关于无穷集合及基数

第4节 无穷集合及其基数

主要内容：

- 可数集
- 不可数集
- 基数及其比较
- 康托-伯恩斯坦定理
- 悖论与公理化集合论

什么是集合的基数?

集合的基数亦称作集合的势。

粗略的说，就是一个集合的“规模”，它的“大小”，或者更确切地说，它有多少个元素。

通俗的说，集合的势是量度集合所含元素多少的量。集合的势越大，所含的元素越多。

很明显，如果集合中只有有限个元素，我们只要数一数它有多少个可以了，这时集合的基数就是其中所含元素的个数。

值得注意的是无限集，它所含的元素有无穷多个， 这时怎样去数?

为了解决这个问题，我们首先从伽利略“悖论”说起

伽利略“悖论”

1638年意大利的天文学家伽利略发现了下面的问题：

$N^{+}=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$与$N^{(2)}=\{1,4,9,\ldots,n^2,\ldots\}$

这两个集合，哪一个的元素更多一些？

一方面，凡是$N^{(2)}$的元素都是N^{+}的元素，也就是说$N^{(2)}\subseteq N^{+}$，而且由于2，3，5等元素都不在$N^{(2)}$中，所以$N^{(2)}\subset N^{+}$。这样看来，N^{+}中的元素要比$N^{(2)}$中的元素要多。

伽利略“悖论”

但另一方面，对于N^+中的每个元素都可以在$N^{(2)}$中找到一个元素与之对应，这样看来，$N^{(2)}$中的元素不比N^+中的元素要少。

那么到底N^+与$N^{(2)}$中所含元素的个数是否一样呢？如果是，那么就有

部分=整体？

然而按照传统，部分怎么能等于全体呢？这就是伽利略“悖论”，它不仅困惑了伽利略，还使许多数学家亦束手无策。

一一对应与可数集

1874年，Cantor注意到伽利略”悖论”。

在1874年到1897年间完全解决了这个问题。

Cantor详细地分析了断定有限集合的元素多少的方法，即采用数数的方法。他认为“数数的过程”就是作“一一对应的过程”。

Cantor认为这种“一一对应”的方法不仅适用于有限集，也适用于无限集。

他牢牢地抓住这个原则，抛弃了部分必定小于全体的教条，经历了大约23年之后，他才冲破了传统观念的束缚，革命性的解决了伽利略“悖论”。

Cantor认为在N^+与$N^{(2)}$之间存在着一一对应(即双射)，因此N^+与$N^{(2)}$的元素个数是相等的。

一一对应与可数集

定义4.1 设A，B是集合，若存在着从A到B的双射，就称A和B等势(或对等)，记作A≈B。

Cantor把自然数集N^+称为可数集(或可列集)，这是因为它的元素可以一个一个的数出来。

凡是与自然数集N^+等势的集合，它们的元素通过一一对应关系，也都可以一个一个的数出来，因此：

定义4.2 凡是与自然数集N^+等势的集合，称为可数集(或可列集)。

一一对应与可数集

显然，**N也是可数的**。

Cantor以此为出发点，对无限集合进行考察，他发现下面的集合都是可数集：

(1) ODD = $\{x \mid x \in N$，x是奇数$\} \approx N$

F：$N \rightarrow ODD$　$F(n)=2n+1$

（F：　$N^+ \rightarrow ODD$　$F(n)=2n-1$）

(2) EVEN = $\{x \mid x \in N$，x是偶数$\} \approx N$

F：$N \rightarrow EVEN$　$F(n)=2n$

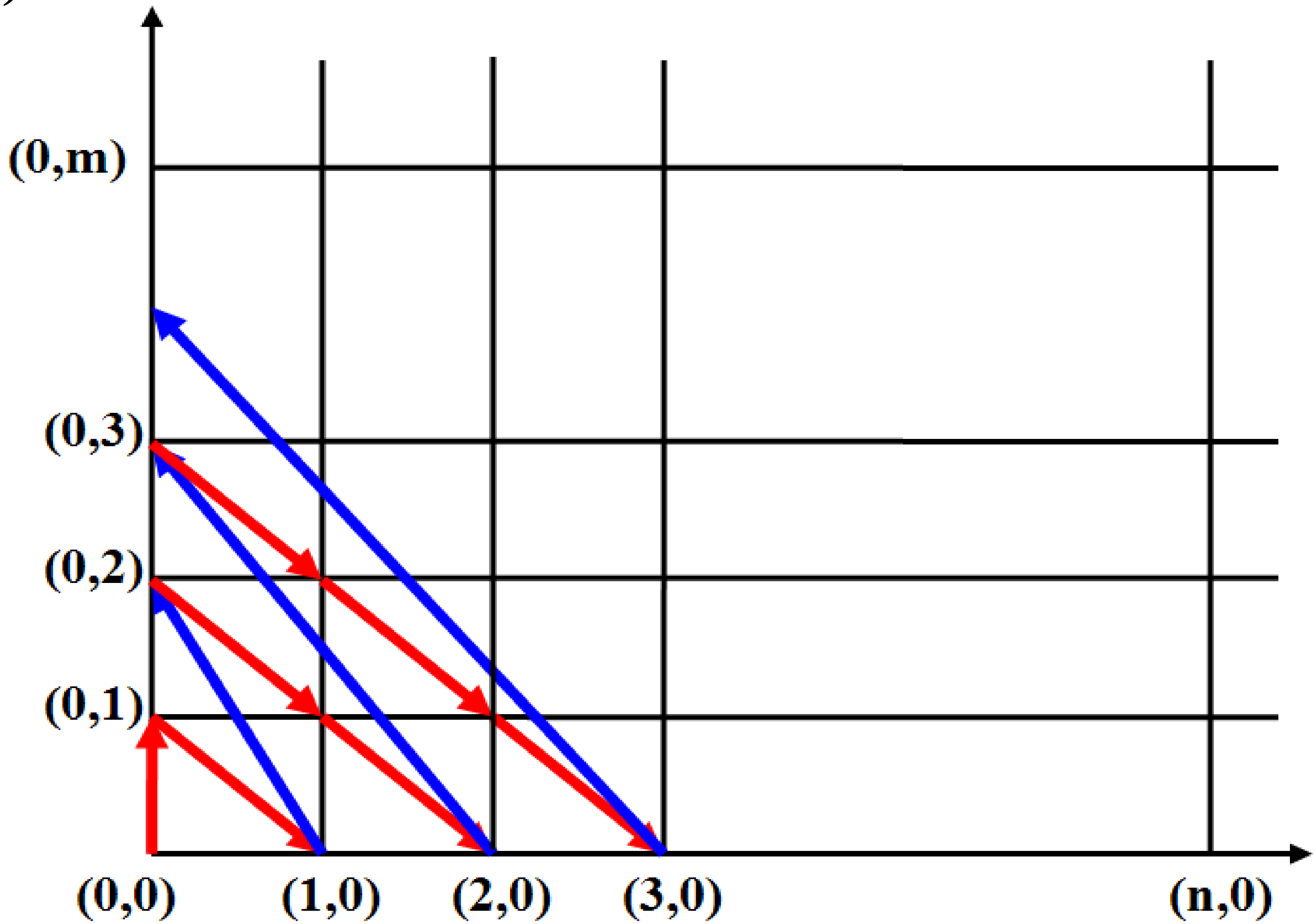
（F：　$N^+ \rightarrow EVEN$　$F(n)=2(n-1)$）

(3) $N^{(n)}=\{x \mid x=m^n$，m，$n \in N\} \approx N$

F：$N \rightarrow N^{(n)}$　　$F(m)= m^n$

一一对应与可数集

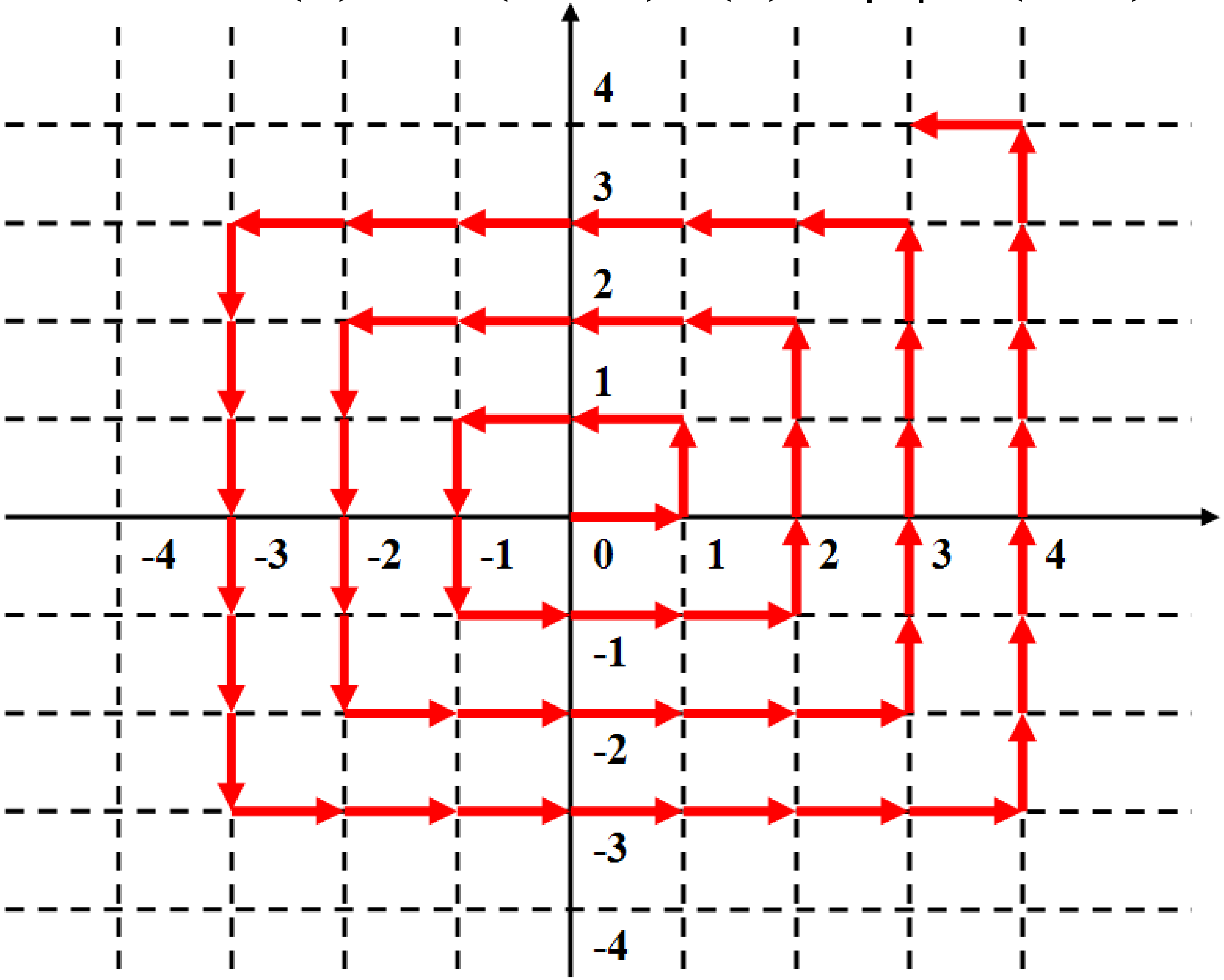
(4) N×N≈N



一一对应与可数集

(5) $Z \approx N$　　F: $Z \to N$　$F(n)=2n\ (n \geqslant 0)$ $F(n)=2|n|-1\ (n<0)$

(6) $Z \times Z \approx N$



一一对应与可数集

Cantor在解决了$Z \times Z \approx N$后，用类似的思想解决了$Z^n \approx N$。

在这种想法之下，Cantor得到了一个令人惊异的发现：$Q \approx N$。

并且利用他独创的“折线法”，巧妙的建立了Q与
N的一一对应。

为建立N到Q的双射函数，先把所有形式为p/q (p，q为整数且q>0)的数排成一张表。显然所有的有理数都在这张表内。

一一对应与可数集

…	←	-3/1[18]		-2/1[5]	←	-1/1[4]		0/1[0]	→	1/1[1]		2/1[10]	→	3/1[11]	…
…		↑		↓		↑				↓		↑		↓	…
…		-3/2[17]		-2/2		-1/2[3]	←	0/2	←	1/2[2]		2/2		3/2[12]	…
…		↑		↓								↑		↓	…
…		-3/3		-2/3[6]	→	-1/3[7]	→	0/3	→	1/3[8]	→	2/3[9]		3/3	…
…		↑												↓	…
…		-3/4[16]	←	-2/4	←	-1/4[15]	←	0/4	←	1/4[14]	←	2/4	←	3/4[13]	…

一一对应与可数集

注意：以0/1作为第一个数，按照箭头规定的顺序可以“数遍”表中所有的数。但是这个计数过程并没有建立N到Q的双射，因为同一个有理数可能被多次数到。例如1/1，2/2，3/3，…都是有理数1。

为此我们规定，在计数过程中必须跳过第二次以及以后各次所遇到的同一个有理数。如1/1被计数，那么2/2，3/3，…都要被跳过。表中数p/q上方的方括号内标明了这个有理数所对应的计数。

这样就可以定义双射函数f：N→Q，其中f(n)是[n]下方的有理数。从而证明了N≈Q。

Cantor对角线法与不可数集

正是由于这一发现，使得他甚至猜想R也是可数集，并且着手去证明它。他没有得到预期的结果，却又作出了更伟大的发现。

Cantor利用它著名的对角线法，证明了[0,1]是不可数集，在这个基础上证明了R也是不可数的，甚至于R^n也是不可数的。

注：(1)如果集合X不是可数集且X不是有限集，则称X为不可数集。

(2)可数集与不可数集是对无穷集合而言的，有限集既不称作不可数集合也不称作可数集。