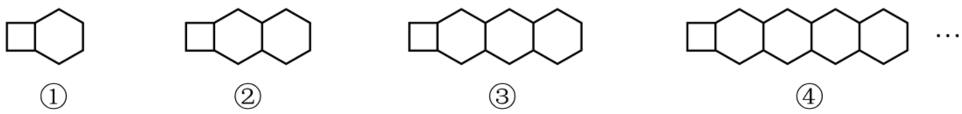
规律探究题

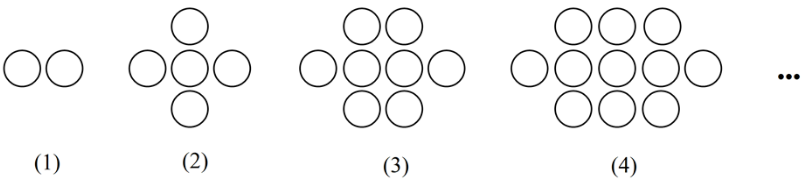
一、单选题

1.（2023·重庆·统考中考真题)用长度相同的木棍按如图所示的规律拼图案，其中第①个图案用了 9 根木棍，第②个图案用了 14 根木棍，第③个图案用了 19 根木棍，第④个图案用了 24 根木棍，……，按此规律排列下去，则第⑧个图案用的木棍根数是（　）



A．39　　B．44　　C．49　　D．54

2.（2023·重庆·统考中考真题）用圆圈按如图所示的规律拼图案，其中第①个图案中有 2 个圆圈，第②个图案中有 5 个圆圈，第③个图案中有 8 个圆圈，第④个图案中有 11 个圆圈，…，按此规律排列下去，则第⑦个图案中圆圈的个数为（　）

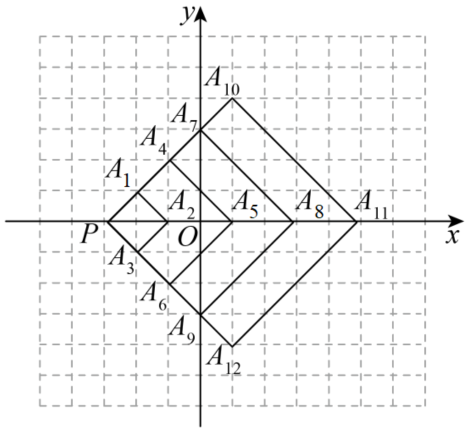


A．14　　B．20　　C．23　　D．26

3.（2023·云南·统考中考真题）按一定规律排列的单项式：$a,\sqrt{2}a^2,\sqrt{3}a^3,\sqrt{4}a^4,\sqrt{5}a^5,\cdots$，第 n 个单项式是（　）

A．$\sqrt{n}$　　B．$\sqrt{n-1}a^{n-1}$　　C．$\sqrt{n}a^n$　　D．$\sqrt{n}a^{n-1}$

4.（2023·山东烟台·统考中考真题）如图，在直角坐标系中，每个网格小正方形的边长均为 1 个单位长度，以点 P 为位似中心作正方形 $PA_1A_2A_3$，正方形 $PA_4A_5A_6$,…，按此规律作下去，所作正方形的顶点均在格点上，其中正方形 $PA_1A_2A_3$ 的顶点坐标分别为 $P(-3,0),A_1(-2,1),A_2(-1,0)$，$A_3(-2,-1)$，则顶点 A_{100} 的坐标为（　）



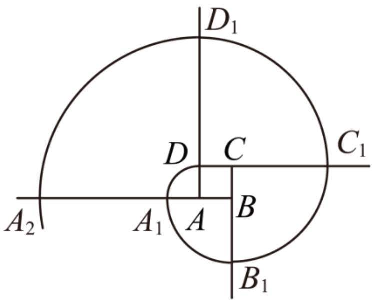
A．(31.34)　　B．$(31,-34)$　　C．$(32,35)$　　D．$(32,0)$

5．（2023·山东·统考中考真题）已知一列均不为 1 的数a_1，a_2，a_3,⋯，a_n满足如下关系：

$a_2=\frac{1+a_1}{1-a_1}$，$a_3=\frac{1+a_2}{1-a_2}$，$a_4=\frac{1+a_3}{1-a_3}$,⋯，$a_{n+1}=\frac{1+a_n}{1-a_n}$，若$a_1=2$，则$a_{2023}$的值是（　）

A．$-\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．-3　　D．2

6．（2023·四川达州·统考中考真题）如图，四边形$ABCD$是边长为$\frac{1}{2}$的正方形，曲线$DA_1B_1C_1D_1A_2\cdots$是由多段$90°$的圆心角的圆心为C，半径为CB_1；$\overset{\frown}{C_1D_1}$的圆心为D，半径为DC_1⋯，$\overset{\frown}{DA_1}$、$\overset{\frown}{A_1B_1}$、$\overset{\frown}{B_1C_1}$、$\overset{\frown}{C_1D_1}$⋯的圆心依次为A、B、C、D循环，则$\overset{\frown}{A_{2023}B_{2023}}$的长是（　）



A．$\frac{4045\pi}{2}$　　B．2023π　　C．$\frac{2023\pi}{4}$　　D．2022π

7．（2023·湖南常德·统考中考真题）观察下边的数表（横排为行，竖排为列），按数表中的规律，分数$\frac{20}{2023}$若排在第 a 行 b 列，则$a-b$的值为(　)

$\frac{1}{1}$

$\frac{1}{2}$　$\frac{2}{1}$

$\frac{1}{3}$　$\frac{2}{2}$　$\frac{3}{1}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{1}$

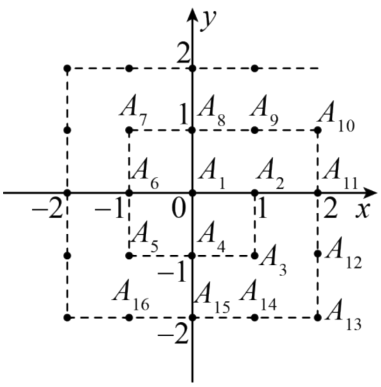
……

A．2003　　B．2004　　C．2022　　D．2023

8．（2023·四川内江·统考中考真题）对于正数 x，规定 $f(x)=\frac{2x}{x+1}$，例如：$f(2)=\frac{2\times 2}{2+1}=\frac{4}{3}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}=\frac{2}{3}$，$f(3)=\frac{2\times 3}{3+1}=\frac{3}{2}$，$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{2}$，计算：$f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{1}{99}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)+f(100)+f(101)=$（　　）

A．199　　B．200　　C．201　　D．202

9．（2023·山东日照·统考中考真题）数学家高斯推动了数学科学的发展，被数学界誉为“数学王子”，据传，他在计算 $1+2+3+4+\cdots+100$ 时，用到了一种方法，将首尾两个数相加，进而得到 $1+2+3+4+\cdots+100=\frac{100\times(1+100)}{2}$．人们借助于这样的方法，得到 $1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(1+n)}{2}$（$n$ 是正整数）．有下列问题，如图，在平面直角坐标系中的一系列格点 $A_i\left(x_i,y_i\right)$，其中 $i=1,2,3,\cdots,n,\cdots$，且 x_i,y_i 是整数．记 $a_n=x_n+y_n$，如 $A_1(0,0)$，即 $a_1=0,A_2(1,0)$，即 $a_2=1,A_3(1,-1)$，即 $a_3=0,\cdots$，以此类推．则下列结论正确的是（　　）



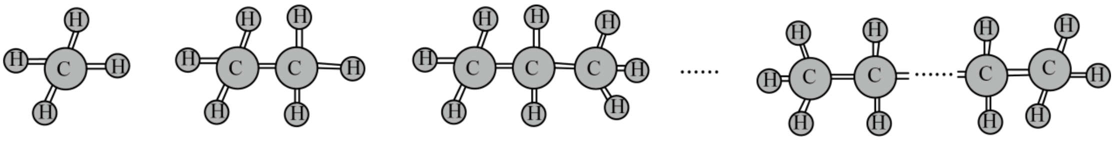
A．$a_{2023}=40$　　B．$a_{2024}=43$　　C．$a_{(2n-1)^2}=2n-6$　　D．$a_{(2n-1)^2}=2n-4$

二、填空题

10．（2023·四川成都·统考中考真题）定义：如果一个正整数能表示为两个正整数 m，n 的平方差，且 $m-n>1$，

则称这个正整数为"智慧优数". 例如，$16=5^2-3^2$，16 就是一个智慧优数，可以利用 $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$ 进行研究. 若将智慧优数从小到大排列，则第 3 个智慧优数是________；第 23 个智慧优数是________.

11.（2023·四川遂宁·统考中考真题）烷烃是一类由碳、氢元素组成的有机化合物，在生产生活中可作为燃料、润滑剂等原料，也可用于动、植物的养护. 通常用碳原子的个数命名为甲烷、乙烷、丙烷、……、癸烷（当碳原子数目超过10个时即用汉文数字表示，如十一烷、十二烷……）等，甲烷的化学式为 CH_4，乙烷的化学式为 C_2H_6，丙烷的化学式为 C_3H_8……，其分子结构模型如图所示，按照此规律，十二烷的化学式为_________.



甲烷　　　乙烷　　　　　　丙烷　　　……

12.（2023·湖南岳阳·统考中考真题）观察下列式子：

$1^2-1=1\times0$；$2^2-2=2\times1$；$3^2-3=3\times2$；$4^2-4=4\times3$；$5^2-5=5\times4$；…

依此规律，则第 n（n 为正整数）个等式是_________.

13.（2023·湖北随州·统考中考真题）某天老师给同学们出了一道趣味数学题：

设有编号为 1-100 的 100 盏灯，分别对应着编号为 1-100 的 100 个开关，灯分为"亮"和"不亮"两种状态，每按一次开关改变一次相对应编号的灯的状态，所有灯的初始状态为"不亮". 现有 100 个人，第 1 个人把所有编号是 1 的整数倍的开关按一次，第 2 个人把所有编号是 2 的整数倍的开关按一次，第 3 个人把所有编号是 3 的整数倍的开关按一次，……，第 100 个人把所有编号是 100 的整数倍的开关按一次. 问最终状态为亮"的灯共有多少盏？

几位同学对该问题展开了讨论：

甲：应分析每个开关被按的次数找出规律：

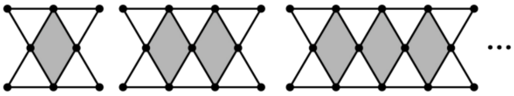
乙：1 号开关只被第 1 个人按了 1 次，2 号开关被第 1 个人和第 2 个人共按了 2 次，3 号开关被第 1 个人和第 3 个人共按了 2 次，……

丙：只有按了奇数次的开关所对应的灯最终是"亮"的状态.

根据以上同学的思维过程，可以得出最终状态为"亮"的灯共有___________盏.

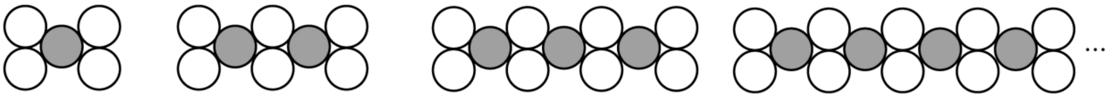
14.（2023·湖北十堰·统考中考真题）用火柴棍拼成如下图案，其中第①个图案由 4 个小等边三角形围成 1 个小菱形，第②个图案由 6 个小等边三角形围成 2 个小菱形，……，若按此规律拼下去，则第 n 个图案需

要火柴棍的根数为__________（用含 n 的式子表示）.



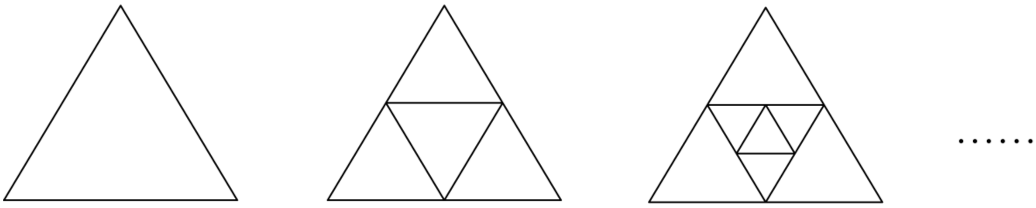
① ② ③

15．（2023·山西·统考中考真题）如图是一组有规律的图案，它由若干个大小相同的圆片组成．第 1 个图案中有 4 个白色圆片，第 2 个图案中有 6 个白色圆片，第 3 个图案中有 8 个白色圆片，第 4 个图案中有 10 个白色圆片，…依此规律，第 n 个图案中有__________个白色圆片（用含 n 的代数式表示）



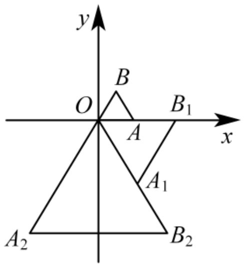
第1个 第2个 第3个 第4个

16．（2023·黑龙江绥化·统考中考真题）在求 $1+2+3+\cdots\cdots+100$ 的值时，发现：$1+100=101$，$2+99=101\cdots\cdots$，从而得到 $1+2+3+\cdots+100=101\times50=5050$．按此方法可解决下面问题．图（1）有 1 个三角形，记作 $a_1=1$；分别连接这个三角形三边中点得到图（2），有 5 个三角形，记作 $a_2=5$；再分别连接图（2）中间的小三角形三边中点得到图（3），有 9 个三角形，记作 $a_3=9$；按此方法继续下去，则 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n=$_______．（结果用含 n 的代数式表示）



图(1) 图(2) 图(3)

17．（2023·湖南怀化·统考中考真题）在平面直角坐标系中，□AOB 为等边三角形，点 A 的坐标为 $(1,0)$．把□AOB 按如图所示的方式放置，并将□AOB 进行变换：第一次变换将□AOB 绕着原点 O 顺时针旋转 $60°$，同时边长扩大为□AOB 边长的 2 倍，得到 $\triangle A_1OB_1$；第二次旋转将 $\triangle A_1OB_1$ 绕着原点 O 顺时针旋转 $60°$，同时边长扩大为 $\triangle A_1OB_1$，边长的 2 倍，得到 $\triangle A_2OB_2$，…．依次类推，得到□$A_{2033}OB_{2033}$，则 $\triangle A_{2023}OB_{2033}$ 的边长为__________，点 A_{2023} 的坐标为__________．



18．（2023·山东临沂·统考中考真题）观察下列式子

$1\times3+1=2^2$；

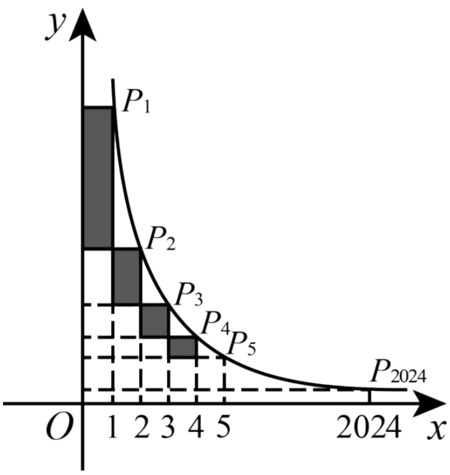
$2\times4+1=3^2$；

$3\times5+1=4^2$；

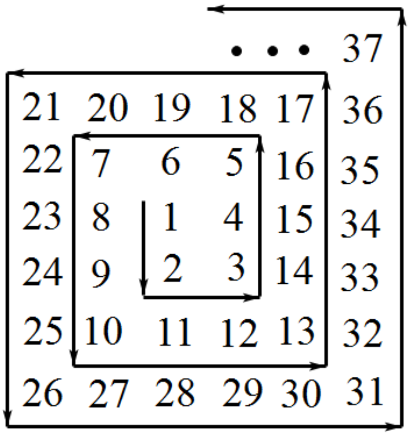
……

按照上述规律，__________$=n^2$．

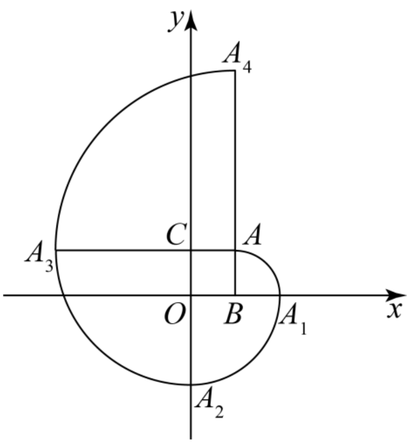
19．（2023·山东枣庄·统考中考真题）如图，在反比例函数$y=\frac{8}{x}(x>0)$的图象上有$P_1,P_2,P_3,\cdots P_{2024}$等点，它们的横坐标依次为1，2，3，…，2024，分别过这些点作x轴与y轴的垂线，图中所构成的阴影部分的面积从左到右依次为$S_1,S_2,S_3,\cdots,S_{2023}$，则$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{2023}=$__________．



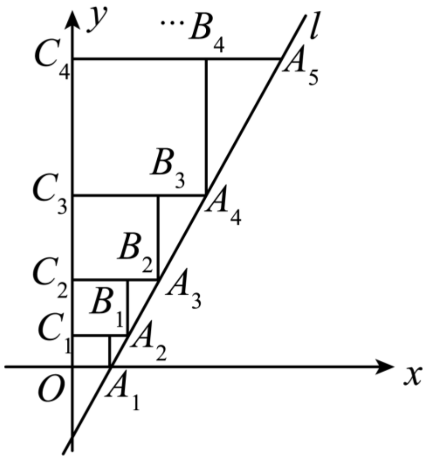
20．（2023·山东聊城·统考中考真题）如图，图中数字是从1开始按箭头方向排列的有序数阵．从3开始，把位于同一列且在拐角处的两个数字提取出来组成有序数对：$(3,5)$；$(7,10)$；$(13,17)$；$(21,26)$；$(31,37)$…如果单把每个数对中的第一个或第二个数字按顺序排列起来研究，就会发现其中的规律．请写出第n个数对：_______．



21．（2023·湖南张家界·统考中考真题）如图，在平面直角坐标系中，四边形$ABOC$是正方形，点A的坐标为$(1,1)$，$\overset{\frown}{AA_1}$是以点B为圆心，BA为半径的圆弧；$\overset{\frown}{A_1A_2}$是以点O为圆心，OA_1为半径的圆弧，$\overset{\frown}{A_2A_3}$是以点C为圆心，CA_2为半径的圆弧，$\overset{\frown}{A_3A_4}$是以点A为圆心，AA_3为半径的圆弧，继续以点B，O，C，A为圆心按上述作法得到的曲线$AA_1A_2A_3A_4A_5\cdots$称为正方形的“渐开线”，则点A_{2023}的坐标是________.



22．（2023·山东东营·统考中考真题）如图，在平面直角坐标系中，直线l：$y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$与x轴交于点A_1，以OA_1为边作正方形$A_1B_1C_1O$点C_1在y轴上，延长C_1B_1交直线l于点A_2，以C_1A_2为边作正方形$A_2B_2C_2C_1$，点C_2在y轴上，以同样的方式依次作正方形$A_3B_3C_3C_2$，…，正方形$A_{2023}B_{2023}C_{2023}C_{2022}$，则点$B_{2023}$的横坐标是____________.



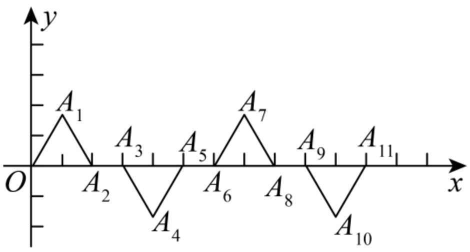
23．（2023·湖北恩施·统考中考真题）观察下列两行数，探究第②行数与第①行数的关系：

-2，4，-8，16，-32，64，……①

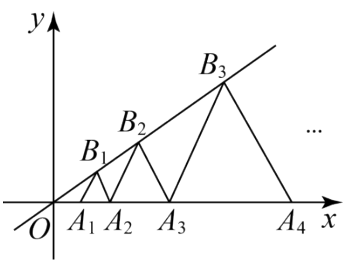
0，7，-4，21，-26，71，……②

根据你的发现，完成填空：第①行数的第 10 个数为__________；取每行数的第 2023 个数，则这两个数的和为__________．

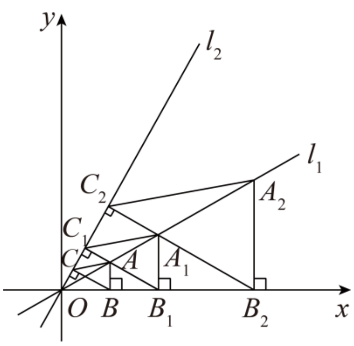
24．（2023·山东泰安·统考中考真题）已知，$\triangle OA_1A_2, \triangle A_3A_4A_5, \triangle A_6A_7A_8, \cdots\cdots$ 都是边长为 2 的等边三角形，按下图所示摆放．点 $A_2, A_3, A_5, \cdots\cdots$ 都在 x 轴正半轴上，且 $A_2A_3 = A_5A_6 = A_8A_9 = \cdots\cdots = 1$，则点 A_{2023} 的坐标是______．



25．（2023·四川广安·统考中考真题）在平面直角坐标系中，点 A_1、A_2、A_3、$A_4 \cdots$ 在 x 轴的正半轴上，点 B_1、B_2、$B_3 \cdots$ 在直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x\left(x \geq 0\right)$ 上，若点 A_1 的坐标为 $\left(2,0\right)$，且 $\triangle A_1B_1A_2$、$\triangle A_2B_2A_3$、$\triangle A_3B_3A_4 \cdots$ 均为等边三角形．则点 B_{2023} 的纵坐标为__________．



26．（2023·黑龙江·统考中考真题）如图，在平面直角坐标系中，□ABC的顶点A在直线$l_1: y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$上，顶点$B$在$x$轴上，$AB$垂直$x$轴，且$OB=2\sqrt{2}$，顶点$C$在直线$l_2: y=\sqrt{3}x$上，$BC \perp l_2$；过点A作直线$l_2$的垂线，垂足为$C_1$，交$x$轴于$B_1$，过点$B_1$作$A_1B_1$垂直$x$轴，交$l_1$于点$A_1$，连接$A_1C_1$，得到第一个$\triangle A_1B_1C_1$；过点$A_1$作直线$l_2$的垂线，垂足为$C_2$，交$x$轴于$B_2$，过点$B_2$作$A_2B_2$垂直$x$轴，交$l_1$于点$A_2$，连接$A_2C_2$，得到第二个$\triangle A_2B_2C_2$；如此下去，……，则□$A_{2023}B_{2023}C_{2023}$的面积是__________.



参考答案

一、单选题

1.【答案】B

【分析】根据各图形中木棍的根数发现计算的规律，由此即可得到答案.

【详解】解：第①个图案用了$4+5=9$根木棍，

第②个图案用了$4+5\times2=14$根木棍，

第③个图案用了$4+5\times3=19$根木棍，

第④个图案用了$4+5\times4=24$根木棍，

……，

第⑧个图案用的木棍根数是$4+5\times8=44$根，

故选：B.

【点拨】此题考查了图形类规律的探究，正确理解图形中木棍根数的变化规律由此得到计算的规律是解题的关键.

2.【答案】B

【分析】根据前四个图案圆圈的个数找到规律，即可求解.

【详解】解：因为第①个图案中有 2 个圆圈，$2=3\times1-1$；

第②个图案中有 5 个圆圈，$5=3\times2-1$；

第③个图案中有 8 个圆圈，$8=3\times3-1$；

第④个图案中有 11 个圆圈，$11=3\times4-1$；

…，

所以第⑦个图案中圆圈的个数为$3\times7-1=20$；

故选：B.

【点拨】本题考查了图形类规律探究，根据前四个图案圆圈的个数找到第 n 个图案的规律为$3n-1$是解题的关键.

3.【答案】C

【分析】根据单项式的规律可得，系数为$\sqrt{n}$，字母为a，指数为 1 开始的自然数，据此即可求解.

【详解】解：按一定规律排列的单项式：$a,\sqrt{2}a^2,\sqrt{3}a^3,\sqrt{4}a^4,\sqrt{5}a^5,\cdots$，第$n$个单项式是$\sqrt{n}a^n$，

故选：C.

【点拨】本题考查了单项式规律题，找到单项式的变化规律是解题的关键.

4.【答案】A

【分析】根据图象可得移动 3 次完成一个循环，从而可得出点坐标的规律$A_{3n-2}\left(n-3，n\right)$.

【详解】解：$\because A_1\left(-2,1\right)$，$A_4\left(-1,2\right)$，$A_7\left(0,3\right)$，$A_{10}\left(1,4\right)$，L ，

$\therefore A_{3n-2}\left(n-3，n\right)$，

$\because 100=3\times34-2$，则$n=34$，

$\therefore A_{100}\left(31,34\right)$，

故选：A.

【点拨】本题考查了点的规律变化，解答本题的关键是仔细观察图象，得到点的变化规律.

5.【答案】A

【分析】根据题意可把$a_1=2$代入求解$a_2=-3$，则可得$a_3=-\frac{1}{2}$，$a_4=\frac{1}{3}$，$a_5=2$……；由此可得规律求解.

【详解】解：$\because a_1=2$，

$\therefore a_2=\frac{1+2}{1-2}=-3$，$a_3=\frac{1-3}{1+3}=-\frac{1}{2}$，$a_4=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$，$a_5=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$，……；

由此可得规律为按 2. -3 、$-\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$ 四个数字一循环，

$\because 2023 \div 4 = 505.....3$，

$\therefore a_{2023} = a_3 = -\frac{1}{2}$；

故选 A.

【点拨】本题主要考查数字规律，解题的关键是得到数字的一般规律.

6.【答案】A

【分析】曲线 $DA_1B_1C_1D_1A_2\cdots$ 是由一段段 90 度的弧组成的，半径每次比前一段弧半径 $+\frac{1}{2}$，得到 $AD_{n-1} = AA_n = 4\times\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{2}$，$BA_n = BB_n = 4\times\frac{1}{2}(n-1)+1$，得出半径，再计算弧长即可.

【详解】解：由图可知，曲线 $DA_1B_1C_1D_1A_2\cdots$ 是由一段段 90 度的弧组成的，半径每次比前一段弧半径 $+\frac{1}{2}$，

$\therefore AD = AA_1 = \frac{1}{2}$，$BA_1 = BB_1 = 1$，$CB_1 = CC_1 = \frac{3}{2}$，$DC_1 = DD_1 = 2$，

$AD_1 = AA_2 = 2+\frac{1}{2}$，$BA_2 = BB_2 = 2+1$，$CB_2 = CC_2 = 2+\frac{3}{2}$，$DC_2 = DD_2 = 2+2$，

……，

$AD_{n-1} = AA_n = 4\times\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{2}$，$BA_n = BB_n = 4\times\frac{1}{2}(n-1)+1$，

故 $\overset{\frown}{A_{2023}B_{2023}}$ 的半径为 $BA_{2023} = BB_{2023} = 4\times\frac{1}{2}\times(2023-1)+1 = 4045$，

$\therefore \overset{\frown}{A_{2023}B_{2023}}$ 的弧长 $= \frac{90}{180}\times 4045\pi = \frac{4045}{2}\pi$.

故选 A

【点拨】此题主要考查了弧长的计算，弧长的计算公式：$l = \frac{n\pi r}{180}$，找到每段弧的半径变化规律是解题关键.

7.【答案】C

【分析】观察表中的规律发现，分数的分子是几，则必在第几列；只有第一列的分数，分母与其所在行数一致.

【详解】观察表中的规律发现，分数的分子是几，则必在第几列；只有第一列的分数，分母与其所在行数一致，故 $\frac{20}{2023}$ 在第 20 列，即 $b = 20$；向前递推到第 1 列时，分数为 $\frac{20-19}{2023+19} = \frac{1}{2042}$，故分数 $\frac{20}{2023}$ 与分数 $\frac{1}{2042}$ 在同一行．即在第 2042 行，则 $a = 2042$.

$\therefore a-b = 2042-20 = 2022.$

故选：C．

【点拨】本题考查了数字类规律探索的知识点，解题的关键善于发现数字递变的周期性和趋向性．

8．【答案】C

【分析】通过计算$f(1)=1,f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2,f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)=2$，…可以推出$f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{1}{99}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)+f(100)+f(101)$结果．

【详解】解：$\because f(1)=\frac{2}{1+1}=1,$

$$f(2)=\frac{4}{1+2}=\frac{4}{3},f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3},f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2,$$

$$f(3)=\frac{2\times3}{1+3}=\frac{3}{2},f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2},f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)=2,$$

…

$$f(100)=\frac{2\times100}{1+100}=\frac{200}{101}，\quad f(\frac{1}{100})=\frac{2\times\frac{1}{100}}{1+\frac{1}{100}}=\frac{2}{101}，\quad f(100)+f(\frac{1}{100})=2，$$

$$f\left(\frac{1}{101}\right)+f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{1}{99}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)+f(100)+f(101)$$

$=2\times100+1$

$=201$

故选：C．

【点拨】此题考查了有理数的混合运算，熟练掌握运算法则，找到数字变化规律是解本题的关键．

9．【答案】B

【分析】利用图形寻找规律$A_{2n-1}\left(n-1,n-1\right)$，再利用规律解题即可．

【详解】解：第 1 圈有 1 个点，即$A_1(0,0)$，这时$a_1=0$；

第 2 圈有 8 个点，即A_2到$A_9\left(1,1\right)$；

第 3 圈有 16 个点，即A_{10}到$A_{25}\left(2,2\right)$，；

依次类推，第 n 圈，$A_{2n-1}\left(n-1,n-1\right)$；