关于数学物理中的偏微分方程

数学物理方程 指从物理学或其他各门自然科学、技术科学中的某些物理问题导出的偏微分方程(有时也包括积分方程、微分积分方程等)。它们反映了有关的未知变量关于时间的导数和与空间变量的导数之间的制约关系。连续介质力学、电磁学、量子力学等方面的基本方程都属于数学物理方程的范围。

教学目的 通过本课程的教学使学生获得有关偏微分方程的一些基本概念、基本方法，掌握三类典型方程定解问题的解法，进一步扩大学生的数学知识面，为后继课程提供必要的数学基础。

参考书目

《数学物理方程》，王明新，清华大学出版社。

《数学物理方程》，姜礼尚，高教出版社。

《工程技术中的偏微分方程》，

潘祖梁， 浙江大学出版社。

1.1 偏微分方程的一些基本概念

一．偏微分方程（partial differential equation）（PDE）的基本概念

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$ 自变量

$$u(x)=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$ 未知函数

$$F\left(x_1,\cdots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\cdots,\frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\cdots\partial x_n^{m_n}}\right)=0$$

偏微分方程的一般形式

概念

PDE的阶： $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$

PDE的解
- 古典解 → 是指这样一个函数，它满足方程，并且在所考虑的区域内有m阶连续偏导数。
- 广义解

- 线性PDE
- 非线性PDE
  - 半线性PDE
  - 拟线性PDE
  - 完全非线性PDE

自由项 在偏微分方程中，不含有未知函数及其偏导数的项称为自由项.

线性PDE： PDE中对所含未知函数及其各阶导数的全体都是线性的。例如：

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{主部}} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x_1,\cdots,x_n)u = f(x_1,\cdots,x_n),$$

其中a_{ij}, b_j, c, f是给定的函数。

线性PDE的主部：具有最高阶数偏导数组成的部分.

常系数线性PDE： 系数a_{ij}, b_j, c均为常数.

不然称为变系数的.

齐次线性PDE: $f \equiv 0.$

不然称为非齐次的.

非线性PDE

拟线性PDE：　PDE中对最高阶导数是线性的。例如：

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n},u,x_1,\cdots,x_n\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}=f\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n},u,x_1,\cdots,x_n\right).$$

半线性PDE：　拟线性PDE中，最高阶导数的系数仅为自变量的函数。例如：

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}=f\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n},u,x_1,\cdots,x_n\right).$$

完全非线性PDE：　PDE中对最高阶导数不是线性的。

举例（未知函数为二元函数）

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ 解为： $u = f(y)$

2. $\dfrac{\partial u}{\partial t} + a\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ 变换 $\begin{cases} \xi = x \\ \eta = x - at \end{cases}$

解为：$u = f(x - at)$

举例（未知函数为二元函数）

3. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$$ 解为： $$u = g(x) + h(t)$$

4. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

变换 $$\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

解为：

$$u = g(x - at) + h(x + at)$$

举例（未知函数为二元函数）

5. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

不易找出其通解，但还是可以找出一些特解

任意解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部均满足方程。

$\ln\frac{1}{r}$ 也是解 $r=\sqrt{x^2+y^2}$

6. $$\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

KDV方程

特解都不易找到

7. $u_t + uu_x = e^u$ **拟线性PDE**

8. $v_x v_{xx} + v_y^2 v_{yy} = v^2$ **拟线性PDE**

9. $a(x,y)(v_{xx} + v_{yy}) = e^v (v_x + v_y)$

半线性PDE

10. $u_t + u_x = \sin u$ **半线性PDE**

11. $(u_t)^2 + (u_x)^2 = u^2$ **完全非线性PDE**

1.2 三个典型的方程

举例(多元函数)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

拉普拉斯(Laplace)方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$$

热传导方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

波动方程

物理模型与定解问题的导出

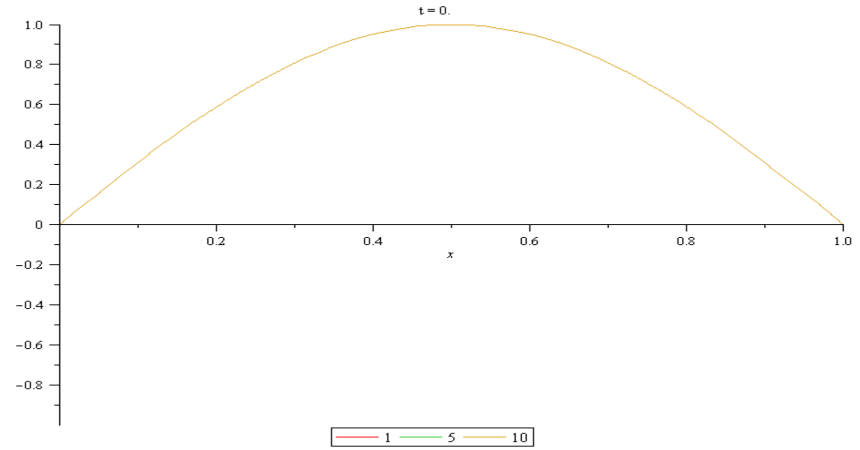
弦振动方程的导出

一长为L的柔软均匀细弦，拉紧后，当它受到与平衡位置垂直的外力作用时，开始作微小横振动。 假设这运动发生在同一平面内，求弦上各点位移随时间变化规律。

弦上各点作往返运动的主要原因在于弦的张力作用，弦在运动过程中各点的位移、加速度和张力都在不断变化，但它们遵循物理的运动规律。由此可以建立弦上各点的位移函数所满足的微分方程。

- **物理背景：**

  波的传播和弹性体振动。



弦振动方程的导出

首先，考察弦横振动这个物理问题：

给定一根两端固定的拉紧的均匀柔软的弦线，设其长度为l，它在外力作用下在平衡位置附近作微小的横振动，求弦上各点的运动规律。

把实际问题提炼为数学模型时必须做一定的理想化假设，以便抓住问题的最本质特征。

基本假设：

1. 弦的质量是均匀的，弦的截面直径与长度相比可以忽略。

弦可以视为一条曲线，线密度为常数。 **（细弦）**

2. 弦在某一个平面内作微小横振动。

弦的位置始终在一直线段附近，弦上各点在同一平面内垂直于该直线的方向上作微小振动。 **（微幅）**

3. 弦是柔软的，它在形变时不抵抗弯曲。

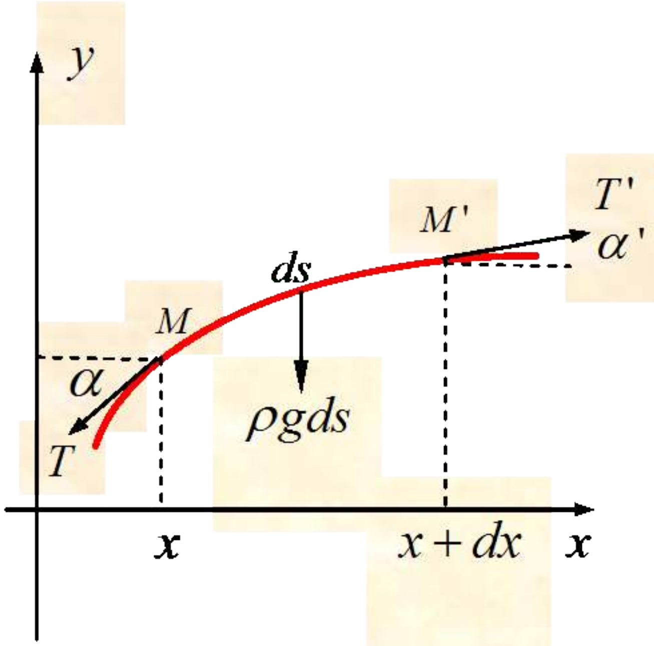
弦上各质点的张力方向与弦的切线方向一致，而弦的伸长变形与张力的关系服从虎克定律。 **（横振动）**

基本规律：

牛顿第二定律（冲量定律）

研究对象： $u(x,t)$

弦线上任意一点在 t 时刻沿y轴上的位移



在右图所示的坐标系，用u(x, t)表示弦上各点在时刻t沿垂直于x方向的位移。在这条弦上任意取一弦段(x, x+Δx)，它的弧长为：

$$\Delta s=\int_{x}^{x+\Delta x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}}dx\approx\Delta x$$

由假设3，弦线张力*T(x)*总是沿着弦在*x*处的切线方向．由于弦只在垂直*x*轴的方向进行横振动，因此可以把弦线的张力*T(x)*在*x*轴的方向的分量看成常数 *T*。对于图中选取的弦段而言，张力在*x*轴的垂直方向上的合力为：

$$T(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)\approx T(tg\alpha_2-tg\alpha_1)=T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]$$

假设2和假设3

在时间段*(t, t+Δt)*内该合力产生的冲量为：

$$\int_t^{t+\Delta t} T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]dt$$

另一方面，在时间段*(t, t+Δt)*内弦段*(x, x+Δx)*的动量变化为：

$$\int_x^{x+\Delta x} \rho\left[\frac{\partial u(x,t+\Delta t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]dx$$

于是由冲量定理：

$$\int_t^{t+\Delta t} T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]dt=\int_x^{x+\Delta x} \rho\left[\frac{\partial u(x,t+\Delta t)}{\partial t}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]dx$$

从而有：$\displaystyle\int_t^{t+\Delta t}\int_x^{x+\Delta x}\left[\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right]dxdt=0$

进一步由Δt，Δx 的任意性，有

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0, \qquad a^2=T/\rho$$

假定有垂直于x轴方向的外力存在，并设其线密度为$F(x,t)$，则弦段$(x, x+\Delta x)$上的外力为：

$$\int_x^{x+\Delta x} F(x,t)dx$$

它在时间段$(t, t+\Delta t)$内的冲量为：

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_x^{x+\Delta x} F(x,t)dx\,dt$$

于是有：

$$\int_{t}^{t+\Delta t}\int_{x}^{x+\Delta x}[\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-F(x,t)]dxdt=0$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=f(x,t),\qquad a^2=T/\rho,f(x,t)=F(x,t)/\rho$$

类似地，三维波动方程可以表示为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})=f(x,y,z,t)$$

简化假设：

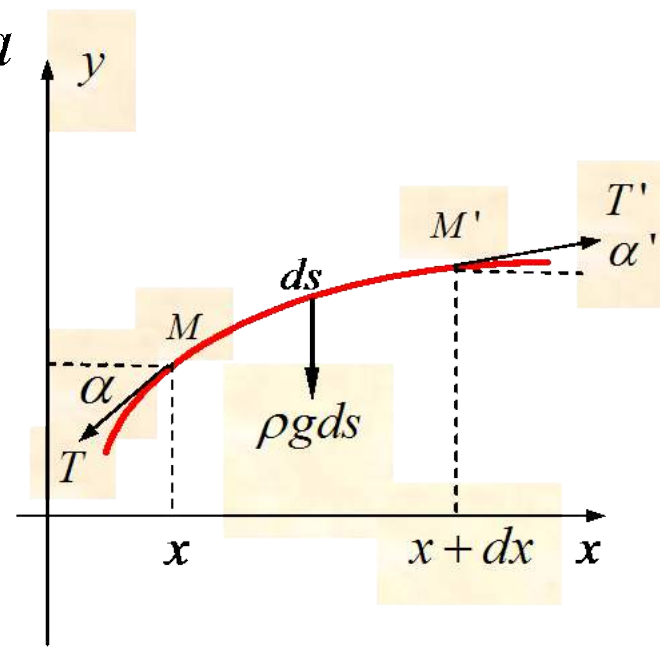
(1)弦是柔软的，弦上的任意一点的张力沿弦的切线方向。

(2)振幅极小， 张力与水平方向的夹角很小。

牛顿运动定律：

横向： $T\cos\alpha = T'\cos\alpha'$

纵向：$-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g ds \approx ma$



其中：$\cos\alpha \approx 1 \quad \cos\alpha' \approx 1$

$$\sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$\sin\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}$$

$$T = T'$$

$$T\left[\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]-\rho g ds \approx ma$$

其中： $\begin{cases} m = \rho ds \\ a = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \\ \mathrm{d}s \approx \mathrm{d}x \end{cases}$

$$T\left[\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]-\rho g \mathrm{d}x \approx \rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x$$

其中： $\dfrac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial x}-\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} \approx \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]\mathrm{d}x = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x$

$$\left[T\frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x^2}-\rho g\right]\mathrm{d}x \approx \rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x$$

$$\left[T\frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x^2}-\rho g\right]\mathrm{d}x\approx\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x$$

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial u^2(x,t)}{\partial x^2}-g\approx\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

令： $a^2=\dfrac{T}{\rho}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial u^2}{\partial x^2}-g$$

······一维波动方程

自由项

——————非齐次方程

忽略重力作用：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial u^2}{\partial x^2}$$

——————齐次方程

如果弦非均匀，则ρ和T为x的函数

非均匀弦的强迫横振动方程

$$\frac{\partial}{\partial x}(T(x)u_x)+F=\rho(x)u_{tt}(x,t)$$

一维波动方程不仅可以描述弦的振动，还可以描述：

- 弹性杆的纵向振动
- 管道中气体小扰动的传播
- ………等等

因此，一个方程反应的不止是一个物理现象，而是一类问题。

2+1维波动方程或膜振动方程

一块均匀的拉紧的薄膜，离开静止水平位置作垂直于水平位置的微小振动，其运动规律满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t)$$

其中：$u(x,y,t)$表示在 t 时刻、膜在 (x,y) 点处的位移

$f(x,y,t)$表示单位质量所受的外力

$a^2=T/$✕： T表示张力、 ✕为线密度

3+1维波动方程或声波方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t)$$

n+1维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x, t),$$

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + \cdots + u_{x_n x_n}, x = (x_1, \cdots, x_n)$$

1.4 定解条件和定解问题

定解条件

列出微分方程的目的是要从微分方程中求得具体问题的解或者研究解的性质。前面我们看到，弦振动方程描述的是弦作微小横振动时的位移函数$u(x, t)$所应满足的一般性规律。仅仅利用它并不能完全确定一条弦的具体运动状况。这是因为弦的运动还与其初始状态以及边界所处的状况有关系，因此对于具体的弦振动问题而言，还需要结合实际问题附加某些特定条件。

例如：在前面的推导中，弦的两端被固定在$x=0$和$x=l$两点，即

$$u(0, t)=0\ ,\qquad u(l, t)=0,$$

这两个等式称为边界条件。此外，设弦在初始时刻$t=0$时的位置和速度为

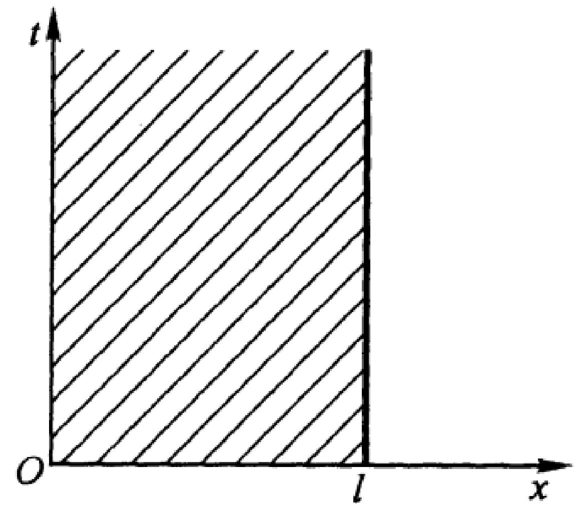
$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)\qquad (0\le x\le l)$$

这两个等式称为初始条件。边界条件和初始条件总称为定解条件。把微分方程和定解条件结合起来，就得到了与实际问题相对应的定解问题。

对于弦振动方程而言，与上述定解条件结合后，其定解问题可以描述为：

定解条件

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), & 2.1 \\[2ex]
t = 0 : u = \varphi(x), \dfrac{\partial u}{\partial t} = \psi(x), & 2.2 \\[2ex]
x = 0 : u = 0 & 2.3 \\[1ex]
x = l : u = 0 & 2.4
\end{cases}
$$



要在区域 $(0 \le x \le l, t \ge 0)$ 上（见右上图）求上述定解问题的解，就是要求这样的连续函数$u(x, t)$，它在区域$0<x<l,t>0$中满足波动方程(2.1)；在x轴上的区间$[0,l]$上满足初始条件(2.2)；并在边界$x=0$和$x=l$上满足边界条件(2.3)和 (2.4)。

一般称形如(2.3)和(2.4)的边界条件为第一类边界条件，也叫狄利克雷（Dirichlet）边界条件。

定解条件

1、初始条件——描述系统的初始状态

波动方程的初始条件

$$\begin{cases} u\big|_{t=0} = \varphi(x) & \text{系统各点的初位移} \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & \text{系统各点的初速度} \end{cases}$$

2、边界条件——描述系统在边界上的状况

波动方程的三类边界条件

(1)固定端：对于两端固定的弦的横振动，其为：

$$u\big|_{x=0}=0, \quad \textbf{或：} \quad u(a,t)=0$$

狄利克雷（**Dirichlet**）边界条件

(2)自由端：*x=a* 端既不固定，又不受位移方向力的作用。

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a}=0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a}=0 \qquad u_x(a,t)=0$$

诺依曼（**Neumann**）边界条件

(3) 弹性支承端：在*x=a*端受到弹性系数为*k* 的弹簧的支承。

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=a}=-k\,u\big|_{x=a} \quad \textbf{或} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma u\right)\bigg|_{x=a}=0$$

定解条件

同一类物理现象中，各个具体问题又各有其特殊性。边界条件和初始条件反映了具体问题的特殊环境和历史，即个性。

初始条件：够用来说明某一具体物理现象初始状态的条件。

边界条件：能够用来说明某一具体物理现象边界上的约束情况的条件。

其他条件：能够用来说明某一具体物理现象情况的条件。

定解问题适定性概念

定解问题

把某种物理现象满足的偏微分方程和其相应的定解条件结合在一起，就构成了一个定解问题。

（1）初始问题：只有初始条件，没有边界条件的定解问题；

（2）边值问题：没有初始条件，只有边界条件的定解问题；

（3）混合问题：既有初始条件，也有边界条件的定解问题。

定解问题的检验

- 解的存在性：定解问题是否有解；
- 解的唯一性：是否只有一解；
- 解的稳定性：定解条件有微小变动时，解是否有相应的微小变动。

经典的定解问题举例

维波动方程 (弦振动方程) 的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad t > 0, x \in R \\ u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\bigg|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

经典的定解问题举例

热传导方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad t > 0, x \in R \\ u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

经典的定解问题举例

二维调和方程的边值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \subset R^2 \\
\left.\left(a(x)u + b(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{\partial\Omega} = g(x)
\end{cases}
$$

$\alpha = 1, \beta = 0 \longrightarrow$ 第一边值问题（Dirichlet）

$\alpha = 0, \beta = 1 \longrightarrow$ 第二边值问题（Neumann）

$\alpha > 0, \beta > 0 \longrightarrow$ 第三边值问题（Robin）

经典的定解问题举例

热传导方程的初、边值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad t > 0, 0 < x < L \\
u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x) \\
u(x,t)\big|_{x=0} = g(t), u(x,t)\big|_{x=L} = h(t)
\end{cases}
$$