrightarrow{PQ}|$的值为（　　）

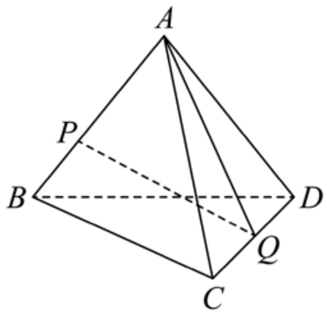
A. $\sqrt{13}$　　　B. $\sqrt{15}$　　　C. $\sqrt{17}$　　　D. $\sqrt{19}$

【答案】D

【解析】

【分析】以$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\}$为基底，表示出$\overrightarrow{PQ}$，利用空间向量的数量积求模.

【详解】如图：



以$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\}$为基底，则$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|=6$，$\angle BAC=\angle BAD=\angle CAD=60°$，

所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=6\times 6\times\cos 60°=18$.

因为$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

所以$|\overrightarrow{PQ}|^2=\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)^2$

$=\frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{AD}|^2-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=16+9+9-12-12+9=19$.

所以$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{19}$.

故选：D

7. 下列命题中正确的是（　　）

A. $4z_1^2+z_2^2=0$，则 $z_1=z_2=0$；

B. 若点 P、Q、R、S 共面，点 P、Q、R、T 共面，则点 P、Q、R、S、T 共面；

C. 若 $P(A)+P(B)=1$，则事件 A 与事件 B 是对立事件；

D. 从长度为 1，3，5，7，9 的 5 条线段中任取 3 条，则这三条线段能构成一个三角形的概率为 $\frac{3}{10}$；

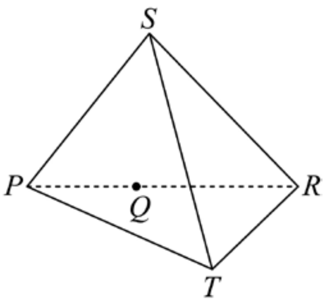
【答案】D

【解析】

【分析】举反例说明 ABC 不成立，根据古典概型的算法判断 D 是正确的.

【详解】对 A：若 $z_1=\mathrm{i}$，$z_2=2$，则 $4z_1^2+z_2^2=0$，但 $z_1=z_2=0$ 不成立，故 A 错误；

对 B：如图：



四面体 $S-PRT$ 中，Q 是棱 PR 上一点，

则点 P、Q、R、S 共面，点 P、Q、R、T 共面，但点 P、Q、R、S、T 不共面，故 B 错误；

对 C：掷 1 枚骰子，即事件 A：点数为奇数，事件 B：点数不大于 3，

则 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{2}$，$P(A)+P(B)=1$，但事件 A、B 不互斥，也不对立，故 C 错误；

对 D：从长度为 1，3，5，7，9 的 5 条线段中任取 3 条，有 $C_5^3=10$ 种选法，

这三条线段能构成一个三角形的的选法有：$\{3,5,7\}$，$\{3,7,9\}$，$\{5,7,9\}$ 共 3 种，

所以条线段能构成一个三角形的的概率为：$P=\frac{3}{10}$，故 D 正确.

故选：D

8. 动点 Q 在棱长为 3 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 侧面 BCC_1B_1 上，满足 $|QA|=2|QB|$，则点 Q 的轨迹长度为（　　）

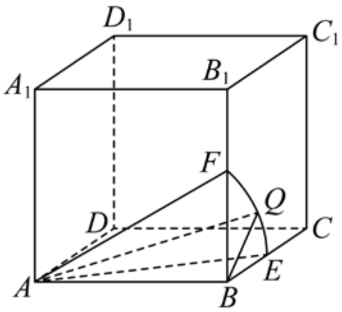
A. 2π　　　　B. $\frac{4\pi}{3}$　　　　C. $\sqrt{3}\pi$　　　　D. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】结合图形，计算出$|BQ|=\sqrt{3}$，由点$Q\in$平面BCC_1B_1，得出点Q的轨迹为圆弧$\overset{\frown}{EQF}$，利用弧长公式计算即得.

【详解】



如图，易得$AB\perp$平面BCC_1B_1,因$BQ\subset$平面BCC_1B_1，则$AB\perp BQ$，

不妨设$|BQ|=r$，则$|AQ|=2r$，$|AB|=\sqrt{(2r)^2-r^2}=\sqrt{3}r=3$，解得$r=\sqrt{3}$，

又点$Q\in$平面BCC_1B_1，故点Q的轨迹为以点B为圆心，半径为$\sqrt{3}$的圆弧$\overset{\frown}{EQF}$，

故其长度为$\frac{\pi}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$.

故选：D.

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9. 在平面直角坐标系中，下列说法正确的是（　　）

A. 若两条直线垂直，则这两条直线的斜率的乘积为-1；

B. 已知$A(2,4)$，$B(1,1)$，若直线l：$kx+y+k-2=0$与线段AB有公共点，则$k\in\left[-\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right]$；

C. 过点$(1,2)$，且在两坐标轴上截距互为相反数的直线l的方程为$x-y+1=0$；

D. 若圆$(x-1)^2+y^2=4$上恰有3个点到直线$y=x+b$的距离等于1，则$b=-1\pm\sqrt{2}$.

【答案】BD

【解析】

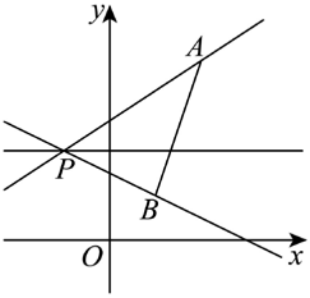
【分析】根据直线是否存在斜率判断A的真假；数形结合求k的取值范围判断B的真假；根据截距的概念判断真假；转化为点（圆心）到直线的距离求b判断D的真假.

【详解】对A：“若两条直线垂直，则这两条直线的斜率的乘积为-1”成立的前提是两条直线的斜率都存

在且不为 0，

若两条直线 1 条不存在斜率，另一条斜率为 0，它们也垂直.故 A 是错误的.

对 B：如图：



对直线l：$kx+y+k-2=0 \Rightarrow y-2=-k\left(x+1\right)$，表示过点$P\left(-1,2\right)$，且斜率为$-k$的直线，

且$k_{AP}=\dfrac{4-2}{2-\left(-1\right)}=\dfrac{2}{3}$，$k_{BP}=\dfrac{1-2}{1-\left(-1\right)}=-\dfrac{1}{2}$，

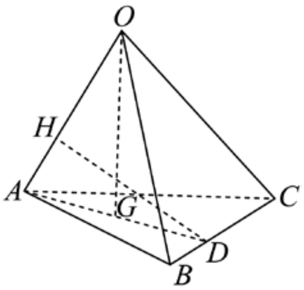
由直线l与线段AB有公共点，所以：$0\le -k\le \dfrac{2}{3}$或$-\dfrac{1}{2}\le -k<0$，即$-\dfrac{2}{3}\le k\le 0$或$0<k\le \dfrac{1}{2}$，进而得：$-\dfrac{2}{3}\le k\le \dfrac{1}{2}$.故 B 正确；

对 C：过点$\left(1,2\right)$，且在两坐标轴上截距互为相反数的直线l的方程为$x-y+1=0$或$y=2x$，故 C 错误；

对 D：“圆$\left(x-1\right)^2+y^2=4$上恰有 3 个点到直线$y=x+b$的距离等于 1”可转化为“圆心(1,0)到直线$y=x+b$的距离等于 1”. 由$\dfrac{\left|1+b\right|}{\sqrt{1+1}}=1 \Rightarrow b=-1\pm\sqrt{2}$. 故 D 正确.

故选：BD

10. 如图所示四面体$OABC$中，$OB=OC=4$，$OA=3$，$OB\perp OC$，且$\angle AOB=\angle AOC=60°$，$\overrightarrow{CD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，$G$为$AD$的中点，点$H$是线段$OA$上动点，则下列说法正确的是（　　）



A. $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$；

B. 当H是靠近 A 的三等分点时，$\overrightarrow{DH}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{AB}$共面；

C. 当$\overrightarrow{OH}=\frac{5}{6}\overrightarrow{OA}$时，$\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OA}$；

D. $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{OH}$的最小值为$-1$.

【答案】BCD

【解析】

【分析】以$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$为基底，表示出相关向量，可直接判断A的真假，借助空间向量共面的判定方法可判断B的真假，利用空间向量数量积的有关运算可判断CD的真假.

【详解】以$\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\}$为基底，则$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=4$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=6$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$.

对A：因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=-\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

所以$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$，故A错误；

对B：当H是靠近A的三等分点，即$\overrightarrow{OH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$时，

$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}-\left(-\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$，

又$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，所以$\overrightarrow{DH}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$. 故$\overrightarrow{DH}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OC}$共面. 故B正确；

对C：因为$\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{5}{6}\overrightarrow{OA}$

$=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)-\frac{5}{6}\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}$，

所以：$\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{OA}=\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\right)\cdot\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$

$=-\frac{1}{3}\times9+\frac{1}{3}\times6+\frac{1}{6}\times6=0$，

所以$\overrightarrow{HG}\perp\overrightarrow{OA}$，故$\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OA}$，故C正确；

对D：设$\overrightarrow{OH}=\lambda\overrightarrow{OA}$，$(0\le\lambda\le1)$.

因为：$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD})=\lambda\overrightarrow{OA}-\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)$

$=\lambda\overrightarrow{OA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

所以 $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{OH}=\left(\lambda\overrightarrow{OA}-\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)\cdot\lambda\overrightarrow{OA}=\left(\lambda\overrightarrow{OA}\right)^2-\frac{2\lambda}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{\lambda}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=9\lambda^2-6\lambda$，

$(0\le\lambda\le1)$.

当 $\lambda=\frac{1}{3}$ 时，$\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{OH}$ 有最小值，为：$9\times\frac{1}{9}-6\times\frac{1}{3}=-1$，故 D 正确.

故选：BCD

11. 已知 $P(2,3)$ 是圆 C：$x^2+y^2-8x-10y-a+41=0$ 内一点，其中 $a>0$，经过点 P 的动直线 l 与 C 交于 A， B 两点，若 $|AB|$ 的最小值为 4，则（　　）

A. $a=12$；

B. 若 $|AB|=4$，则直线 l 的倾斜角为 $120°$；

C. 存在直线 l 使得 $CA\perp CB$；

D. 记△PAC 与△PBC 的面积分别为 $S_{\triangle PAC}$， $S_{\triangle PBC}$，则 $S_{\triangle PAC}\cdot S_{\triangle PBC}$ 的最大值为 8.

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据点 $P(2,3)$ 在圆内，列不等式，可求 a 的取值范围，在根据弦 $|AB|$ 的最小值为 4 求 a 的值，判断 A 的真假；明确圆的圆心和半径，根据 $k_l\cdot k_{CP}=-1$，可求直线 AB 的斜率，进而求直线 AB 的倾斜角，判断 B 的真假；利用圆心到直线的距离，确定弦长的取值范围，可判断 C 的真假；由三角形面积公式和相交弦定理，可求 $S_{\triangle PAC}\cdot S_{\triangle PBC}$ 的最大值，判断 D 的真假.

【详解】对 A：由 $2^2+3^2-8\times2-10\times3-a+41<0\Rightarrow a>8$.

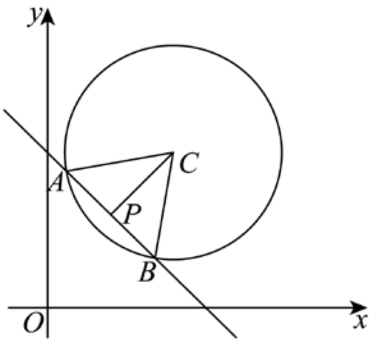
此时圆 C：$(x-4)^2+(y-5)^2=a$.

因为过 P 点的弦 $|AB|$ 的最小值为 4，所以 $|CP|=\sqrt{a-4}$，

又 $|CP|=\sqrt{(4-2)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{2}$，由 $\sqrt{a-4}=2\sqrt{2}\Rightarrow a=12$. 故 A 正确；

对 B：因为 $k_{CP}=\frac{5-3}{4-2}=1$，$k_l\cdot k_{CP}=-1$，所以直线 l 的斜率为 -1，其倾斜角为 $135°$，故 B 错误；

对 C：当 $|AB|=4$ 时，如图：

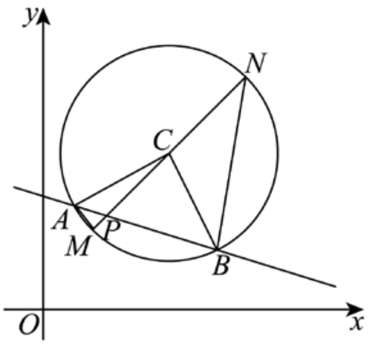


$\sin\angle ACP=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\cos\angle ACP=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，所以$\cos\angle ACB=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}>0$，

所以$\angle ACB$为锐角，又随着直线AB斜率的变化，$\angle ACB$最大可以为平角，

所以存在直线l使得$CA\perp CB$.故 C 正确；

对 D：如图：



直线CP与圆C交于M、N两点，链接AM，BN，

因为$\angle MAP=\angle BNP$，$\angle APM=\angle NPB$，所以$\triangle APM \backsim \triangle NPB$.

所以$\frac{|AP|}{|NP|}=\frac{|MP|}{|BP|}\Rightarrow |AP|\cdot|BP|=|MP|\cdot|NP|=\left(2\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)=4$.

又$S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}|PA|\cdot|PC|\cdot\sin\angle APC=\sqrt{2}|PA|\cdot\sin\angle APC$，$S_{\triangle PBC}=\sqrt{2}|PB|\cdot\sin\angle BPC$，

且$\sin\angle APC=\sin\angle BPC$.

所以$S_{\triangle PAC}\cdot S_{\triangle PBC}=2|PA|\cdot|PB|\cdot\sin^2\angle APC=8\sin^2\angle APC\le 8$，

当且仅当$\sin\angle APC=1$，即$AB\perp CP$时取“$=$”.故 D 正确.

故选：ACD

【点睛】方法点睛：在求$S_{\triangle PAC}\cdot S_{\triangle PBC}$的最大值时，应该先结合三角形相似（或者蝴蝶定理）求出$|AP|\cdot|BP|$为定值，再结合三角形的面积公式求$S_{\triangle PAC}\cdot S_{\triangle PBC}$的最大值.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 实数 x 、 y 满足 $x^2+y^2=4$，则 $(x-4)^2+(y+3)^2$ 的最大值是______.

【答案】49

【解析】

【分析】根据 $(x-4)^2+(y+3)^2$ 几何意义为圆上的点 (x,y) 与 $(4,-3)$ 距离的平方，找出圆上的与 $(4,-3)$ 的最大值，再平方即可求解.

【详解】解：由题意知：设 $p(x,y)$， $A(4,-3)$，

则 $p(x,y)$ 为圆 $x^2+y^2=4$ 上的点，

圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心 $O(0,0)$,半径 $r=2$，

则 $(x-4)^2+(y+3)^2$ 表示圆上的点 $p(x,y)$ 与 $A(4,-3)$ 距离的平方，

又因为 $|PA|_{\max}=|AO|+r=\sqrt{(4-0)^2+(-3-0)^2}+2=7$，

所以 $|PA|^2_{\max}=7^2=49$；

故 $(x-4)^2+(y+3)^2$ 的最大值是 49.

故答案为： 49.

13. 记 $\triangle ABC$ 的三个内角 A， B， C 的对边分别为 a， b， c，已知 $a\cos B=(2c-b)\cos A$，其中 $B\neq\frac{\pi}{2}$，若 $\triangle ABC$ 的面积 $S=2\sqrt{3}$， $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EC}$，且 $|\overrightarrow{AE}|=\frac{2\sqrt{21}}{3}$，则 BC 的长为______.

【答案】 $\sqrt{57}$

【解析】

【分析】利用正弦定理对 $a\cos B=(2c-b)\cos A$ 化简，可得 $A=\frac{\pi}{3}$，再由三角形面积公式求出 $bc=8$，根据题意写出 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，等式两边平方后，可求出 b,c 的值，由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，求出 BC 的长.

【详解】 $a\cos B=(2c-b)\cos A$,

由正弦定理可得: $\sin A\cos B=2\sin C\cos A-\sin B\cos A$，

$\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\sin C\cos A$，

$\sin(A+B)=2\sin C\cos A$，